Un resultado de $H-$convergencia para operadores tipo elpticos fraccionarios

Julián Fernández Bonder

Universidad de Buenos Aires e IMAS-CONICET

http://mate.dm.uba.ar/~jfbonder

Trabajo conjunto con Antonella Ritorto y Ariel Salort (UBA / IMAS-CONICET)

Septiembre 2016, Bahía Blanca – Argentina

Homogeneización es el estudio de las propiedades macroscópicas de materiales que son altamente heterogéneos a escala microscópica.

Homogeneización es el estudio de las propiedades macroscópicas de materiales que son altamente heterogéneos a escala microscópica.

Matemáticamente, esto significa reemplazar un problema de valores de contorno con coeficientes altamente oscilatorios por otro, típicamente con coeficientes constantes, que capture las propiedades esenciales del problema.

Homogeneización es el estudio de las propiedades macroscópicas de materiales que son altamente heterogéneos a escala microscópica.

Matemáticamente, esto significa reemplazar un problema de valores de contorno con coeficientes altamente oscilatorios por otro, típicamente con coeficientes constantes, que capture las propiedades esenciales del problema.

La homogeneización es un objeto de estudio que se remonta a fines de la década del 60 y principios del 70 con los trabajos de Spagnolo, De Giorgi, Bessounsan, Lions, Papanicolau, Sánchez-Palencia, etc.

El problema matemático básico consiste en estudiar el comportamiento cuando $n \to \infty$ para

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_n \nabla u_n) = f & \text{en } \Omega \\ u_n = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado, $f \in H^{-1}(\Omega)$ y $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [L^\infty(\Omega)]^{N \times N}$ es una sucesión de matrices uniformemente acotadas y uniformemente elípticas.

El problema matemático básico consiste en estudiar el comportamiento cuando $n \to \infty$ para

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_n \nabla u_n) = f & \text{en } \Omega \\ u_n = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado, $f \in H^{-1}(\Omega)$ y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [L^\infty(\Omega)]^{N\times N}$ es una sucesión de matrices uniformemente acotadas y uniformemente elípticas. Tipicamente,

$$A_n(x) = A(nx),$$

donde $A\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N\times N}$ es una matriz acotada y coersiva con coeficientes periódicos de período 1 en cada variable.

Introducción

Homogeneización

Cuando Murat en 1974 estaba estudiando el problema (1) cuando $n \to \infty$, la principal dificultad matemática que encontró fue que *el límite del producto de dos sucesiones débilmente convergentes no es necesariamente el producto de sus límites*.

Cuando Murat en 1974 estaba estudiando el problema (1) cuando $n \to \infty$, la principal dificultad matemática que encontró fue que *el límite del producto de dos sucesiones débilmente convergentes no es necesariamente el producto de sus límites*.

Murat desarrolló una herramienta hoy conocida como el *div-curl Lemma* que fue luego generalizada por Tartar en 1978.

Cuando Murat en 1974 estaba estudiando el problema (1) cuando $n \to \infty$, la principal dificultad matemática que encontró fue que *el límite del producto de dos sucesiones débilmente convergentes no es necesariamente el producto de sus límites*.

Murat desarrolló una herramienta hoy conocida como el *div-curl Lemma* que fue luego generalizada por Tartar en 1978.

Teorema (div-curl Lemma)

Sea $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *en* $[L^2(\Omega)]^N$ *tales que*

$$\psi_n \rightharpoonup \psi \quad y \quad \phi_n \rightharpoonup \phi \quad debil\ en\ [L^2(\Omega)]^N.$$

Si, adicionalmente, se verifica que

$$div\,\psi_n \to div\,\psi \ en\ H^{-1}(\Omega) \ \ y \ \ curl\,\phi_n \to curl\,\phi \ en\ [H^{-1}(\Omega)]^{N\times N},$$

entonces $\psi_n \cdot \phi_n \to \psi \cdot \phi$ *en el sentido de distribuciones.*

Basado en el div-curl Lemma, Tartar en 1978 introduce un método para el estudio del comportamiento asintótico de (1) cuando $n \to \infty$ y obtiene la existencia de una matriz $A_0 \in [L^\infty(\Omega)]^{N\times N}$ tal que $u_n \to u_0$ la solución del problema límite *homogeneizado*.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_0 u_0) = f & \text{en } \Omega \\ u_0 = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Basado en el div-curl Lemma, Tartar en 1978 introduce un método para el estudio del comportamiento asintótico de (1) cuando $n \to \infty$ y obtiene la existencia de una matriz $A_0 \in [L^\infty(\Omega)]^{N\times N}$ tal que $u_n \to u_0$ la solución del problema límite *homogeneizado*.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_0 u_0) = f & \text{en } \Omega \\ u_0 = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Este método es hoy conocido como el método de Tartar o como el método de las funciones test oscilatorias.

