Los grafos de Kneser estables, conjeturas y particularidades

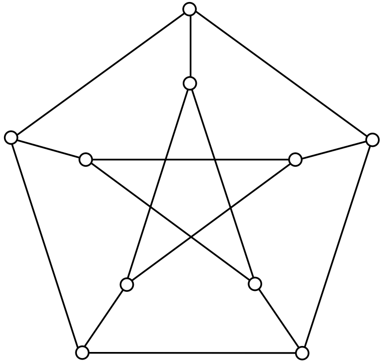
Pablo Torres

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura - Universidad Nacional de Rosario

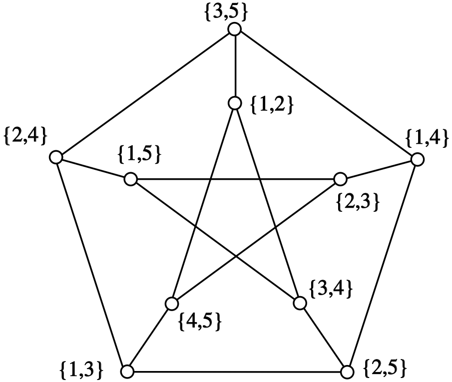
CONICET

Reunión anual UMA 2016, Bahía Blanca.

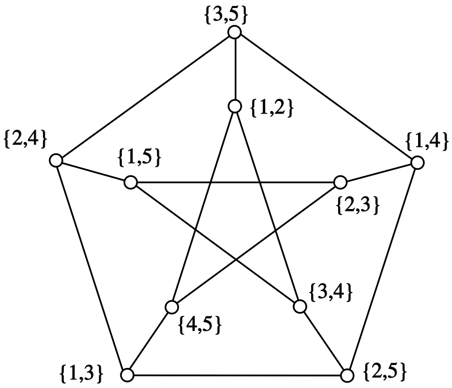
Grafo de Petersen



GRAFO DE PETERSEN



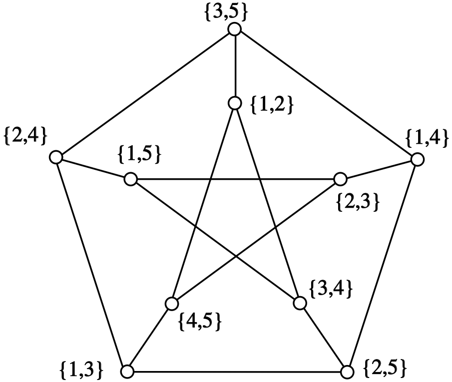
Grafo de Petersen



$$[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$[5]^2 = \{S \subset [5] : \ |S| = 2\},$$

Grafo de Petersen

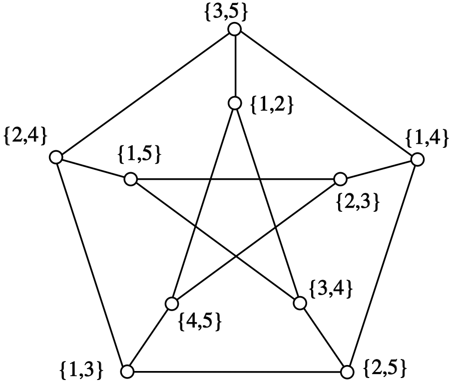


$[5] = \{1,2,3,4,5\}$,

$[5]^2 = \{S \subset [5] : \ |S| = 2\}$,

grafo con conjunto de vértices $[5]^2$ y aristas entre vértices disjuntos.

Grafo de Petersen



$[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$[5]^2 = \{S \subset [5] : \ |S| = 2\}$,

$KG(5,2)$: grafo con conjunto de vértices $[5]^2$ y aristas entre vértices disjuntos.

Grafos de Kneser

$n \geq k$, $[n] = \{1, \ldots, n\}$, $[n]^k = \{S \subseteq [n] : \; |S| = k\}$,

Grafos de Kneser

$n \geq k$, $[n] = \{1, \ldots, n\}$, $[n]^k = \{S \subseteq [n] : \ |S| = k\}$,

El Grafo de Kneser $KG(n,k)$ tiene como conjunto de vértices $[n]^k$ y aristas entre vértices disjuntos.

Grafos de Kneser

$n \geq k$, $[n] = \{1, \ldots, n\}$, $[n]^k = \{S \subseteq [n] : \ |S| = k\}$,

El Grafo de Kneser $KG(n, k)$ tiene como conjunto de vértices $[n]^k$ y aristas entre vértices disjuntos.

