Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina.
Bahía Blanca, 21-23 de Septiembre de 2016

# Solución Explícita del Problema de Stefan a dos fases con un calor latente dependiente de la posición y con una condición convectiva en el borde fijo utilizando funciones de Kummer.

J. Bollati[1], D.A. Tarzia.[1]

[1]Depto. Matemática - CONICET, FCE, Univ. Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina.

## ESQUEMA DE LA PRESENTACIÓN

- Introducción al Problema de Stefan.
- Antecedentes en el tema.
- Presentación del problema a resolver.
- Resultados previos.
- Solución Explícita.
- Casos particulares.
- Bibliografía.

**PROBLEMA DE STEFAN**

↓

**CAMBIO DE FASE** → **Adquisición o desprendimiento de: CALOR LATENTE**

**(solidificación, fusión, etc.)**

↓

**-Ecuación diferencial (conducción del calor):** $\frac{d^2\psi}{dx^2}(x,t) = \frac{d\psi}{dt}(x,t)$

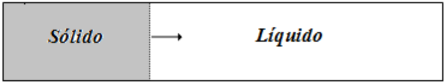
**-Condiciones iniciales:** $\psi(x,0) = T_{inicial}$

**-Condiciones de frontera: Temperatura, Flujo, CONVECTIVA, Radioactiva.**

**-Condiciones de interfase: Condición de Stefan.**

↓

**Hallar:**




**-Frontera libre s(t)** $x = 0$ $x = s(t)$

**-Temperatura fase sólida y líquida:** $\psi_s(x,t)$, $\psi_l(x,t)$.

## ANTECEDENTES EN EL TEMA.

### CALOR LATENTE VARIABLE

-**[Pri1970]** M. Primicerio, Stefan-like problems with space-dependent latent heat, Meccanica, 5 (1970) 187-190.

-**[VSP2004]** V.R. Voller, J.B. Swenson, C. Paola, An analytical solution for a Stefan problem with variable latent heat, Inst. J. Heat Mass Transfer., 47 (2004) 5387-5390.

-**[SaTa2011]** N.N. Salva, D.A. Tarzia, Explicit solution for a Stefan problem with variable latent heat ans constant heat flux boundary conditions , J. Math. Anal. Appl. , 379 (2011), 240-244.

-**[ZWB2014]** Y. Zhou, Y.J. Wang, W. K. Bu- Exact solution for a Stefan problem with latent heat a power function of position, Int. J. Heat Mass Transfer, 69 (2014) 451-454.

-**[ZhXi2015]** Y. Zhou, L.J. Xia, Exact solution for Stefan problem with general power-type latent heat using Kummer function , Inst. J. Heat Mass Transfer, 84 (2015) 114-118.

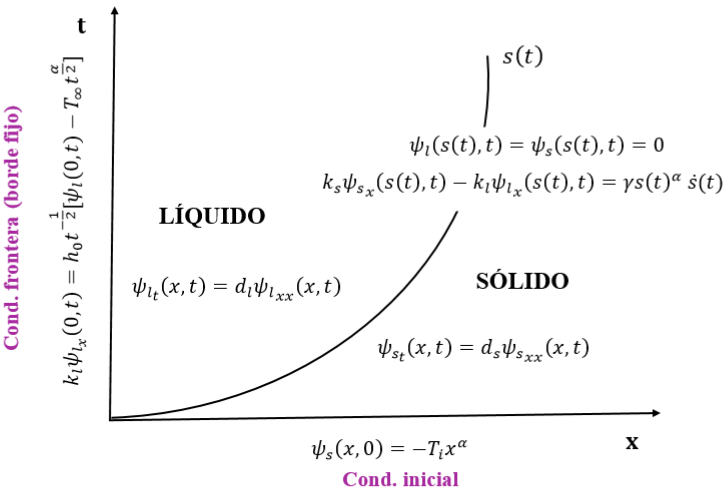
### CONDICIÓN CONVECTIVA EN EL BORDE FIJO

-**[Ta2016]** D.A. Tarzia- Relationship between Neumann solutions for two phase Lamé-Clapeyron-Stefan problems with convective and temperature boundary conditions, Thermal Sci.(2016), In press.