Operadores de la forma

$$\mathcal{L}u(x) := \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^N} a(x,y) \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}}\, dy.$$

O más generales

Difusión fraccionaria

Qué es la difusión fraccionaria?

Operadores de la forma

$$\mathcal{L}u(x) := \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^N} a(x,y) \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{N+2s}} \, dy.$$

O más generales

- Monótonos (de tipo $p-$laplaciano)

Difusión fraccionaria

Qué es la difusión fraccionaria?

Operadores de la forma

$$\mathcal{L}u(x) := \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^N} a(x,y) \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}}\, dy.$$

O más generales

- Monótonos (de tipo $p-$laplaciano)
- Totalmente no lineales

Muchas referencias!!

Operadores de la forma

$$\mathcal{L}u(x) := \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^N} a(x,y) \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}}\, dy.$$

O más generales

- Monótonos (de tipo $p-$laplaciano)
- Totalmente no lineales

Muchas referencias!!

Qué se puede decir del comportamiento asintótico de

$$\mathcal{L}_n u(x) := \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^N} a_n(x,y) \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}}\, dy = f(x).$$

Difusión fractionaria

La respuesta resulta ser muy simple!

Difusión fractionaria

La respuesta resulta ser muy simple!
Si $a_n(x,y) = a_n(y,x)$, $\mathcal{L}_n$ es el gradiente de un funcional convexo $J_n\colon L^2(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}$,

$$J_n(u) := \begin{cases} \iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} a_n(x,y)\frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dxdy & \text{si } u \in H_0^s(\Omega) \\ \infty & \text{sino.} \end{cases}$$

Difusión fractionaria

La respuesta resulta ser muy simple!
Si $a_n(x,y) = a_n(y,x)$, $\mathcal{L}_n$ es el gradiente de un funcional convexo $J_n\colon L^2(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}$,

$$J_n(u) := \begin{cases} \iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} a_n(x,y)\frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dxdy & \text{si } u \in H_0^s(\Omega) \\ \infty & \text{sino.} \end{cases}$$

Luego, si $a_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} a_0$ en $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, entonces $J_n \xrightarrow{\Gamma} J_0$.

Difusión fractionaria

La respuesta resulta ser muy simple!
Si $a_n(x,y) = a_n(y,x)$, $\mathcal{L}_n$ es el gradiente de un funcional convexo $J_n\colon L^2(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}$,

$$J_n(u) := \begin{cases} \iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} a_n(x,y)\frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dxdy & \text{si } u \in H^s_0(\Omega) \\ \infty & \text{sino.} \end{cases}$$

Luego, si $a_n \overset{*}{\rightharpoonup} a_0$ en $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, entonces $J_n \xrightarrow{\Gamma} J_0$.
Como corolario se obtiene

Teorema

Sean $0 < \alpha \le a_n \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ tales que $a_n \overset{*}{\rightharpoonup} a_0$. Si $u_n \in H^s_0(\Omega)$ es la solución de $\mathcal{L}_n u_n = f$, entonces $u_n \rightharpoonup u_0$ donde $u_0 \in H^s_0(\Omega)$ es la solución de $\mathcal{L}_0 u_0 = f$.

Demostración del resultado de $\Gamma-$convergencia

Desigualdad del límite inferior

Sea $u_n \to u$ en $L^2(\mathbb{R}^N)$, fijemos $0 < \delta < R < \infty$ y definamos $Q_{R,\delta} = (B_R \times B_R) \setminus \Delta_\delta$ donde $\Delta_\delta = \{|x-y| \leq \delta\}$.

