El método de súper y sub soluciones en el espacio de funciones casi periódicas.

Pablo Amster, Rocío Balderrama

Universidad de Buenos Aires - IMAS (CONICET)

UMA - Bahía Blanca - 2016

Problema periódico asociado a la ecuación

$$u'' = f(t, u, u'), \tag{1}$$

donde f es una función continua T-periódica en t.

Una super solución es una función $\varphi \in C^2$ T-periódica que satisface

$$\varphi''(t) \leq f(t, \varphi(t), \varphi'(t)), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Una super solución es una función $\varphi \in C^2$ T-periódica que satisface

$$\varphi''(t) \leq f(t, \varphi(t), \varphi'(t)), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Una subsolución ψ se define de manera análoga dando vuelta la desigualdad.

Motivación

- Redes neuronales: oscilador de tipo Van der Pol

Motivación

- Redes neuronales: oscilador de tipo Van der Pol
- Sistemas con retardo:
  $x'(t) = f(t, x(t - \tau_1(t), \cdots, x(t - \tau_M(t))) - b(t)x(t)$

Motivación

- Redes neuronales: oscilador de tipo Van der Pol
- Sistemas con retardo:
  $x'(t) = f(t, x(t - \tau_1(t), \cdots, x(t - \tau_M(t))) - b(t)x(t)$
- Extender herramientas topológicas al espacio de las funciones casi periódicas.

$$BC = \{\text{funciones continuas y acotadas } p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$

con la norma $||p||_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |p(t)|$.

Casi periodicidad

$$BC = \{\text{funciones continuas y acotadas } p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$

con la norma $||p||_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |p(t)|$.

$$Per_T = \{\text{funciones continuas y } T\text{-periódicas}\}$$

Casi periodicidad

$$BC = \{\text{funciones continuas y acotadas } p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$

con la norma $||p||_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |p(t)|$.

$$Per_T = \{\text{funciones continuas y } T\text{-periódicas}\}$$

$$Per = \bigcup_{T>0} Per_T$$

Casi periodicidad

$$BC = \{\text{funciones continuas y acotadas } p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$

con la norma $||p||_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |p(t)|$.

$$Per_T = \{\text{funciones continuas y } T\text{-periódicas}\}$$

$$Per = \bigcup_{T>0} Per_T$$

$$Per \subset AP \subset BC$$

AP es el espacio de Banach más chico que satisface esta cadena.

Definición 1

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *se dice* **casi periódica**, *si dado* $\epsilon > 0$ *existe un polinomio trigonométrico* $T_\epsilon(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{i\lambda_k t}$, *tal que*

$$|f(t) - T_\epsilon(t)| < \epsilon, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$$

Definición 1

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *se dice* **casi periódica**, *si dado* $\epsilon > 0$ *existe un polinomio trigonométrico* $T_\epsilon(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{i\lambda_k t}$, *tal que*

$$|f(t) - T_\epsilon(t)| < \epsilon, \ \textit{para todo } t \in \mathbb{R}$$

Definición 2

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *se dice* **casi periódica**, *si de toda sucesión* $\{\alpha'_n\}$ *se puede extraer una subsucesión* $\{\alpha_n\}$ *tal que* $\lim_{n\to+\infty} f(t + \alpha_n)$ *existe uniformemente en la recta real.*

Definición 1

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *se dice* **casi periódica**, *si dado* $\epsilon > 0$ *existe un polinomio trigonométrico* $T_\epsilon(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{i\lambda_k t}$, *tal que*

$$|f(t) - T_\epsilon(t)| < \epsilon, \ \textit{para todo } t \in \mathbb{R}$$

Definición 2

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *se dice* **casi periódica**, *si de toda sucesión* $\{\alpha'_n\}$ *se puede extraer una subsucesión* $\{\alpha_n\}$ *tal que* $\lim_{n\to+\infty} f(t + \alpha_n)$ *existe uniformemente en la recta real.*

Definición 3(Bohr)

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *se dice* **casi periódica**, *si para cualquier* $\epsilon > 0$, *existe un número* $l(\epsilon) > 0$ *tal que cualquier intervalo de longitud* $l(\epsilon)$ *en la recta real contiene al menos un punto* ξ, *tal que*

$$|f(t + \xi) - f(t)| < \epsilon, \ \textit{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Es natural preguntarse bajo que condiciones podemos extender este método para asegurar la existencia de soluciones casi periódicas.

Es natural preguntarse bajo que condiciones podemos extender este método para asegurar la existencia de soluciones casi periódicas.

En general, para probar la existencia de soluciones T-periódicas se usan métodos topológicos, tales super y sub soluciones, teoría de punto fijo, grado de Leray-Schauder, o técnicas variacionales.

Es natural preguntarse bajo que condiciones podemos extender este método para asegurar la existencia de soluciones casi periódicas.