## ANTECEDENTES EN EL TEMA.

| | STEFAN | | CALOR LATENTE | | | | COND. FRONTERA | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 FASE | 2 FASES | GRAL. | EXP. | LINEAL | CTE | TEMP. | FLUJO. | CONVECT. |
| [Pri1970] | X | | X | | | | | X | |
| [VSP2004] | X | | | | X | | | X | |
| [SaTa2011] | | X | | | X | | | X | |
| [ZWB2014] | X | | | X | | | | X | |
| [ZhXi2015] | X | | | X | | | X | X | |
| [Ta2016] | | X | | | | X | | | X |
| Problema | | X | | X | | | | | X |

# PROBLEMA DE STEFAN A DOS FASES.



**PROBLEMA:** Hallar $\Psi_l(x,t)$, $\Psi_s(x,t)$ y $s(t)$ tales que:

$$\Psi_{l\,t}(x,t) = d_l \Psi_{l\,xx}(x,t), \qquad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$\Psi_{s\,t}(x,t) = d_s \Psi_{s\,xx}(x,t), \qquad x > s(t), \quad t > 0, \tag{2}$$

$$s(0) = 0, \tag{3}$$

$$\Psi_l(s(t),t) = \Psi_s(s(t),t) = 0, \qquad t > 0, \tag{4}$$

$$k_s \Psi_{s\,x}(s(t),t) - k_l \Psi_{l\,x}(s(t),t) = \gamma s(t)^{\alpha} \dot{s}(t), \qquad t > 0, \tag{5}$$

$$k_l \Psi_{l\,x}(0,t) = h_0 t^{-1/2} \left[ \Psi_l(0,t) - T_\infty t^{\alpha/2} \right], \qquad t > 0, \tag{6}$$

$$\Psi_s(x,0) = -T_i x^{\alpha}, \qquad x > 0. \tag{7}$$

donde:

- $d$: coeficiente de difusión.
- $\gamma x^{\alpha}$: calor latente por unidad de volumen.
- $-T_i x^{\alpha}$: variación de la temperatura inicial dependiendo de la profundidad.
- $T_\infty$: temperatura externa a $x = 0$
- $h_0$: coeficiente que caracteriza la transferencia de calor en el borde fijo.

**Lema**

a. *Sea*

$$\Psi(x,t) = t^{\alpha/2} f(\eta), \ \ \textit{with} \qquad \eta = \frac{x}{2\sqrt{dt}} \tag{8}$$

*entonces* $\Psi = \Psi(x,t)$ *es solución de la ecuación del calor* $\Psi_t(x,t) = d\Psi_{xx}(x,t)$, *con* $d > 0$ *si y sólo si* $f = f(\eta)$ *satisface la siguiente ecuación diferencial ordinaria:*

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2}(\eta) + 2\eta \frac{df}{d\eta}(\eta) - 2\alpha f(\eta) = 0. \tag{9}$$

b. *Si se introduce una nueva variable* $z = -\eta^2$, *la ecuación (9) se transforma en la* ***ecuación de Kummer****:*

$$z\frac{d^2 f}{dz^2}(z) + \left(\frac{1}{2} - z\right)\frac{df}{dz}(z) + \frac{\alpha}{2} f(z) = 0. \tag{10}$$

**Definición y propiedades de las funciones de Kummer.**

$$M(a,b,z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_s}{(b)_s s!} z^s, \quad a \text{ real y } b \text{ real excepto enteros no positivos,} \tag{11}$$

$$U(a,b,z) = \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(a-b+1)} M(a,b,z) + \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} z^{1-b} M(a-b+1, 2-b, z) \tag{12}$$

donde $(a)_s$ es el símbolo de pochhammer:

$$(a)_s = a(a+1)(a+2)\ldots(a+s-1), \qquad (a)_0 = 1 \tag{13}$$

**Fórmulas para las derivadas.** [OLBC2010]

$$\frac{d}{dz} M(a,b,z) = \frac{a}{b} M(a+1, b+1, z) \tag{14}$$

$$\frac{d}{dz}\left(z^{b-1} M(a,b,z)\right) = (b-1) z^{b-2} M(a, b-1, z) \tag{15}$$

$$\frac{d}{dz} U(a,b,z) = -aU(a+1, b+1, z) \tag{16}$$

## Lema

*La solución general de la ecuación diferencial ordinaria (10), está dada por:*

$$f(z) = c_{11} M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, z\right) + c_{21} U\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, z\right). \tag{17}$$