Demostración del resultado de $\Gamma-$convergencia

Desigualdad del límite inferior

Sea $u_n \to u$ en $L^2(\mathbb{R}^N)$, fijemos $0 < \delta < R < \infty$ y definamos $Q_{R,\delta} = (B_R \times B_R) \setminus \Delta_\delta$ donde $\Delta_\delta = \{|x-y| \leq \delta\}$. Observemos que

$$\frac{(u_n(x) - u_n(y))^2}{|x-y|^{N+2s}} \to \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}} \quad \text{en } L^1(Q_{R,\delta}).$$

Demostración del resultado de $\Gamma-$convergencia

Desigualdad del límite inferior

Sea $u_n \to u$ en $L^2(\mathbb{R}^N)$, fijemos $0 < \delta < R < \infty$ y definamos $Q_{R,\delta} = (B_R \times B_R) \setminus \Delta_\delta$ donde $\Delta_\delta = \{|x-y| \leq \delta\}$. Observemos que

$$\frac{(u_n(x) - u_n(y))^2}{|x-y|^{N+2s}} \to \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}} \quad \text{en } L^1(Q_{R,\delta}).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} a_n(x,y)\frac{(u_n(x) - u_n(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}\, dxdy \\
&\geq \liminf_{n\to\infty} \iint_{Q_{R,\delta}} a_n(x,y)\frac{(u_n(x) - u_n(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}\, dxdy \\
&= \iint_{Q_{R,\delta}} a_0(x,y)\frac{(u(x) - u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}\, dxdy
\end{aligned}$$

y ahora se toma límite $R \uparrow \infty$ y $\delta \downarrow 0$.

Demostración del resultado de $\Gamma-$convergencia

Desigualdad del límite superior

La desigualdad del límite superior es trivial. Sólo se observa que la sucesión constante es la sucesión de recuperación, puesto que

$$u \in H_0^s(\Omega) \Rightarrow \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}} \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N),$$

La desigualdad del límite superior es trivial. Sólo se observa que la sucesión constante es la sucesión de recuperación, puesto que

$$u \in H_0^s(\Omega) \Rightarrow \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}} \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N),$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} a_n(x,y)\frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dxdy = \iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} a_0(x,y)\frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dxdy$$

$H-$convergencia

Lo que no puede inferirse de la $\Gamma-$convergencia es la convergencia de los flujos.
En el contexto de EDPs clásico, esto es

$$\xi_n := A_n \nabla u_n \rightharpoonup \xi_0 := A_0 \nabla u_0 \quad \text{debil en } L^2(\Omega).$$

$H-$convergencia

Lo que no puede inferirse de la $\Gamma-$convergencia es la convergencia de los flujos.
En el contexto de EDPs clásico, esto es

$$\xi_n := A_n \nabla u_n \rightharpoonup \xi_0 := A_0 \nabla u_0 \quad \text{debil en } L^2(\Omega).$$

El método de Tartar nos provee de este resultado y el mismo se basa en el div-curl Lemma.
Además, el método de Tartar permite tratar problemas no simétricos.

$H-$convergencia

Lo que no puede inferirse de la $\Gamma-$convergencia es la convergencia de los flujos.
En el contexto de EDPs clásico, esto es

$$\xi_n := A_n \nabla u_n \rightharpoonup \xi_0 := A_0 \nabla u_0 \quad \text{debil en } L^2(\Omega).$$

El método de Tartar nos provee de este resultado y el mismo se basa en el div-curl Lemma.
Además, el método de Tartar permite tratar problemas no simétricos.
Nuestro objetivo es la extensión del div-curl Lemma al contexto fraccionario y mostrar la convergencia de los flujos fraccionarios.

div-curl Lemma fraccionario

Recordemos el div-curl Lemma clásico

Teorema (div-curl Lemma)

Sean $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $[L^2(\Omega)]^N$ tales que

$$\psi_n \rightharpoonup \psi \quad \text{y} \quad \phi_n \rightharpoonup \phi \quad \text{debil en } [L^2(\Omega)]^N.$$

Si adicionalmente se tiene que

$$\operatorname{div}\psi_n \to \operatorname{div}\psi \text{ en } H^{-1}(\Omega) \;\text{ y }\; \operatorname{curl}\phi_n \to \operatorname{curl}\phi \text{ en } [H^{-1}(\Omega)]^{N\times N},$$

entonces $\psi_n \cdot \phi_n \to \psi \cdot \phi$ en el sentido de las distribuciones.

div-curl Lemma fraccionario

Recordemos el div-curl Lemma clásico

Teorema (div-curl Lemma)

Sean $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $[L^2(\Omega)]^N$ tales que

$$\psi_n \rightharpoonup \psi \quad \text{y} \quad \phi_n \rightharpoonup \phi \quad \text{debil en } [L^2(\Omega)]^N.$$

Si adicionalmente se tiene que

$$\operatorname{div}\psi_n \to \operatorname{div}\psi \text{ en } H^{-1}(\Omega) \ \text{ y } \ \operatorname{curl}\phi_n \to \operatorname{curl}\phi \text{ en } [H^{-1}(\Omega)]^{N\times N},$$

entonces $\psi_n \cdot \phi_n \to \psi \cdot \phi$ en el sentido de las distribuciones.

