

Los grafos estrella extendida: reconocimiento y propiedades estructurales

Pablo De Caria, Silvia Tondato y Marisa Gutierrez

CONICET/ Departamento de Matemática, Universidad
Nacional de La Plata

LXV Reunión Anual de Comunicaciones Científicas de la UMA,
Bahía Blanca, Septiembre de 2016

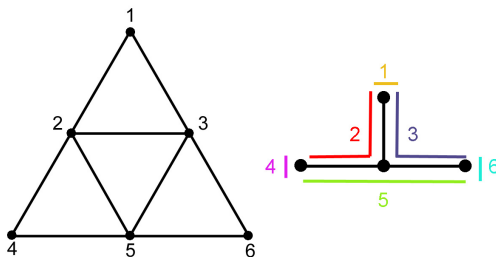
Definición

Un grafo G es una **estrella extendida** si es el grafo de intersección de una familia de subárboles de un árbol con a la sumo un vértice de grado mayor o igual que tres.

Definición

Un grafo G es una **estrella extendida** si es el grafo de intersección de una familia de subárboles de un árbol con a la sumo un vértice de grado mayor o igual que tres.

Todo grafo de intervalos es un grafo estrella extendida.



En general, los grafos de intersección de subárboles de un árbol son los grafos cordales.

Árbol clique

Un **árbol clique** de un grafo G es un árbol T cuyos vértices son los cliques (maximales) de G de modo que, para todo $v \in V(G)$, el conjunto $\mathcal{C}_v$ de cliques de G que contienen a v induce un subárbol de T .

En general, los grafos de intersección de subárboles de un árbol son los grafos cordales.

Árbol clique

Un **árbol clique** de un grafo G es un árbol T cuyos vértices son los cliques (maximales) de G de modo que, para todo $v \in V(G)$, el conjunto $\mathcal{C}_v$ de cliques de G que contienen a v induce un subárbol de T .

Redefinición

Un grafo es estrella extendida si posee un árbol clique con a lo sumo un vértice de grado mayor o igual que tres.

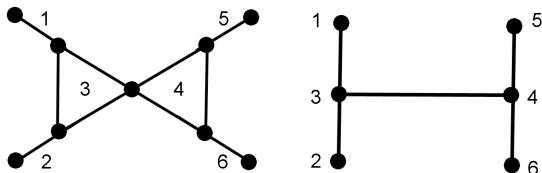
En general, los grafos de intersección de subárboles de un árbol son los grafos cordales.

Árbol clique

Un **árbol clique** de un grafo G es un árbol T cuyos vértices son los cliques (maximales) de G de modo que, para todo $v \in V(G)$, el conjunto $\mathcal{C}_v$ de cliques de G que contienen a v induce un subárbol de T .

Redefinición

Un grafo es estrella extendida si posee un árbol clique con a lo sumo un vértice de grado mayor o igual que tres.



Caracterización [Tondato, Gutierrez, 2015]

Una **tripla asteroidal** de un grafo G consiste en tres vértices u , v y w tales que para cualquiera dos de ellos existe un camino que los une que no tiene vecinos del tercero.

Caracterización [Tondato, Gutierrez, 2015]

Una **tripla asteroidal** de un grafo G consiste en tres vértices u, v y w tales que para cualquiera dos de ellos existe un camino que los une que no tiene vecinos del tercero.

Dos triplas asteroidales $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ están **fuertemente ligadas** si comparten a lo sumo un vértice y además se cumplen las dos siguientes condiciones:

- ▶ Todo camino entre a_i y b_j tiene vecinos en $N[a_3]$ y $N[b_3]$ para $i, j \in \{1, 2\}$.
- ▶ Dados dos separadores minimales S y M tales que $S \subseteq N[b_3]$ y $M \subseteq N[a_3]$, si a_1, a_2 están en diferentes componentes conexas de $G \setminus S$ y b_1, b_2 están en diferentes componentes conexas de $G \setminus M$, entonces no existe ningún clique Q en G tal que $M \cup S \subseteq Q$.

Caracterización [Tondato, Gutierrez, 2015]

Una **tripla asteroidal** de un grafo G consiste en tres vértices u, v y w tales que para cualquiera dos de ellos existe un camino que los une que no tiene vecinos del tercero.

