Un teorema de Lipschitz–Picard fraccionario para ecuaciones diferenciales sobre un espacio de Banach y sus aplicaciones

Demian Goos, Eduardo Santillan Marcus

20 a 23 de septiembre - 2015

Reunión anual de la Unión Matemática Argentina 2016

Universidad Nacional de Rosario
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Contexto físico y aplicaciones de ecuaciones diferenciales fraccionarias:

- Modelado del flujo de neutrones en un reactor nuclear
- Modelado de relaciones humanas y búsqueda de equilibrio
- Modelado del comportamiento de medios viscoelásticos
- Modelado de la dinámica y la propagación ondas sísmicas
- Modelado de la evolución del mercado financiero

Definición

Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$. El operador integral fraccionaria de Riemann–Liouville de orden α, que será denotado I_0^α, está definido en $L^1([a,b])$ por

$$I_0^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Definición

Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$. El operador integral fraccionaria de Riemann–Liouville de orden α, que será denotado I_0^α, está definido en $L^1([a,b])$ por

$$I_0^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Definición

Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $n = \lceil \alpha \rceil$. El operador derivada fraccionaria de Caputo de orden α, que será denotado ${}^C D_0^\alpha$, se define sobre $W^{n,1}([a,b])$ como

$${}^C D_0^\alpha f(t) = I_0^{n-\alpha} f^{(n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau.$$

Teorema de Lipschitz–Picard fraccionario

Sea E un espacio de Banach y sea $F : E \mapsto E$ un operador Lipschitziano:

$$\|Fu - Fv\| \leq L\|u - v\|, \qquad \forall u, v \in E$$

con $L > 0$ y sea $\alpha \in (0,1)$. Entonces para todo $u_0 \in E$ existe $u \in C^1([0,\infty);E)$ único de modo que resuelve el problema de Cauchy

$$(PC_\alpha)\begin{cases} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u(t) = Fu(t) & si\ t \in \mathbb{R}_0^+ \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

P r u e b a:

Existencia:

Una función verifica (PC_α) si y sólo si verifica la ecuación integral de Volterra

$$u(t) = u_0 + I_0^\alpha(F(u)) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F(u(\tau)) d\tau.$$

P r u e b a:

Existencia:

Una función verifica (PC_α) si y sólo si verifica la ecuación integral de Volterra

$$u(t) = u_0 + I_0^\alpha(F(u)) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F(u(\tau)) d\tau.$$

Consideramos el espacio de funciones

$$X = \left\{ u \in C\left([0,\infty)\,; E\right) : \sup_{t \geq 0} \mathcal{E}_\alpha(-kt) \|u(t)\| < \infty \right\},$$

donde k se definirá luego y

$$\mathcal{E}_\alpha(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{\Gamma(\alpha i + 1)}$$

es la función de Mittag–Leffler, generalización fraccionaria de la función exponencial.

Se dota X de la norma

$$\|u\|_X = \sup_{t\geq 0} \mathcal{E}_\alpha(-kt)\|u(t)\|$$

y se prueba que $(X, \|\cdot\|_X)$ es un espacio de Banach.

Se dota X de la norma

$$\|u\|_X = \sup_{t\geq 0} \mathcal{E}_\alpha(-kt)\|u(t)\|$$

y se prueba que $(X, \|\cdot\|_X)$ es un espacio de Banach.
Se fija k de manera tal que el operador

$$\Phi : X \mapsto X$$

$$u \mapsto (\Phi u)(t) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F(u(\tau))d\tau$$

es Lipschitziano y se utiliza el teorema de punto fijo de Banach para concluir la existencia de soluciones de (PC_α).

Unicidad: Se supone la existencia de dos soluciones, u y v. Se considera

$$\Psi(t) = \|u(t) - v(t)\|.$$

Con lo que

$$\begin{aligned}
\Psi(t) &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F(u(\tau) - v(\tau)) d\tau \right\| \\
&\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left\| u(\tau) - v(\tau) \right\| d\tau \\
&= \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \Psi(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

Del lema de Gronwall surge que $\Psi = 0$.

Continuidad con respecto al orden de derivación

Sea u_α la solución del problema de Cauchy fraccionario (PC_α) y sea u_1 la solución del problema de Cauchy clásico

$$(PC_1)\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t) = Fu(t) & si\ t \in \mathbb{R}_0^+ \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Entonces se tiene que $u_\alpha \to u_1$ cuando $\alpha \to 1$.