Cuando ϕ_n es irrotacional (i.e. $\phi_n = \nabla v_n$), se obtiene un importante caso particular

div-curl Lemma fraccionario

Teorema (div-curl Lemma, caso especial)

Sean $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $[L^2(\Omega)]^N$ y $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $H_0^1(\Omega)$ tales que

$$\psi_n \rightharpoonup \psi \quad \text{y} \quad \nabla v_n \rightharpoonup \nabla v \quad \text{debil en } [L^2(\Omega)]^N.$$

Si adicionalmente tenemos que

$$\operatorname{div}\psi_n \to \operatorname{div}\psi \text{ en } H^{-1}(\Omega),$$

entonces $\psi_n \cdot \nabla v_n \to \psi \cdot \nabla v$ en el sentido de las distribuciones.

div-curl Lemma fraccionario

Teorema (div-curl Lemma, caso especial)

Sean $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $[L^2(\Omega)]^N$ y $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $H_0^1(\Omega)$ tales que

$$\psi_n \rightharpoonup \psi \quad \text{y} \quad \nabla v_n \rightharpoonup \nabla v \quad \text{debil en } [L^2(\Omega)]^N.$$

Si adicionalmente tenemos que

$$\operatorname{div} \psi_n \to \operatorname{div} \psi \text{ en } H^{-1}(\Omega),$$

entonces $\psi_n \cdot \nabla v_n \to \psi \cdot \nabla v$ en el sentido de las distribuciones.

Proof.

Inmediato de la fórmula de integración por partes. $\square$

div-curl Lemma fraccionario

Algunas definiciones:
Dada $u \in H_0^s(\Omega)$, definimos su $s-$gradiente como

$$D_s u(x,y) = \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{\frac{N}{2}+s}}.$$

Observemos que $D_s u \in L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$.

div-curl Lemma fraccionario

Algunas definiciones:
Dada $u \in H_0^s(\Omega)$, definimos su $s-$gradiente como

$$D_s u(x,y) = \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{\frac{N}{2}+s}}.$$

Observemos que $D_s u \in L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$.
Dada $\phi \in L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, definimos su $s-$divergencia como

$$d_s\phi(x) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\phi(x,y) - \phi(y,x)}{|x-y|^{\frac{N}{2}+s}}\, dy.$$

Es fácil ver que si $\phi \in L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ entonces $d_s\phi \in H^{-s}(\mathbb{R}^N)$.

div-curl Lemma fraccionario

Algunas definiciones:
Dada $u \in H_0^s(\Omega)$, definimos su $s-$gradiente como

$$D_s u(x,y) = \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{\frac{N}{2}+s}}.$$

Observemos que $D_s u \in L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$.
Dada $\phi \in L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, definimos su $s-$divergencia como

$$d_s\phi(x) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\phi(x,y)-\phi(y,x)}{|x-y|^{\frac{N}{2}+s}}\, dy.$$

Es fácil ver que si $\phi \in L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ entonces $d_s\phi \in H^{-s}(\mathbb{R}^N)$.
Además, $\mathcal{L}_n u = \frac{1}{2} d_s(a_n(x,y) D_s u)$

div-curl Lemma fraccionario

Teorema (FB-Ritorto-Salort '16)

Sean $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $L^2(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)$ y $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $H^s_0(\Omega)$ tales que

$$\psi_n \rightharpoonup \psi \quad \text{y} \quad D_s v_n \rightharpoonup D_s v \quad \text{debil en } L^2(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N).$$

Si adicionalmente se verifica que

$$d_s\psi_n \to d_s\psi \text{ en } H^{-s}(\mathbb{R}^N),$$

entonces $\psi_n D_s v_n \to \psi D_s v$ en el sentido de las distribuciones.

div-curl Lemma fraccionario

Teorema (FB-Ritorto-Salort '16)

Sean $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ y $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $H^s_0(\Omega)$ tales que

$$\psi_n \rightharpoonup \psi \quad \text{y} \quad D_s v_n \rightharpoonup D_s v \quad \text{debil en } L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N).$$

Si adicionalmente se verifica que

$$d_s\psi_n \to d_s\psi \text{ en } H^{-s}(\mathbb{R}^N),$$

entonces $\psi_n D_s v_n \to \psi D_s v$ en el sentido de las distribuciones.