- $KG(n, 1) \approx K_n$.

Grafos de Kneser

$n \geq k$, $[n] = \{1, \ldots, n\}$, $[n]^k = \{S \subseteq [n] : \ |S| = k\}$,

El Grafo de Kneser $KG(n,k)$ tiene como conjunto de vértices $[n]^k$ y aristas entre vértices disjuntos.

- $KG(n,1) \approx K_n$.
- $KG(2k,k)$ es unión disjunta de $\frac{1}{2}\binom{2k}{2}$ grafos K_2.

Grafos de Kneser

$n \geq k$, $[n] = \{1, \ldots, n\}$, $[n]^k = \{S \subseteq [n] : \ |S| = k\}$,

El Grafo de Kneser $KG(n,k)$ tiene como conjunto de vértices $[n]^k$ y aristas entre vértices disjuntos.

- $KG(n,1) \approx K_n$.
- $KG(2k,k)$ es unión disjunta de $\frac{1}{2}\binom{2k}{2}$ grafos K_2.
- $KG(n,k)$ es r-regular, con $r = \binom{n-k}{k}$.

Grafos de Kneser

$n \geq k$, $[n] = \{1, \ldots, n\}$, $[n]^k = \{S \subseteq [n] : \; |S| = k\}$,

El Grafo de Kneser $KG(n,k)$ tiene como conjunto de vértices $[n]^k$ y aristas entre vértices disjuntos.

- $KG(n,1) \approx K_n$.
- $KG(2k,k)$ es unión disjunta de $\frac{1}{2}\binom{2k}{2}$ grafos K_2.
- $KG(n,k)$ es r-regular, con $r = \binom{n-k}{k}$.
- $\omega(KG(n,k)) = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$.

Grafos de Kneser

$n \geq k$, $[n] = \{1, \ldots, n\}$, $[n]^k = \{S \subseteq [n] : \; |S| = k\}$,

El Grafo de Kneser $KG(n,k)$ tiene como conjunto de vértices $[n]^k$ y aristas entre vértices disjuntos.

- $KG(n,1) \approx K_n$.
- $KG(2k,k)$ es unión disjunta de $\frac{1}{2}\binom{2k}{2}$ grafos K_2.
- $KG(n,k)$ es r-regular, con $r = \binom{n-k}{k}$.
- $\omega(KG(n,k)) = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$.
- $\alpha(KG(n,k)) = \binom{n-1}{k-1}$ [*Teorema de Erdős, Ko, Rado (1961)*].

Grafos de Kneser

$n \geq k$, $[n] = \{1, \ldots, n\}$, $[n]^k = \{S \subseteq [n] : \ |S| = k\}$,

El Grafo de Kneser $KG(n,k)$ tiene como conjunto de vértices $[n]^k$ y aristas entre vértices disjuntos.

- $KG(n,1) \approx K_n$.
- $KG(2k,k)$ es unión disjunta de $\frac{1}{2}\binom{2k}{2}$ grafos K_2.
- $KG(n,k)$ es r-regular, con $r = \binom{n-k}{k}$.
- $\omega(KG(n,k)) = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$.
- $\alpha(KG(n,k)) = \binom{n-1}{k-1}$ [*Teorema de Erdős, Ko, Rado (1961)*].
- $\chi(KG(n,k))$

Grafos de Kneser

$n \geq k$, $[n] = \{1, \ldots, n\}$, $[n]^k = \{S \subseteq [n] : \ |S| = k\}$,

El Grafo de Kneser $KG(n,k)$ tiene como conjunto de vértices $[n]^k$ y aristas entre vértices disjuntos.

- $KG(n,1) \approx K_n$.
- $KG(2k,k)$ es unión disjunta de $\frac{1}{2}\binom{2k}{2}$ grafos K_2.
- $KG(n,k)$ es r-regular, con $r = \binom{n-k}{k}$.
- $\omega(KG(n,k)) = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$.
- $\alpha(KG(n,k)) = \binom{n-1}{k-1}$ [*Teorema de Erdős, Ko, Rado (1961)*].
- $\chi(KG(n,k))$

  $r = 1, \ldots, n-2k+1 \ \longrightarrow \ I_r = \{S \in [n]^k : \ min(S) = r\}$,

  $I_{n-2k+2} = \{S \in [n]^k : \ min(S) \geq n-2k+2\}$.

