Solución de similaridad para un problema de Stefan unidimensional a dos fases con zona pastosa y condición de frontera convectiva

Andrea N. Ceretani [†‡] y Domingo A. Tarzia [†]

[†] CONICET - Universidad Austral

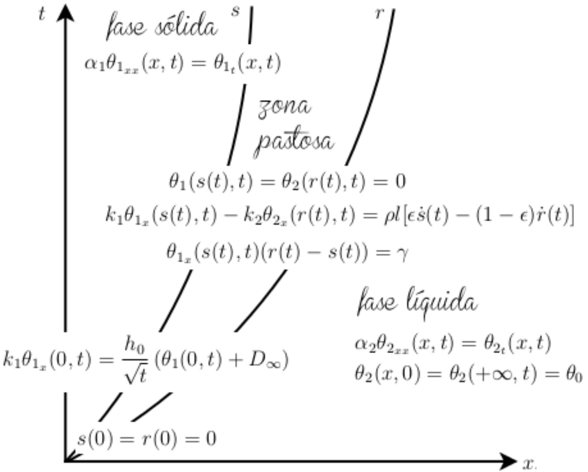
[‡] Universidad Nacional de Rosario

Reunión anual de la UMA

Bahía Blanca, 20-23 Septiembre 2016

Problema (1)

- ⋆ Material unidimensional semi-infinito, $x > 0$.
- ⋆ Proceso de solidificación a dos fases con zona pastosa.
  Modelo de Solomon, Wilson y Alexiades (1982)
- ⋆ Condición convectiva en la frontera $x = 0$.



Problema $(1^\star)$

- ⋆ Condición de temperatura en la frontera $x = 0$:
  $\theta_1(0,t) = -D_0, \; t > 0$

Problema $(1^\star)_\infty$

- ⋆ Condición de temperatura en la frontera $x = 0$:
  $\theta_1(0,t) = -D_\infty, \; t > 0$

Esquema

★ Existencia y unicidad de solución de similaridad† para el Problema (1).

Prob. (1): $k_1\theta_{1_x}(0,t) = \frac{h_0}{\sqrt{t}}\left(\theta_1(0,t) + D_\infty\right),\ t > 0$

★ Relación entre los Problemas (1) y ($1^\star$).

Prob. ($1^\star$): $\theta_1(0,t) = -D_0,\ t > 0$

★ Convergencia de la solución del Problema (1) a la solución del Problema $(1^\star)_\infty$ cuando $h_0 \to \infty$.

Prob. $(1^\star)_\infty$: $\theta_1(0,t) = -D_\infty,\ t > 0$

† Variable de similaridad: $\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}$

TEOREMA 1 El Problema (1) tiene la solución de similaridad dada por:

$$\theta_1(x,t) = -\frac{D_\infty \operatorname{erf}(\xi)}{\operatorname{erf}(\xi) + \frac{k_1}{h_0\sqrt{\pi\alpha_1}}}\left(1 - \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_1 t}}\right)}{\operatorname{erf}(\xi)}\right) \qquad 0 < x < s(t), \quad t > 0$$

$$\theta_2(x,t) = \frac{\theta_0 \operatorname{erf}(\mu)}{\operatorname{erfc}(\mu)}\left(\frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}}\right)}{\operatorname{erf}(\mu)} - 1\right) \qquad x > r(t), \quad t > 0$$

$$s(t) = 2\xi\sqrt{\alpha_1 t}, \quad r(t) = 2\mu\sqrt{\alpha_2 t} \qquad t > 0$$

con $\mu = \sqrt{\alpha_{12}}W(\xi)$, siendo $\alpha_{12} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} > 0$ y W la función dada por:

$$W(x) = x + \frac{\gamma\sqrt{\pi}}{2D_\infty}\exp(x^2)\left(\operatorname{erf}(x) + \frac{k_1}{h_0\sqrt{\alpha_1\pi}}\right), \quad x > 0,$$

si y sólo si ξ es solución de:

$$F(x) = \frac{l\sqrt{\pi}}{D_\infty c_1}G(x), \quad x > 0,$$

donde F y G están dadas por:

$$F(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\operatorname{erf}(x) + \frac{k_1}{h_0\sqrt{\alpha_1\pi}}} - \frac{\theta_0\sqrt{k_2 c_2}}{D_\infty\sqrt{k_1 c_1}}\frac{\exp\left(-\alpha_{12}W^2(x)\right)}{\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\alpha_{12}}W(x)\right)} \qquad x > 0$$

$$G(x) = x + \frac{(1-\epsilon)\gamma\sqrt{\pi}}{2D_\infty}\exp(x^2)\left(\operatorname{erf}(x) + \frac{k_1}{h_0\sqrt{\alpha_1\pi}}\right) \qquad x > 0.$$