Dos triplas asteroidales $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ están **fuertemente ligadas** si comparten a lo sumo un vértice y además se cumplen las dos siguientes condiciones:

- ▶ Todo camino entre a_i y b_j tiene vecinos en $N[a_3]$ y $N[b_3]$ para $i, j \in \{1, 2\}$.
- ▶ Dados dos separadores minimales S y M tales que $S \subseteq N[b_3]$ y $M \subseteq N[a_3]$, si a_1, a_2 están en diferentes componentes conexas de $G \setminus S$ y b_1, b_2 están en diferentes componentes conexas de $G \setminus M$, entonces no existe ningún clique Q en G tal que $M \cup S \subseteq Q$.

Teorema: Un grafo cordal es estrella extendida si y sólo si no posee un par de triplas asteroidales fuertemente ligadas.

Cliques centrales

Un clique de un grafo estrella extendida G se dice **central** si es un vértice de grado máximo de algún árbol clique en las condiciones de la definición de grafo estrella extendida.

Cliques centrales

Un clique de un grafo estrella extendida G se dice **central** si es un vértice de grado máximo de algún árbol clique en las condiciones de la definición de grafo estrella extendida.

Proposición

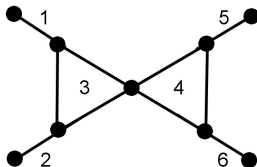
Un clique C de un grafo estrella extendida G es central si y sólo si, para toda componente conexa A de $G - C$, el grafo $G[A \cup C]$ es de intervalos.

Cliques centrales

Un clique de un grafo estrella extendida G se dice **central** si es un vértice de grado máximo de algún árbol clique en las condiciones de la definición de grafo estrella extendida.

Proposición

Un clique C de un grafo estrella extendida G es central si y sólo si, para toda componente conexas A de $G - C$, el grafo $G[A \cup C]$ es de intervalos.

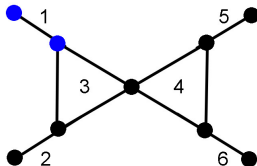


Cliques centrales

Un clique de un grafo estrella extendida G se dice **central** si es un vértice de grado máximo de algún árbol clique en las condiciones de la definición de grafo estrella extendida.

Proposición

Un clique C de un grafo estrella extendida G es central si y sólo si, para toda componente conexas A de $G - C$, el grafo $G[A \cup C]$ es de intervalos.

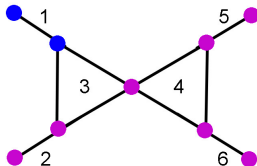


Cliques centrales

Un clique de un grafo estrella extendida G se dice **central** si es un vértice de grado máximo de algún árbol clique en las condiciones de la definición de grafo estrella extendida.

Proposición

Un clique C de un grafo estrella extendida G es central si y sólo si, para toda componente conexas A de $G - C$, el grafo $G[A \cup C]$ es de intervalos.

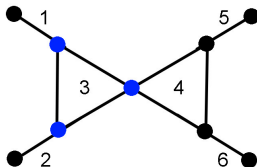


Cliques centrales

Un clique de un grafo estrella extendida G se dice **central** si es un vértice de grado máximo de algún árbol clique en las condiciones de la definición de grafo estrella extendida.

Proposición

Un clique C de un grafo estrella extendida G es central si y sólo si, para toda componente conexas A de $G - C$, el grafo $G[A \cup C]$ es de intervalos.

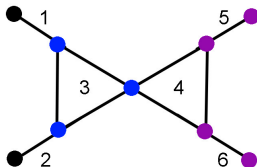


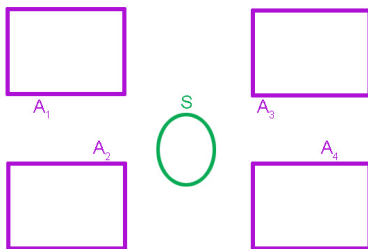
Cliques centrales

Un clique de un grafo estrella extendida G se dice **central** si es un vértice de grado máximo de algún árbol clique en las condiciones de la definición de grafo estrella extendida.

Proposición

Un clique C de un grafo estrella extendida G es central si y sólo si, para toda componente conexas A de $G - C$, el grafo $G[A \cup C]$ es de intervalos.



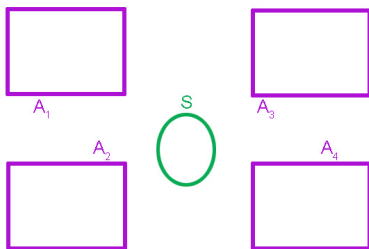


$$G_i = G[A_i \cup S]$$

$\mathcal{C}_i$: cliques de G que intersecan a A_i .

$$T_i = T[\mathcal{C}_i]$$

S_i : vértices de S que son vecinos de algún vértice en A_i .



$$G_i = G[A_i \cup S]$$

$\mathcal{C}_i$: cliques de G que intersecan a A_i .