*donde $c_{11}$ y $c_{21}$ son constantes arbitrarias y $M(a,b,z)$ y $U(a,b,z)$ son las funciones de Kummer.*

## Observación

*La solución de la ecuación diferencial (10) se puede reescribir como:*

$$f(z) = c_{11} M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, z\right) + c_{21} z^{1/2} M\left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, z\right) \tag{18}$$

*donde $c_{11}$ y $c_{21}$ son constantes arbitrarias.*

**Teorema.** Si el coeficiente $h_0$ satisface la siguiente desigualdad:

$$h_0 > \frac{2^\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right) k_s T_i d_s^{(\alpha-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) T_\infty} \tag{19}$$

entonces existe un proceso de fusión instantáneo y el problema de frontera libre (1)-(7) tiene una única solución dada por:

$$s(t) = 2\nu\sqrt{d_l t} \tag{20}$$

$$\Psi_l(x,t) = t^{\alpha/2}\left[E_l M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\eta_l^2\right) + F_l \eta_l M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\eta_l^2\right)\right] \tag{21}$$

$$\Psi_s(x,t) = t^{\alpha/2}\left[E_s M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\eta_s^2\right) + F_s \eta_s M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\eta_s^2\right)\right] \tag{22}$$

donde $E_l$, $F_l$, $E_s$ y $F_s$ se definen como:

$$E_l = \frac{-\nu M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\nu^2\right)}{M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\nu^2\right)} F_l, \quad F_l = \frac{-h_0 T_\infty 2\sqrt{d_l} M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\nu^2\right)}{\left[k_l M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\nu^2\right) + 2\sqrt{d_l} h_0 \nu M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\nu^2\right)\right]}, \tag{23}$$

$$E_s = \frac{-\nu\omega M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\nu^2\omega^2\right)}{M\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2},-\nu^2\omega^2\right)} F_s, \quad F_s = \frac{-T_i 2^{\alpha+1} d_s^{\alpha/2} M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},\nu^2\omega^2\right)}{U\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},\nu^2\omega^2\right)}, \quad \omega = \sqrt{\frac{d_l}{d_s}}. \tag{24}$$

y el coeficiente adimensional $\nu$ es la única solución positiva de la siguiente ecuación:

$$-\frac{k_s T_i d_s^{(\alpha-1)/2}}{\gamma d_l^{(\alpha+1)/2}} f_1(x) + \frac{h_0 T_\infty}{\gamma 2^\alpha d_l^{(\alpha+1)/2}} f_2(x) = x^{\alpha+1}, \qquad x > 0. \tag{25}$$

donde las funciones $f_1$ y $f_2$ están definidas por:

$$f_1(x) = \frac{1}{U\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x^2\omega^2\right)}, \qquad f_2(x) = \frac{1}{\left[M\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right) + 2\frac{\sqrt{d_l}\,h_0}{k_l} x M\left(\frac{\alpha}{2}+1, \frac{3}{2}, x^2\right)\right]}, \tag{26}$$

**Observación**

*Sean* $\triangle_1 = -\frac{k_s T_i d_s^{(\alpha-1)/2}}{\gamma d_l^{(\alpha+1)/2}} \frac{\Gamma(\alpha/2+1)}{\Gamma(1/2)}$, *y* $\triangle_2 = \frac{h_0 T_\infty}{\gamma 2^\alpha d_l^{(\alpha+1)/2}}$. *Si se verifica que* $\triangle_1 + \triangle_2 = 0$, *la única solución de la ecuación (25) es* $\nu = 0$. *Esto implica que no hay un cambio de fase.*