Grafos de Kneser

$n \geq k$, $[n] = \{1, \dots, n\}$, $[n]^k = \{S \subseteq [n] : \ |S| = k\}$,

El Grafo de Kneser $KG(n,k)$ tiene como conjunto de vértices $[n]^k$ y aristas entre vértices disjuntos.

- $KG(n,1) \approx K_n$.
- $KG(2k,k)$ es unión disjunta de $\frac{1}{2}\binom{2k}{2}$ grafos K_2.
- $KG(n,k)$ es r-regular, con $r = \binom{n-k}{k}$.
- $\omega(KG(n,k)) = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$.
- $\alpha(KG(n,k)) = \binom{n-1}{k-1}$ [*Teorema de Erdős, Ko, Rado (1961)*].
- $\chi(KG(n,k)) \leq n - 2k + 2.$

  $r = 1, \dots, n-2k+1 \ \longrightarrow \ I_r = \{S \in [n]^k : \ min(S) = r\},$

  $I_{n-2k+2} = \{S \in [n]^k : \ min(S) \geq n-2k+2\}.$

Grafos de Kneser

Conjetura (Martin Kneser, 1955): *Si* $[n]^k$ *se particiona en* $n-2k+1$ *familias, al menos una de ellas contiene dos conjuntos disjuntos*

Grafos de Kneser

Conjetura (Martin Kneser, 1955): *Si* $[n]^k$ *se particiona en* $n-2k+1$ *familias, al menos una de ellas contiene dos conjuntos disjuntos* $\leftrightarrow$ $\chi(KG(n,k)) \geq n-2k+2$.

Grafos de Kneser

Conjetura (Martin Kneser, 1955): *Si $[n]^k$ se particiona en $n-2k+1$ familias, al menos una de ellas contiene dos conjuntos disjuntos* $\leftrightarrow$ $\chi(KG(n,k)) \geq n-2k+2$.

Lovász, 1978: Definición de los grafos de Kneser y prueba de la conjetura.

$\chi(KG(n,k)) = n-2k+2$.

Grafos de Kneser

Conjetura (Martin Kneser, 1955): *Si* $[n]^k$ *se particiona en* $n-2k+1$ *familias, al menos una de ellas contiene dos conjuntos disjuntos* $\leftrightarrow \ \chi(KG(n,k)) \geq n-2k+2$.

Lovász, 1978: Definición de los grafos de Kneser y prueba de la conjetura.

$\chi(KG(n,k)) = n-2k+2$.

¿Los grafos de Kneser son color crítico?

Grafos de Kneser estables

$S \subset [n]$ es 2-estable si $2 \leq |i-j| \leq n-2$ para todo par $i, j \in S$.

Grafos de Kneser estables

$S \subset [n]$ es 2-estable si $2 \leq |i - j| \leq n - 2$ para todo par $i, j \in S$.

$[n]_2^k = \{S \in [n]^k : \ S$ es 2-estable$\}$

Grafos de Kneser estables

$S \subset [n]$ es 2-estable si $2 \leq |i-j| \leq n-2$ para todo par $i,j \in S$.

$[n]_2^k = \{S \in [n]^k : \text{ } S \text{ es 2-estable}\}$

$KG(n,k)_2$: subgrafo de $KG(n,k)$ inducido por $[n]_2^k$.

Grafos de Kneser estables

$S \subset [n]$ es 2-estable si $2 \leq |i-j| \leq n-2$ para todo par $i,j \in S$.

$[n]_2^k = \{S \in [n]^k :\ S$ es 2-estable$\}$

$KG(n,k)_2$: subgrafo de $KG(n,k)$ inducido por $[n]_2^k$.

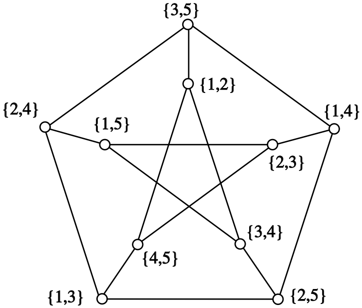


Figura : $KG(5,2)$

Grafos de Kneser estables

$S \subset [n]$ es 2-estable si $2 \leq |i-j| \leq n-2$ para todo par $i,j \in S$.

$[n]_2^k = \{S \in [n]^k : \ S$ es 2-estable$\}$

$KG(n,k)_2$: subgrafo de $KG(n,k)$ inducido por $[n]_2^k$.