TEOREMA 2 La ecuación $F(x) = \frac{l\sqrt{\pi}}{D_\infty c_1} G(x)$ admite una única solución postiva ξ si y sólo si:

$$h_0 > h_0^\star = \frac{\gamma k_1}{2D_\infty \eta \sqrt{\alpha_2}},$$

siendo η la única raíz positiva de la función F_3 dada por:

$$F_3(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\operatorname{erfc}(x)} - \frac{\gamma k_1 \sqrt{\pi}}{2\theta_0 k_2} \frac{1}{x} + \frac{(1-\epsilon) l \sqrt{\pi}}{\theta_0 c_2} x, \quad x > 0.$$

ESQUEMA DE LA DEMOSTRACIÓN

- $F(+\infty) = -\infty$ y $F'(x) < 0$ para todo $x > 0$.
  $G(+\infty) = +\infty$ y $G'(x) > 0$ para todo $x > 0$.

- $\exists!\, \xi > 0 \,/\, F(\xi) = \frac{l\sqrt{\pi}}{D_\infty c_1} G(\xi) \Leftrightarrow F(0^+) > \frac{l\sqrt{\pi}}{D_\infty c_1} G(0^+) \Leftrightarrow F_3\left(\frac{\gamma k_1}{2D_\infty h_0 \sqrt{\alpha_2}}\right) < 0\, (\bigstar)$

- $F_3(0^+) = -\infty$, $F_3(+\infty) = +\infty$ y $F_3'(x) > 0$ para todo $x > 0$.
  $\therefore\ \exists!\, \eta > 0 \,/\, F_3(\eta) = 0$

- $(\bigstar) \Leftrightarrow 0 < \frac{\gamma k_1}{2D_\infty h_0 \sqrt{\alpha_2}} < \eta \Leftrightarrow h_0 > h_0^\star$

■

⋆ Problema (1) a una fase:

Tarzia. *Journal of Applied Mathematics*, 2015:1–9 (2015).

Se recuperan estos resultados cuando aquí se considera $\theta_0 = 0$.

⋆ Problema (1) sin zona pastosa:

Tarzia. *Thermal Science*, 2016: en prensa (2016).

Se recuperan estos resultados cuando aquí se considera $\gamma = 0$.

Teorema 3 Si $h_0 > h_0^\star$, entonces la solución dada para el Problema (1) en el Teorema 2 coincide con la solución de similaridad para el Problema $(1^\star)$ dada en Tarzia. *Computational and Applied Mathematics*, 9-3:201–211, 1990, cuando en la condición de temperatura en la frontera $x = 0$ se considera:

$$D_0 = \frac{D_\infty \operatorname{erf}(\xi)}{\operatorname{erf}(\xi) + \frac{k_1}{h_0\sqrt{\pi\alpha_1}}} > 0.$$

Obs La función θ_1 en la solución del Problema (1) satisface $\theta_1(0,t) = -D_0$ para todo $t > 0$, si y sólo si D_0 está dado con en el Teorema 4.

Esquema de la demostración

- ⋆ La solución $\theta_1^\star$, $\theta_2^\star$, $s^\star$, $r^\star$ del Problema $(1^\star)$ se define a partir de un parámetro $\xi^\star$ que es la única solución positiva de una ecuación $F_0(x) = \frac{l\sqrt{\pi}}{D_0 c_1} G_0(x)$.

  $F(\xi) = \frac{l\sqrt{\pi}}{D_\infty c_1} G(\xi) \Rightarrow F_0(\xi) = \frac{l\sqrt{\pi}}{D_0 c_1} G_0(\xi) \qquad \therefore\ \xi = \xi^\star \qquad \therefore\ \mu = \mu^\star$
- ⋆ $\therefore\ \theta_1 = \theta_1^\star,\ \theta_2 = \theta_2^\star,\ s = s^\star,\ r = r^\star.$

■

Teorema 4 La solución para el Problema ($1^\star$) dada en Tarzia. *Computational and Applied Mathematics*, 9-3:201–211, 1990 coincide con la solución del Problema (1) dada en el Teorema 2, cuando en la condición convectiva en la frontera $x = 0$ se consideran:

$$D_\infty > D_0 \qquad \text{y} \qquad h_0 = \frac{k_1 D_0}{\sqrt{\pi\alpha_1}(D_\infty - D_0)\,\mathrm{erf}(\xi^\star)} > 0.$$

Además, $\xi^\star$ satisface:

$$\mathrm{erf}(\xi^\star) < \min\left\{1, \frac{2D_\infty D_0 \eta}{\gamma(D_\infty - D_0)\sqrt{\pi\alpha_{12}}}\right\} \qquad (h_0 > h_0^\star)$$

donde η es la única raíz positiva de la función F_3.

