# *Caracterización de Polinomios Ortogonales Matriciales*

Celeste Calderón [1]
Yanina González [1]
Sebastián Simondi [1]
Ignacio Zurrián [2]

[1] FCEN. Universidad Nacional de Cuyo, Argentina.
[2] Pontificia Universidad Católica, Chile.

LXV Reunión de Comunicaciones Científicas.
Bahía Blanca 2016.

## Formulación del problema

Sean $U$, $V$ y $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. El objetivo es caracterizar todas las familia de polinomios matriciales mónicos ortogonales$\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ de tamaño $2 \times 2$ que son autofunción del operador diferencial hipergeométrico

$$D = t\,(1-t)\,\frac{d^2}{dt^2} + (C - tU)\,\frac{d}{dt} - V,$$

es decir, que satisfacen la siguiente ecuación diferencial matricial,

$$t\,(1-t)\,\frac{d^2 P_n}{dt^2} + (C - tU)\,\frac{dP_n}{dt} - V = P_n \Delta_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

donde $\Delta_n$ es una matriz diagonal,

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \mu_n \end{pmatrix}.$$

# Introducción

**Definición**

Sea

$$p_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k,$$

un *polinomio de grado n* donde $a_i \in \mathbb{C}$, $\forall i$, $n \in \mathbb{N}_0$, $a_n \neq 0$ y $t \in [a, b]$.

Se dice que una familia $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ de polinomios es *ortogonal* respecto a una función de peso $w : [a, b] \to \mathbb{R}$ si,

$$\langle p_n, p_m \rangle_w = \int_a^b p_n(t)\overline{p_m(t)}w(t)dt = 0, \qquad \forall\, n \neq m.$$

# Introducción

## Polinomios matriciales

Sea $N$ un número natural y $\mathbb{C}^{N\times N}$ el conjunto de las matrices $N\times N$ con coeficientes complejos. Definimos $\mathbb{C}^{N\times N}[t]$ como,

$$\mathbb{C}^{N\times N}[t] = \Big\{ P_n(t) = A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \ldots + A_1 t + A_0 \\ n \in \mathbb{N}_0, A_i \in \mathbb{C}^{N\times N}, 0 \leq i \leq n \Big\},$$

el conjunto de todos los *polinomio de una variable real con coeficientes matriciales* de tamaño $N\times N$.

# Introducción

## Función de peso

Se define una función $W : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$ de medida sobre $[a, b]$ como un *peso matricial* si verifica las siguientes propiedades,

1. $W(B)$ es semidefinida positiva para cualquier conjunto de Borel $B \subset \mathbb{R}$.
2. Los momentos, $\int t^n dW(t)$, existen y son finitos para todo $n \in \mathbb{N}_0$.
3. La matriz $\int P^*(t)\, dW(t) P(t)$ es no singular si el coeficiente principal del polinomio $P(t) \in \mathbb{C}^{N \times N}[t]$ es no singular.

# Introducción

## Ortogonalidad

Se dice que una familia $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ de polinomios matriciales es *ortogonal* respecto a una función de peso $W : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^{N\times N}$ si,

$$\langle P_n, P_m \rangle_w = \int_a^b P_n^*(t) W(t) P_m(t) dt = 0, \qquad \forall\, n \neq m.$$

# Introducción

En el 2003 J. Tirao [T] introdujo la *Ecuación Hipergeométrica Matricial*

$$DF(t) = t(1-t)F''(t) + (C - tU)F'(t) - VF(t) = 0,$$

donde $U, V, C \in \mathbb{C}^{N\times N}$ y $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^N$.
Una solución analítica en $|t| < 1$ es,

$$F(t) = {}_2H_1\left( \begin{matrix} U, & V \\ & C \end{matrix} ; t \right) F_0, \ \ F_0 \in \mathbb{C}^N$$

[T] Tirao, J. A., The matrix-valued hypergeometric equations, Proc. Natl. Acad. Sci., USA, 100 (2003), 8138-8141.