Continuidad con respecto al orden de derivación

Sea u_α la solución del problema de Cauchy fraccionario (PC_α) y sea u_1 la solución del problema de Cauchy clásico

$$(PC_1)\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}u(t) = Fu(t) & si\ t \in \mathbb{R}_0^+\\ u(0) = u_0.\end{cases}$$

Entonces se tiene que $u_\alpha \to u_1$ cuando $\alpha \to 1$.

Aplicaciones del teorema de Lipschitz–Picard fraccionario

1) *Sea $E = \mathbb{R}^n$ y sea $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ una función Lipschitziana. Entonces el problema de Cauchy*

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}u(t) = f(u(t)) & si\ t \in \mathbb{R}_0^+\\ u(0) = u_0.\end{cases}$$

tiene solución y es única.

2) *Sea H un espacio de Hilbert, sea $A : H \mapsto H$ un operador maximal monótono, es decir*

$$(Av, v) \geq 0 \qquad \forall v \in H$$

$$\forall v \in H \ \ \exists u \in H \textit{ tal que } u + Au = v.$$

Sea el problema

$$(PC_\alpha) \begin{cases} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u + Au = 0 & \textit{si } t \in \mathbb{R}_0^+ \\ u\,(0) = u_0. \end{cases}$$

2) *Sea H un espacio de Hilbert, sea $A : H \mapsto H$ un operador maximal monótono, es decir*

$$(Av, v) \geq 0 \qquad \forall v \in H$$

$$\forall v \in H \;\; \exists u \in H \textit{ tal que } u + Au = v.$$

Sea el problema

$$(PC_\alpha) \begin{cases} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u + Au = 0 & \textit{si } t \in \mathbb{R}_0^+ \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Para probar existencia y unicidad de (PC_α), se considera la regularización Yosida de A de parámetro λ,

$$A_\lambda = \frac{1}{\lambda}\left(I - (I + \lambda A)^{-1}\right),$$

que verifica $A_\lambda \to A$ cuando $\lambda \to 0$.

Se considera la sucesión de problemas auxiliares

$$(PC_{\alpha,\lambda}) \begin{cases} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u + A_\lambda u = 0 & \text{si } t \in \mathbb{R}_0^+ \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Como A_λ es Lipschitziano para todo λ, por el teorema de Lipschitz–Picard fraccionario se sabe que $(PC_{\alpha,\lambda})$ tiene solución única, u_λ.
Finalmente se prueba que u_λ es convergente cuando $\lambda \to 0$ y que el límite u es solución del problema original.

Se considera la sucesión de problemas auxiliares

$$(PC_{\alpha,\lambda})\begin{cases}\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}u + A_\lambda u = 0 & \text{si } t \in \mathbb{R}_0^+\\ u(0) = u_0.\end{cases}$$

Como A_λ *es Lipschitziano para todo* λ*, por el teorema de Lipschitz–Picard fraccionario se sabe que* $(PC_{\alpha,\lambda})$ *tiene solución única,* u_λ*.*
Finalmente se prueba que u_λ *es convergente cuando* $\lambda \to 0$ *y que el límite* u *es solución del problema original.*

3) *Considerando en* ***2)*** $H = L^2(\mathbb{R})$ *y* $A = -\Delta$*, se puede probar que el Laplaciano es maximal monótono y que entonces*

$$(PC_\alpha)\begin{cases}\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}u(x,t) = \Delta u(x,t) & \text{si } x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_0^+\\ u(x,0) = u_0(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}\end{cases}$$

tiene solución única.

Muchas gracias!

- K. Li, J. Pengo, J. Gao, *Nonlocal Fractional Semilinear Differential Equations in Separable Banach Spaces*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2013 No. 07, 2013.
- J. Wang, X. Dong, W. Wei, *On the Existence of Solutions for a Class of Fractional Differential Equations*, Stud. Univ. Babes-yai Math, Vol 57 No. 01, 2012.
- A. Heibig, L. Palade, *On the Existence of Solutions to the fractional derivative equations, of relevance to diffusion in complex sistems*, Nonlinear Analysis: Modelling and Contro, Vol. 17 No. 2, 2012.
- M. Benchohra, J. Graef, F. Mostefai, *Weak Solutions for Nonlinear Fractional Differential Equations on Reflexive Banach Spaces*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, Vol. 2010 No. 54, 2010.
- Brezis, H., *Analyse Fonctionnelle*, Dunod, 2005.
- Diethelm, K., *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Springer, 2004.