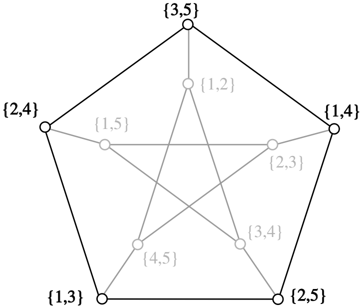


Figura : $KG(5,2)_2$

Grafos de Kneser estables

$S \subset [n]$ es 2-estable si $2 \leq |i-j| \leq n-2$ para todo par $i,j \in S$.

$[n]_2^k = \{S \in [n]^k : \ S$ es 2-estable$\}$

$KG(n,k)_2$: subgrafo de $KG(n,k)$ inducido por $[n]_2^k$.

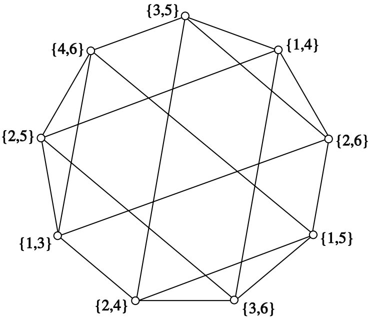


Figura : $KG(6,2)_2$

Grafos de Kneser estables

$S \subset [n]$ es 2-estable si $2 \leq |i-j| \leq n-2$ para todo par $i,j \in S$.

$[n]_2^k = \{S \in [n]^k : \ S \text{ es 2-estable}\}$

$KG(n,k)_2$: subgrafo de $KG(n,k)$ inducido por $[n]_2^k$.

Schrijver (1978):

- $\chi(KG(n,k)_2) = \chi(KG(n,k)) = n-2k+2$.
- $KG(n,k)_2$ es color crítico.

Grafos de Kneser estables

$S \subset [n]$ es 2-estable si $2 \leq |i-j| \leq n-2$ para todo par $i,j \in S$.

$[n]_2^k = \{S \in [n]^k : \; S \text{ es 2-estable}\}$

$KG(n,k)_2$: subgrafo de $KG(n,k)$ inducido por $[n]_2^k$.

Schrijver (1978):

- $\chi(KG(n,k)_2) = \chi(KG(n,k)) = n-2k+2$.
- $KG(n,k)_2$ es color crítico.

$KG(n,k)_2$: Grafos de Schrijver.

Grafos de Kneser estables

Generalización: Grafos de Kneser s-estables [Alon et al., 2009]

$S \subset [n]$ es s-estable si $s \leq |i-j| \leq n-s$.

Grafos de Kneser estables

Generalización: Grafos de Kneser s-estables [Alon et al., 2009]

$S \subset [n]$ es s-estable si $s \leq |i-j| \leq n-s$.

$[n]^k_s$: familia de k-subconjuntos s-estables.

Grafos de Kneser estables

Generalización: Grafos de Kneser s-estables [Alon et al., 2009]

$S \subset [n]$ es s-estable si $s \leq |i-j| \leq n-s$.

$[n]^k_s$: familia de k-subconjuntos s-estables.

$KG(n,k)_s$: subgrafo de $KG(n,k)$ inducido por $[n]^k_s$.

Grafos de Kneser estables

Generalización: Grafos de Kneser s-estables [Alon et al., 2009]

$S \subset [n]$ es s-estable si $s \leq |i-j| \leq n-s$.

$[n]^k_s$: familia de k-subconjuntos s-estables.

$KG(n,k)_s$: subgrafo de $KG(n,k)$ inducido por $[n]^k_s$.

Grafos de Kneser estables

Generalización: Grafos de Kneser s-estables [Alon et al., 2009]

$S \subset [n]$ es s-estable si $s \leq |i-j| \leq n-s$.

$[n]^k_s$: familia de k-subconjuntos s-estables.

$KG(n,k)_s$: subgrafo de $KG(n,k)$ inducido por $[n]^k_s$.

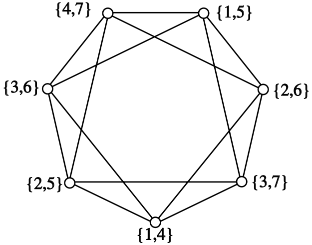


Figura : $KG(7,2)_3$

Grafos de Kneser estables

Generalización: Grafos de Kneser s-estables [Alon et al., 2009]

$S \subset [n]$ es s-estable si $s \leq |i-j| \leq n-s$.

$[n]_s^k$: familia de k-subconjuntos s-estables.

$KG(n,k)_s$: subgrafo de $KG(n,k)$ inducido por $[n]_s^k$.