# Introducción

Si $spec(C) \cap (\mathbb{Z}_0^-) = \varnothing$,

$$ {}_2H_1 \left( \begin{matrix} U, & V \\ & C \end{matrix} ; t \right) = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} [C, U, V]_k $$

donde $[C, U, V]_n$ se define recursivamente como,

$$ \begin{aligned} [C, U, V]_0 &= I \\ [C, U, V]_{n+1} &= (C + n)^{-1} \left( n^2 + n(U - 1) + V \right) [C, U, V]_n \text{, si } n \geq 0. \end{aligned} $$

# Resultados

Si $det([C, U, V + \lambda_n]_n \, [C, U, V + \mu_n]_n) \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$, entonces las familias de polinomios matriciales mónicos $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$, solución de la ecuación diferencial hipergeométrica quedan expresadas de la siguiente manera,

$$P_n(t) = {}_2H_1\left( \begin{array}{cc} U, & V + \lambda_n \\ & C \end{array} ; t \right) [C, U, V + \lambda_n]_n^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$+ {}_2H_1\left( \begin{array}{cc} U, & V + \mu_n \\ & C \end{array} ; t \right) [C, U, V + \mu_n]_n^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con

$$\lambda_n = -n(n-1) - nu_{11} - v_{11}$$
$$\mu_n = -n(n-1) - nu_{22} - v_{22}.$$

# Resultados

Dichas familias de polinomios matriciales mónicos son ortogonales respecto a una función de peso definida positiva si y sólo si las matrices $U$, $V$ y $C$ se definen de la siguiente manera,

$$U = u_{11} I; \qquad V = \begin{pmatrix} v_{11} & 0 \\ 0 & v_{22} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & -\frac{1}{4}\frac{(c_{11}^2 - c_{22} - 2)(c_{11}^2 - c_{22} + 2)}{c_{21}} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

con

$$u_{11} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{22})(v_{11} - v_{22}) + c_{11} + c_{22}.$$

# Resultados

Más aún, dicha familia de polinomios es ortogonal respecto a la siguiente función de peso $W : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ definida por

$$W(t) = at^{\alpha}(1-t)^{\beta}(W_2 t^2 + W_1 t + W_0),\ a \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

donde si $v = v_{11} - v_{22}$,

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}(c_{11} + c_{22}) - 2 \\ \beta &= \frac{1}{2}(c_{11} - c_{22})v + \frac{1}{2}(c_{11} + c_{22}) - 2 \end{aligned}$$

$$W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\left(v^2-(\alpha-\beta)^2\right)(v-2-\alpha-\beta)}{c_{21}^2 v^2 (v+2+\alpha+\beta)} \end{pmatrix}$$

# Resultados

$$W_1 = \begin{pmatrix} -\frac{v+\alpha-\beta}{v} & \frac{\left(v^2-(\alpha-\beta)^2\right)(2+\alpha+\beta)}{c_{21}v^2(v+2+\alpha+\beta)} \\ \frac{\left(v^2-(\alpha-\beta)^2\right)(2+\alpha+\beta)}{c_{21}v^2(v+2+\alpha+\beta)} & \frac{(v-2-\alpha-\beta)(v+\alpha-\beta)(v-\alpha+\beta)^2}{c_{21}^2v^3(v+2+\alpha+\beta)} \end{pmatrix}$$

$$W_0 = \begin{pmatrix} \frac{(\alpha+1)(v+\alpha-\beta)}{v(v+2+\alpha+\beta)} & -\frac{(\alpha+1)(v+\alpha-\beta)(v-\alpha+\beta)}{c_{21}v^2(v+2+\alpha+\beta)} \\ -\frac{(\alpha+1)(v+\alpha-\beta)(v-\alpha+\beta)}{c_{21}v^2(v+2+\alpha+\beta)} & \frac{(\alpha+1)(v+\alpha-\beta)(v-\alpha+\beta)^2}{c_{21}^2v^3(v+2+\alpha+\beta)} \end{pmatrix}$$