En general, para probar la existencia de soluciones T-periódicas se usan métodos topológicos, tales super y sub soluciones, teoría de punto fijo, grado de Leray-Schauder, o técnicas variacionales.

Estos métodos, usualmente fallan en el caso casi periódico debido a la falta de compacidad de los operadores no lineales asociados a la ecuación en el espacio de la funciones casi periódicas.

Falta de compacidad

Teorema

Una familia de funciones $\mathcal{F} \subset AP(\mathbb{R})$ es relativamente compacta si y sólo si se satisfacen las siguiente propiedades:

1. $\mathcal{F}$ *es equicontinua;*
2. $\forall t \in \mathbb{R}$ *el conjunto* $\{f(t) : f \in \mathcal{F}\}$ *es relativamente compacto en* $\mathbb{R}$*;*

Falta de compacidad

Teorema

Una familia de funciones $\mathcal{F} \subset AP(\mathbb{R})$ es relativamente compacta si y sólo si se satisfacen las siguiente propiedades:

1. $\mathcal{F}$ *es equicontinua;*
2. $\forall t \in \mathbb{R}$ *el conjunto* $\{f(t) : f \in \mathcal{F}\}$ *es relativamente compacto en* $\mathbb{R}$*;*
3. $\mathcal{F}$ *es equicasi periódica.*

Problema

Extender el método de super y sub soluciones al espacio AP para la ecuación:

$$u''(t) + cu'(t) = f(t, u(t)) \tag{2}$$

donde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Definición

Defimos que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *está en la clase u.a.p. si satisface:*

Definición

Defimos que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *está en la clase u.a.p. si satisface:*

- $f(\cdot, u) \in AP(\mathbb{R})$ *para cada* $u \in \mathbb{R}$.
- *Para cada* $M > 0$ *la familia de funciones* $\{f(t, \cdot)\}_{t \in \mathbb{R}}$ *es equicontinua en* $[-M, M]$.

Definición

Defimos que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está en la clase u.a.p. si satisface:

- $f(\cdot, u) \in AP(\mathbb{R})$ *para cada* $u \in \mathbb{R}$.
- *Para cada* $M > 0$ *la familia de funciones* $\{f(t, \cdot)\}_{t \in \mathbb{R}}$ *es equicontinua en* $[-M, M]$.

La pertenencia de f a esta clase, nos asegura que

$$u \in AP \Longrightarrow f(\cdot, u(\cdot)) \in AP$$

Resultados previos

$$u''(t) + cu'(t) = f(t, u(t)) \tag{3}$$

$$u''(t) + cu'(t) = f(t, u(t)) \tag{3}$$

Rafael Ortega y Massimo Tarallo. Caso $c > 0$.

Teorema (2003)

Existe $f \in u.a.p^{\infty}$ y constantes $c > 0$, $\alpha < \beta$, $\delta > 0$ tal que, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t, \alpha) \leq -\delta < 0 < \delta \leq f(t, \beta)$$

y la ecuación (4) no tiene soluciones casi periódicas.

Resultados previos

Teorema (2003)

Dado $\omega \notin \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ existe una función $G \in C(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R})$ y números $c > 0$, $\delta > 0$, $\alpha < \beta$ tal que, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$G(t, \omega t, \alpha) \leq -\delta < 0 < \delta \leq G(t, \omega t, \beta)$$

y la ecuación

$$u'' + cu' = G(t, \omega t, u)$$

no tiene soluciones casi periódicas.

$$u''(t) + cu'(t) = f(t, u(t)) \tag{4}$$

Klaus Schmitt y James R. Ward Jr. Caso $c = 0$

Teorema (1992)

Sea f uniformemente casi periódica en t y supongamos que existen $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ super y y sub soluciones de (4). Entonces, (4) tiene por lo menos una solución $u \in AP(\mathbb{R})$ tal que $\alpha \leq u \leq \beta$.

Existencia de solución casi periódica

Teorema

Sea $f(t,u)$ u.a.p. y supongamos que existe $\frac{\partial f}{\partial u}(t,u)$ y es uniformemente acotada en regiones del tipo $t \in \mathbb{R}$, $|u| \leq M$. Sean $\alpha \leq \beta$ super y sub soluciones casi periódicas de (1). Entonces (1) tiene al menos una solución $u \in AP(\mathbb{R})$ tal que $\alpha \leq u \leq \beta$.

Trabajo en proceso y futuro

1. Mostrar que el Lema usado por Schmitt y Ward es falso

Trabajo en proceso y futuro

1. Mostrar que el Lema usado por Schmitt y Ward es falso
2. Extender el resultado a ecuaciones del tipo
   $u'' = f(t, u(t), u(t-\tau_1(t)), \cdots, u(t-\tau_M(t)))$

¡Gracias por su atención!