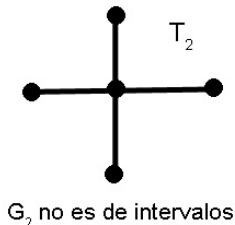
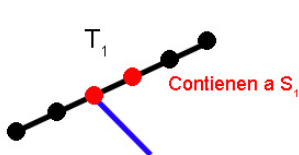
$$T_i = T[\mathcal{C}_i]$$

S_i : vértices de S que son vecinos de algún vértice en A_i .

Propiedad: Dado un árbol clique T de G , T_i es un subárbol para todo i . Si $C_1 C_2$ es una arista de T tal que $C_1 \in \mathcal{C}_i$ y $C_2 \notin \mathcal{C}_i$, entonces $S_i \subseteq C_1$.

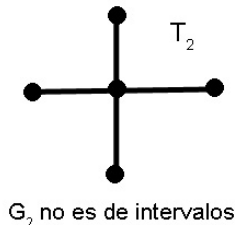
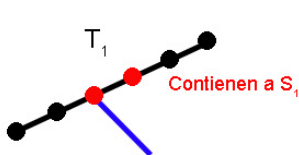
Proposición

La frase " G_i no es un grafo de intervalos o G_i es un grafo de intervalos tal que ningún árbol clique de G_i que es camino posee extremos que contengan a S_i " es verdadera para a lo sumo un i .



Proposición

La frase " G_i no es un grafo de intervalos o G_i es un grafo de intervalos tal que ningún árbol clique de G_i que es camino posee extremos que contengan a S_i " es verdadera para a lo sumo un i .



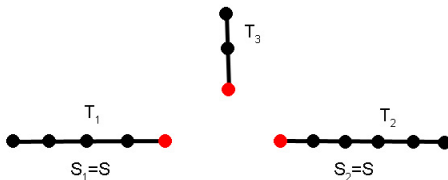
Un separador que ocasione una situación como la de la figura se lo llamará **delator**.

Proposición

Un grafo estrella extendida G posee más de un clique central si y sólo si existe un separador minimal S tal que todo G_i es un grafo de intervalos con un árbol clique que es un camino y posee un extremo que contiene a S_i .

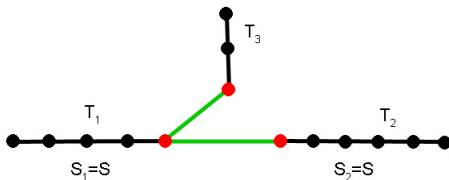
Proposición

Un grafo estrella extendida G posee más de un clique central si y sólo si existe un separador minimal S tal que todo G_i es un grafo de intervalos con un árbol clique que es un camino y posee un extremo que contiene a S_i .



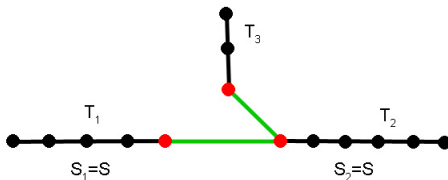
Proposición

Un grafo estrella extendida G posee más de un clique central si y sólo si existe un separador minimal S tal que todo G_i es un grafo de intervalos con un árbol clique que es un camino y posee un extremo que contiene a S_i .



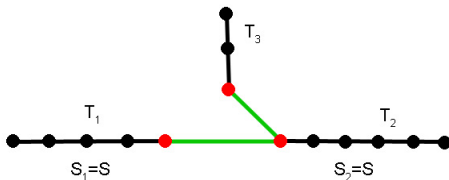
Proposición

Un grafo estrella extendida G posee más de un clique central si y sólo si existe un separador minimal S tal que todo G_i es un grafo de intervalos con un árbol clique que es un camino y posee un extremo que contiene a S_i .



Proposición

Un grafo estrella extendida G posee más de un clique central si y sólo si existe un separador minimal S tal que todo G_i es un grafo de intervalos con un árbol clique que es un camino y posee un extremo que contiene a S_i .