Proof.

La demostración se basa en la *fórmula de integración por partes fraccionaria*

$$\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \phi D_s u \, dxdy = \int_{\mathbb{R}^N} d_s\phi \, u \, dx$$

Corolario

Como una consecuencia del div-curl Lemma fraccionario, obtenemos

Teorema (FB-Ritorto-Salort, '16)

Sean $\alpha \leq a_n(x,y) \leq \beta$ tales que $a_n \overset{*}{\rightharpoonup} a_0$ en $L^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ y sean $u_n \in H^s_0(\Omega)$ $(n \geq 0)$ las soluciones de

$$\begin{cases} \mathcal{L}_n u_n = f & \text{en } \Omega \\ u_n = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

Entonces $u_n \rightharpoonup u_0$ debil en $H^s_0(\Omega)$ y, más aún, $\xi_n = a_n D_s u_n \rightharpoonup \xi_0 = a_0 D_s u_0$ debil en $L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$.

Corolario

Como una consecuencia del div-curl Lemma fraccionario, obtenemos

Teorema (FB-Ritorto-Salort, '16)

Sean $\alpha \le a_n(x,y) \le \beta$ tales que $a_n \overset{*}{\rightharpoonup} a_0$ en $L^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ y sean $u_n \in H_0^s(\Omega)$ $(n \ge 0)$ las soluciones de

$$\begin{cases} \mathcal{L}_n u_n = f & \text{en } \Omega \\ u_n = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

Entonces $u_n \rightharpoonup u_0$ debil en $H_0^s(\Omega)$ y, más aún,
$\xi_n = a_n D_s u_n \rightharpoonup \xi_0 = a_0 D_s u_0$ debil en $L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$.

Proof.

La demostración sigue las ideas de la prueba original de Tartar y la principal dificultad técnica es la construcción de las funciones test oscilantes. □

Observaciones, trabajo futuro y otras aplicaciones

- El caso cuasilineal (e.g. $p-$laplacian fraccionario) se trata de manera análoga

Observaciones, trabajo futuro y otras aplicaciones

- El caso cuasilineal (e.g. $p-$laplacian fraccionario) se trata de manera análoga
- Sólo con el resultado de la $\Gamma-$convergencia, el comportamiento asintótico de los autovalores se puede analizar sin mayores dificultades

Observaciones, trabajo futuro y otras aplicaciones

- El caso cuasilineal (e.g. $p-$laplacian fraccionario) se trata de manera análoga
- Sólo con el resultado de la $\Gamma-$convergencia, el comportamiento asintótico de los autovalores se puede analizar sin mayores dificultades
- Qué se puede decir del problema

$$\mathcal{L}_n u(x) := \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^N} a_n(x,y) \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s_n}}\, dy$$

con $s_n \uparrow 1$?

Observaciones, trabajo futuro y otras aplicaciones

- El caso cuasilineal (e.g. $p-$laplacian fraccionario) se trata de manera análoga
- Sólo con el resultado de la $\Gamma-$convergencia, el comportamiento asintótico de los autovalores se puede analizar sin mayores dificultades
- Qué se puede decir del problema

$$\mathcal{L}_n u(x) := \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^N} a_n(x,y) \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s_n}}\, dy$$

con $s_n \uparrow 1$? Con $a_n(x,y) = 1$ esto está bien entendido.

Observaciones, trabajo futuro y otras aplicaciones

- El caso cuasilineal (e.g. $p-$laplacian fraccionario) se trata de manera análoga
- Sólo con el resultado de la $\Gamma-$convergencia, el comportamiento asintótico de los autovalores se puede analizar sin mayores dificultades
- Qué se puede decir del problema

$$\mathcal{L}_n u(x) := \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^N} a_n(x,y) \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s_n}}\, dy$$

  con $s_n \uparrow 1$? Con $a_n(x,y) = 1$ esto está bien entendido.
- El div-curl Lemma fue usado con mucho éxito en Electromagnetismo (ecuaciones de Maxwell), Navier-Stokes, etc.
  Se puede aplicar el div-curl Lemma fraccionario a las versiones fraccionarias de estos modelos?

¡Muchas Gracias!