Obs La función $\theta_1^\star$ en la solución del Problema ($1^\star$) satisface $\theta_1^\star(0,t) = \frac{h_0}{\sqrt{t}}\left(\theta_1^\star(0,t) + D_\infty\right)$ para todo $t > 0$ y para $D_\infty > D_0$ dado, si y sólo si h_0 está dado con en el Teorema 4.

Obs Como consecuencia, $\xi^\star$ satisface:

$$\mathrm{erf}(\xi^\star) \leq \min\left\{1, \frac{2D_0\eta}{\gamma\sqrt{\pi\alpha_{12}}}\right\}.$$

TEOREMA 5 La solución del Problema (1) dada en el TEOREMA 2 converge puntualmente a la solución del Problema $(1^\star)_\infty$ dada en TARZIA. *Computational and Applied Mathematics*, 9-3:201–211, 1990, cuando $h_0 \to \infty$.

Además:

$$\theta_{1,h_0}(x,t) - \theta^\star_{1,\infty}(x,t) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h_0}\right), \qquad \theta_{2,h_0}(x,t) - \theta^\star_{2,\infty}(x,t) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h_0}\right) \qquad \forall\, x > 0,\ t > 0$$

$$s_{h_0}(t) - s^\star_\infty(t) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h_0}\right), \qquad r_{h_0}(t) - r^\star_\infty(t) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h_0}\right) \qquad t > 0.$$

cuando $h_0 \to \infty$.

Esquema de la demostración

- $\star$ $\xi_\infty^\star - \xi_{h_0} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h_0}\right)$, $h_0 \to \infty$

  $F_{h_0}(x) = \frac{l\sqrt{\pi}}{D_\infty c_1} G_{h_0}(x)$, $F_\infty(x) = \frac{l\sqrt{\pi}}{D_\infty c_1} G_\infty(x)$

  $J_{h_0}(x) = \frac{F_{h_0}(x)}{G_{h_0}(x)}$, $J_\infty(x) = \frac{F_\infty(x)}{G_\infty(x)}$, $x > 0$.

  $\ast$ $\left|J_\infty(x) - J_{h_0}(x)\right| \leq \frac{\mathcal{J}(x)}{h_0}$, $h_0 \geq h_0^{\star\star}$

  para todo $x \in (0, \nu_{h_0})$.

  ν_{h_0}: primera raíz postiva de J_{h_0}.

  $\ast$ $0 < \xi_\infty^\star - \xi_{h_0} = \frac{J_\infty(\xi_{h_0}) - J_{h_0}(\xi_{h_0})}{\tan(\alpha_{h_0})}$

  $\tan(\alpha_{h_0}) > -J'_\infty(\xi_\infty^\star) > 0$

- $\star$ $\mu_\infty^\star - \mu_{h_0} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h_0}\right)$, $h_0 \to \infty$

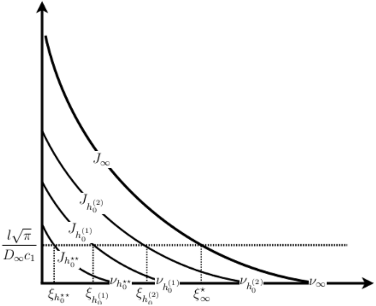
- $\star$ $\theta_{1,h_0} - \theta_{1,\infty}^\star = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h_0}\right)$,

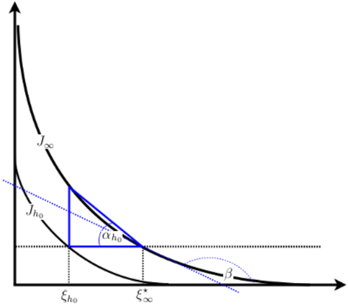
  $\theta_{2,h_0} - \theta_{2,\infty}^\star = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h_0}\right)$,

  $s_{h_0} - s_\infty^\star = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h_0}\right)$,

  $r_{h_0} - r_\infty^\star = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h_0}\right)$

  cuando $h_0 \to \infty$.





Gracias!