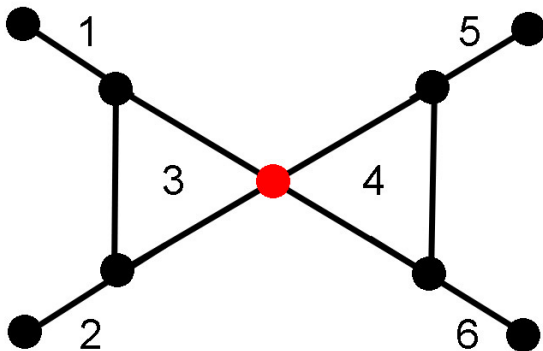
Recíprocamente, si C y C' son dos cliques centrales de G , tomar un árbol clique cualquiera de G y sea C_1C_2 una arista cuya que está entre C y C' . $C_1 \cap C_2$ es un separador minimal con las propiedades requeridas.

Teorema

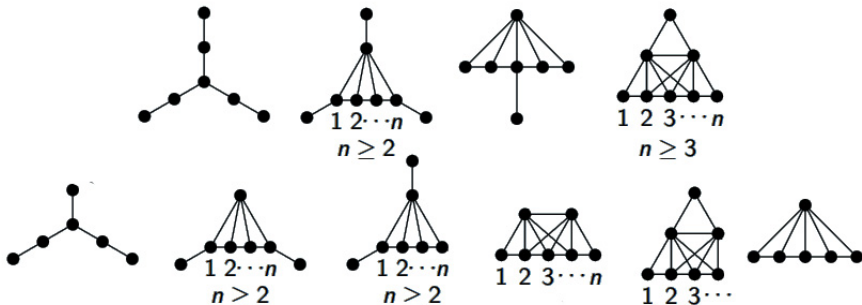
Un grafo cordal G es estrella extendida si y sólo si no posee un separador delator.

Teorema

Un grafo cordal G es estrella extendida si y sólo si no posee un separador delator.



Subgrafos prohibidos minimales

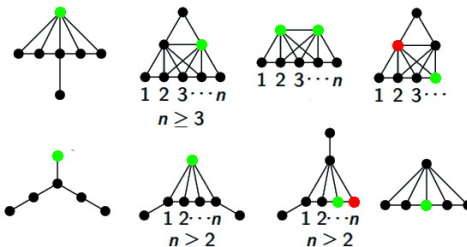


Primera subclase

Dos prohibidos minimales de intervalos sin aristas entre ellos.

Primera subclase

Dos prohibidos minimales de intervalos sin aristas entre ellos.



Segunda clase

Grafos obtenidos pegando dos bloques y fusionando los vértices coloreados.

Tercera clase

Dos bloques con un solo vértices coloreado cada uno, unidos por un camino corto.

Vértices rojos

S conjunto de vértices coloreados, v vértice rojo. $G - v$ es un grafo de intervalos sin un árbol clique que sea camino y con extremo en un clique que contiene a $S - v$.

No se pueden fusionar dos vértices rojos, de lo contrario $S - v$ sería un separador delator de $G - v$, contradiciendo la minimalidad.

Vértices rojos

S conjunto de vértices coloreados, v vértice rojo. $G - v$ es un grafo de intervalos sin un árbol clique que sea camino y con extremo en un clique que contiene a $S - v$.

No se pueden fusionar dos vértices rojos, de lo contrario $S - v$ sería un separador delator de $G - v$, contradiciendo la minimalidad.

Bloques más elaborados

Se pueden añadir vértices que no cambien el número de cliques y de árboles clique que poseía el bloque original.



VII
Latin
American
Workshop on
Cliques in
Graphs

7

LAWCG

November 8-11, 2016
La Plata, Argentina

Confirmed Speakers

Guillermo Durán
Universidad de Buenos Aires - Argentina

Martin Milanič
Univerza na Primorskem - Slovenija

Michel Habib
Université Paris Diderot - France

Fabio Protti
Universidade Federal Fluminense - Brazil

Bernardo Llano
Universidad Autónoma Metropolitana - México

Maya Stein
Universidad de Chile - Chile

General Chairs

Organizing Committee

Liliana Alcón
Marisa Gutiérrez
Universidad Nacional de La Plata - Argentina

Pablo De Caria
Blas Fernández
Noemí Gudiño
Gabriela Ravenna
Maria Pía Mazzoleni
Silvia Tondato

Feel free to visit the website for more information.



Pablo De Caria, Silvia Tondato y Marisa Gutierrez

Los grafos estrella extendida: reconocimiento y propiedades estructurales