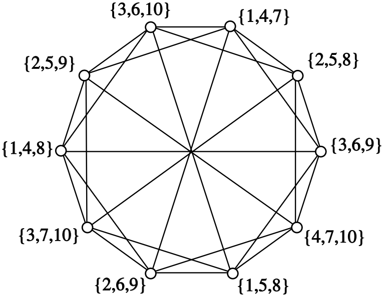


Figura : $KG(10,3)_3$

Grafos de Kneser estables

Conjetura [Meunier, 2011]: $\chi(KG(n,k)_s) = n - s(k-1)$.

Grafos de Kneser estables

Conjetura [Meunier, 2011]: $\chi(KG(n,k)_s) = n - s(k-1)$.

- $\chi(KG(n,k)_s) \leq n - s(k-1)$ [Meunier, 2011].

Grafos de Kneser estables

Conjetura [Meunier, 2011]: $\chi(KG(n,k)_s) = n - s(k-1)$.

- $\chi(KG(n,k)_s) \leq n - s(k-1)$ [Meunier, 2011].
- $s = 2 \;\rightarrow\; \chi(KG(n,k)_2) = n - 2k + 2$.

Grafos de Kneser estables

Conjetura [Meunier, 2011]: $\chi(KG(n,k)_s) = n - s(k-1)$.

- $\chi(KG(n,k)_s) \leq n - s(k-1)$ [Meunier, 2011].
- $s = 2 \; \rightarrow \; \chi(KG(n,k)_2) = n - 2k + 2$.
- $\chi(KG(ks+1,k)_s) = s + 1$ [Meunier, 2011].

Grafos de Kneser estables

Conjetura [Meunier, 2011]: $\chi(KG(n,k)_s) = n - s(k-1)$.

- $\chi(KG(n,k)_s) \leq n - s(k-1)$ [Meunier, 2011].
- $s = 2 \ \rightarrow \ \chi(KG(n,k)_2) = n - 2k + 2$.
- $\chi(KG(ks+1,k)_s) = s + 1$ [Meunier, 2011].
- $s \geq 4$, $k \geq 2$, la conjetura es válida para n suficientemente grande [Jonsson, 2012].

Grafos de Kneser estables

Conjetura [Meunier, 2011]: $\chi(KG(n,k)_s) = n - s(k-1)$.

- $\chi(KG(n,k)_s) \leq n - s(k-1)$ [Meunier, 2011].
- $s = 2 \;\rightarrow\; \chi(KG(n,k)_2) = n - 2k + 2$.
- $\chi(KG(ks+1,k)_s) = s + 1$ [Meunier, 2011].
- $s \geq 4$, $k \geq 2$, la conjetura es válida para n suficientemente grande [Jonsson, 2012].
- $\chi(KG(2s+2,2)_s) = s + 2$ y $KG(2s+2,2)_s$ no son color crítico [M. Valencia, T., 2016].

Grafos de Kneser estables

Conjetura [Meunier, 2011]: $\chi(KG(n,k)_s) = n - s(k-1)$.

- $\chi(KG(n,k)_s) \leq n - s(k-1)$ [Meunier, 2011].
- $s = 2 \rightarrow \chi(KG(n,k)_2) = n - 2k + 2$.
- $\chi(KG(ks+1,k)_s) = s+1$ [Meunier, 2011].
- $s \geq 4$, $k \geq 2$, la conjetura es válida para n suficientemente grande [Jonsson, 2012].
- $\chi(KG(2s+2,2)_s) = s+2$ y $KG(2s+2,2)_s$ no son color crítico [M. Valencia, T., 2016].
- $n \leq 9$, $k = 2$, $s = 3$.
  $n \leq 10$, $k = 2$, $s = 4$.
  $n \leq 11$, $k = 3$, $s = 3$.
  $n \leq 13$, $k = 3$, $s = 4$.
  $n \leq 14$, $k = 4$, $s = 3$.
  $n \leq 17$, $k = 4$, $s = 4$.

Homomorfismos de grafos

Sean G y H dos grafos. Una función $\phi : V(G) \mapsto V(H)$ es un homomorfismo de G en H ($G \to H$) si preserva adyacencias, i.e. si para toda arista uv de G, $\phi(u)\phi(v)$ es arista de H.

Homomorfismos de grafos

Sean G y H dos grafos. Una función $\phi : V(G) \mapsto V(H)$ es un homomorfismo de G en H ($G \to H$) si preserva adyacencias, i.e. si para toda arista uv de G, $\phi(u)\phi(v)$ es arista de H.