# Resultados

La familia de polinomios matriciales mónicos $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ satisfacen la siguiente relación de recurrencia

$$tP_n = P_{n+1} + P_n B_n + P_{n-1} A_n$$

donde

$$\begin{aligned}
(B_n)_{11} &= \frac{2n^2 + 2nu_{11} - 2c_{11} + c_{11}u_{11} - 2n}{(2n - 2 + u_{11})(2n + u_{11})} \\
(B_n)_{21} &= \frac{(-v_{22} - 2 + u_{22} + v_{11})c_{21}}{(2n + v_{11} - v_{22} - 2 + u_{11})(2n + u_{11} + v_{11} - v_{22})} \\
(B_n)_{22} &= \frac{2n^2 + 2nu_{11} - 2c_{22} + c_{22}u_{11} - 2n}{(2n - 2 + u_{11})(2n + u_{11})} \\
(B_n)_{12} &= -\frac{(v_{22} - 2 + u_{11} - v_{11})(c_{11}^2 - c_{22}c_{11} - 4 + c_{22}^2)}{4(2n - v_{11} + v_{22} - 2 + u_{11})c_{21}(+2n + u_{11} - v_{11} + v_{22})}
\end{aligned}$$

# Resultados

$$(A_n)_{11} = \frac{(2n + u_{11} - v_{11} + v_{22})(2n - 4 + u_{11} + v_{11} - v_{22})}{(2n - 2 + u_{11} + v_{11} - v_{22})(2n - 3 + u_{11})}$$

$$\frac{n(c_{22} - 2 + 2n + c_{11})(n - 2 + u_{11})(2n - 2 + 2u_{11} - c_{11} - c_{22})}{(2n - 2 + u_{11} - v_{11} + v_{22})(2n - 1 + u_{11})}$$

$$(A_n)_{22} = \frac{(2n + u_{11} + v_{11} - v_{22})(2n - 4 + u_{11} - v_{11} + v_{22})}{(2n - 2 + u_{11} + v_{11} - v_{22})(2n - 3 + u_{11})}$$

$$\frac{n(c_{22} - 2 + 2n + c_{11})(n - 2 + u_{11})(2n - 2 + 2u_{11} - c_{11} - c_{22})}{(2n - 2 + u_{11} - v_{11} + v_{22})(2n - 1 + u_{11})}$$

$$(A_n)_{12} = (A_n)_{21} = 0.$$

# Conclusión

Si $det([C, U, V + \lambda_n]_n \, [C, U, V + \mu_n]_n) \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$, existe una única familia de polinomios matriciales mónicos ortogonales $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ de tamaño $2 \times 2$ autofunción del operador diferencial de segundo grado,

$$D = t\,(1-t)\,\frac{d^2}{dt^2} + (C - tU)\,\frac{d}{dt} - V,$$

con autovalor diagonal.

Además, el operador $D$ es simétrico respecto a la función de peso definida positiva $W(t)$, la familia de polinomios $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ es ortogonal respecto a dicha función de peso y satisface una relación de recurrencia de tres términos

$$tP_n = P_{n+1} + P_n B_n + P_{n-1} A_n, con \quad P_{-1} = 0 \quad y \quad P_0 = I.$$

# Conclusión

Si $det([C, U, V + \lambda_n]_n \, [C, U, V + \mu_n]_n) \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$, existe una única familia de polinomios matriciales mónicos ortogonales $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ de tamaño $2 \times 2$ autofunción del operador diferencial de segundo grado,

$$D = t\,(1-t)\,\frac{d^2}{dt^2} + (C - tU)\,\frac{d}{dt} - V,$$

con autovalor diagonal.

Además, el operador $D$ es simétrico respecto a la función de peso definida positiva $W(t)$, la familia de polinomios $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ es ortogonal respecto a dicha función de peso y satisface una relación de recurrencia de tres términos

$$tP_n = P_{n+1} + P_n B_n + P_{n-1} A_n, con \quad P_{-1} = 0 \quad y \quad P_0 = I.$$

Gracias por su atención!