**Corolario.** Si el coeficiente $h_0$ satisface la siguiente desigualdad:

$$0 < h_0 \leq \frac{2^\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right) k_s T_i d_s^{(\alpha-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) T_\infty} \tag{27}$$

entonces el problema de frontera libre (1)-(7) se reduce a un problema clásico de transferencia del calor para la fase sólida, dado por las siguientes ecuaciones :

$$\Psi_{s\,t}(x,t) = d_s \Psi_{s\,xx}(x,t), \qquad x>0, \quad t>0, \tag{28}$$

$$k_s \Psi_{s\,x}(0,t) = h_0 t^{-1/2}\left[\Psi_s(0,t) - T_\infty t^{\alpha/2}\right] \qquad t>0, \tag{29}$$

$$\Psi_s(x,0) = -T_i x^\alpha, \qquad x>0 \tag{30}$$

cuya solución explícita viene dada por:

$$\Psi_s(x,t) = t^{\alpha/2}\left[E_s M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, -\eta_s^2\right) + F_s \eta_s M\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\eta_s^2\right)\right] \tag{31}$$

donde $\eta_s = x/\sqrt{4 d_s t}$ y:

$$E_s = \frac{-T_i d_s^{\alpha/2} k_s \Gamma(\alpha+1) + \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) h_0 \sqrt{d_s} T_\infty}{\left[k_s \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right) + h_0\sqrt{d_s}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right]} \qquad F_s = \frac{2\sqrt{d_s} h_0 (E_s - T_\infty)}{k_s} \tag{32}$$

**Relación entre las funciones de Kummer y la familia de integrales repetidas de la función de error complementario:**

$$M\left(-\frac{n}{2},\frac{1}{2},-z^2\right) = 2^n\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)E_n(z) \tag{33}$$

$$zM\left(-\frac{n}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-z^2\right) = 2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)F_n(z) \tag{34}$$

donde $n$ es un entero, $E_n$ y $F_n$ están definidas por:

$$E_n(z) = \left[i^n erfc(z) + i^n erfc(-z)\right]/2 \tag{35}$$

$$F_n(z) = \left[i^n erfc(-z) + i^n erfc(z)\right]/2 \tag{36}$$

siendo:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt, \qquad erfc(x) = 1 - erf(x) \tag{37}$$

$$i^0 erfc(x) = erfc(x), \qquad i^n erfc(x) = \int_x^{+\infty} i^{n-1} erfc(t)dt \tag{38}$$

## CASO PARTICULAR $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$

**Lema.** Consideremos el problema (1)-(7), donde $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$. Si el coeficiente $h_0$ satisface la siguiente desigualdad:

$$h_0 > \frac{2^n \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) k_s T_i d_s^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) T_\infty} \tag{39}$$

entonces la solución explícita del problema está dada por:

$$s(t) = 2\nu\sqrt{d_l t} \tag{40}$$

$$\Psi_l(x,t) = -\frac{t^{n/2} 2^n h_0 T_\infty \sqrt{d_l}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\left[F_n(\eta_l)E_n(\nu) - F_n(\nu)E_n(\eta_l)\right]}{\left[k_l \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) E_n(\nu) + \sqrt{d_l}\, h_0 \Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right) F_n(\nu)\right]} \tag{41}$$

$$\Psi_s(x,t) = t^{n/2} 2^n T_i d_s^{n/2} \Gamma(n+1) \left[\frac{E_n(\eta_s)F_n(\nu\omega) - E_n(\nu\omega)F_n(\eta_s)}{E_n(\nu\omega) - F_n(\nu\omega)}\right] \tag{42}$$

donde $\eta_l = \dfrac{x}{2\sqrt{d_l t}}$, $\eta_s = \dfrac{x}{2\sqrt{d_s t}}$, $\omega = \sqrt{\dfrac{d_l}{d_s}}$ y $\nu$ es la única solución positiva de la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} x^{n+1} \quad &= \quad -\frac{k_s T_i d_s^{(n-1)/2}}{\gamma d_l^{(n+1)/2}} \frac{1}{2^n e^{x^2\omega^2}\sqrt{\pi}\left(E_n(x\omega) - F_n(x\omega)\right)} + \qquad (43) \\ &+ \quad \frac{h_0 T_\infty}{\gamma 2^n d_l^{(n+1)/2}} \frac{1}{\left[e^{x^2} 2^n \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) E_n(x) + \frac{2^n\sqrt{d_l}\, h_0}{k_l} e^{x^2} \Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right) F_n(x)\right]}, \qquad x > 0. \end{aligned}$$

## CASO PARTICULAR $\alpha = 0$

**Observación.** Considerando $\alpha = n = 0$ y teniendo en cuenta que $E_0(x) = 1$ y $F_0(x) = erf(x)$, las ecuaciones (39)-(43) se reducen a:

$$h_0 > \frac{k_s T_i}{\sqrt{\pi d_s} T_\infty}, \qquad s(t) = 2\nu\sqrt{d_l t} \tag{44}$$

$$\Psi_l(x,t) = \frac{h_0 T_\infty \sqrt{\pi d_l}}{k_l} \frac{\left[erf(\nu) - erf\left(\frac{x}{2\sqrt{d_l t}}\right)\right]}{\left[1 + \frac{\sqrt{\pi d_l} h_0}{k_l} erf(\nu)\right]} \tag{45}$$

$$\Psi_s(x,t) = -T_i \left[1 - \frac{erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{d_s t}}\right)}{erf(\nu\omega)}\right] \tag{46}$$

donde $\omega = \sqrt{\frac{d_l}{d_s}}$ y $\nu$ es la única solución positiva de la siguiente ecuación:

$$x = -\frac{k_s T_i}{\gamma\sqrt{\pi d_l d_s}} \frac{e^{-x^2\omega^2}}{erfc(x\omega)} + \frac{h_0 T_\infty}{\gamma\sqrt{d_l}} \frac{e^{-x^2}}{\left[1 + \frac{\sqrt{\pi d_l} h_0 erf(x)}{k_l}\right]}, \qquad x > 0. \tag{47}$$

Estas fórmulas coinciden con la solución explícita obtenida en [Ta2016].

# Bibliografía


[1] V. Alexiades, A.D. Solomon, Mathematical Modeling of Melting and Freezing Processes, Hemisphere-Taylor, Francis, Washington, 1993.

[2] J. Lorenzo-Trueba, V.R. Voller, Analytical and numerical solution of a generalized Stefan Problem exhibiting two moving boundaries with application to ocean delta deformation., J. Math. Anal. Appl., 366 (2010) 538-549.

[3] F.W.J. Olver ,D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark, NIST Handbook of Mathematical Functions, Cmabridge University Press, New York (2010).

[4] L.L. Perchuk, Progress in metamorphic and magmatic petrology, Cambridge University Press, Wallingford, UK, 2003.

[5] M. Primicerio, Stefan-like problems with space-dependent latent heat, Meccanica, 5 (1970) 187-190.

[6] N.N. Salva, D.A. Tarzia, Explicit solution for a Stefan problem with variable latent heat ans constant heat flux boundary conditions , J. Math. Anal. Appl. , 379 (2011), 240-244.

[7] D.A. Tarzia- Relationship between Neumann solutions for two phase Lamé-Clapeyron-Stefan problems with convective and temperature boundary conditions, Thermal Sci.(2016), In press.

[8] D.A. Tarzia, A bibliography on moving-free boundary problems for the heat-diffusion equation. The Stefan and related problems, MAT- Serie A, 2 (2000) 1-297.

[9] V.R. Voller, J.B. Swenson, C. Paola, An analytical solution for a Stefan problem with variable latent heat, Inst. J. Heat Mass Transfer., 47 (2004) 5387-5390.

[10] Y. Zhou, L.J. Xia, Exact solution for Stefan problem with general power-type latent heat using Kummer function , Inst. J. Heat Mass Transfer, 84 (2015) 114-118.

[11] Y. Zhou, Y.J. Wang, W. K. Bu- Exact solution for a Stefan problem with latent heat a power function of position, Int. J. Heat Mass Transfer, 69 (2014) 451-454.

**Gracias por su atención.**