- Si $G' \subseteq G$, $G' \to G$.
- Si $G \to H$ entonces $\omega(G) \leq \omega(H)$.
- Si ϕ homomorfismo de G en H entonces para todo estable I de H, $\phi^{-1}(I)$ es un estable de G.
- Una función $\phi : V(G) \to V(H)$ es un homomorfismo si y solo si $\phi^{-1}(I)$ es un estable de G para todo estable I de H.
- Si $G \to H$ y $H \to W$ entonces $G \to W$.

Homomorfismos de grafos

Sean G y H dos grafos. Una función $\phi : V(G) \mapsto V(H)$ es un homomorfismo de G en H ($G \to H$) si preserva adyacencias, i.e. si para toda arista uv de G, $\phi(u)\phi(v)$ es arista de H.

- Si $G' \subseteq G$, $G' \to G$.
- Si $G \to H$ entonces $\omega(G) \leq \omega(H)$.
- Si ϕ homomorfismo de G en H entonces para todo estable I de H, $\phi^{-1}(I)$ es un estable de G.
- Una función $\phi : V(G) \to V(H)$ es un homomorfismo si y solo si $\phi^{-1}(I)$ es un estable de G para todo estable I de H.
- Si $G \to H$ y $H \to W$ entonces $G \to W$.
- $G \to K_2$, para todo G bipartito.

Homomorfismos de grafos

- G es k-coloreable $\Leftrightarrow$ $G \to K_k$.

Homomorfismos de grafos

- G es k-coloreable $\Leftrightarrow$ $G \to K_k$.

- $\chi(G) = min\{k : G \to K_k\}$.

Homomorfismos de grafos

- G es k-coloreable $\Leftrightarrow$ $G \to K_k$.

- $\chi(G) = min\{k : G \to K_k\}$.

- Si $G \to H$ entonces $\chi(G) \leq \chi(H)$.

Homomorfismos de grafos

- $KG(n,k) \to KG(n-2,k-1)$.

$$\phi(A) = \begin{cases} A \setminus \max(A) & \text{si } |\{n-1,n\} \cap A| \leq 1, \\ (A \setminus \{n-1,n\}) \cup \max(\overline{A}) & \text{si } \{n-1,n\} \subseteq A. \end{cases}$$

Homomorfismos de grafos

- $KG(n,k) \to KG(n-2,k-1)$.

$$\phi(A) = \begin{cases} A \setminus \text{máx}(A) & \text{si } |\{n-1,n\} \cap A| \leq 1, \\ (A \setminus \{n-1,n\}) \cup \text{máx}(\overline{A}) & \text{si } \{n-1,n\} \subseteq A. \end{cases}$$

$KG(n,k) \to K(n-2,k-1)$

Homomorfismos de grafos

- $KG(n,k) \to KG(n-2,k-1)$.

$$\phi(A) = \begin{cases} A \setminus \text{máx}(A) & \text{si } |\{n-1,n\} \cap A| \leq 1, \\ (A \setminus \{n-1,n\}) \cup \text{máx}(\overline{A}) & \text{si } \{n-1,n\} \subseteq A. \end{cases}$$

$$KG(n,k) \to K(n-2,k-1) \to K(n-4,k-2) \dots$$

Homomorfismos de grafos

- $KG(n,k) \to KG(n-2,k-1)$.

$$\phi(A) = \begin{cases} A \setminus \text{máx}(A) & \text{si } |\{n-1,n\} \cap A| \leq 1, \\ (A \setminus \{n-1,n\}) \cup \text{máx}(\overline{A}) & \text{si } \{n-1,n\} \subseteq A. \end{cases}$$

$$KG(n,k) \to K(n-2,k-1) \to K(n-4,k-2) \ldots \to$$

HOMOMORFISMOS DE GRAFOS

- $KG(n,k) \to KG(n-2,k-1)$.

$$\phi(A) = \begin{cases} A \setminus \text{máx}(A) & \text{si } |\{n-1,n\} \cap A| \leq 1, \\ (A \setminus \{n-1,n\}) \cup \text{máx}(\overline{A}) & \text{si } \{n-1,n\} \subseteq A. \end{cases}$$

$KG(n,k) \to K(n-2,k-1) \to K(n-4,k-2) \ldots \to K(n-2k+2,1)$.

HOMOMORFISMOS DE GRAFOS

- $KG(n,k) \to KG(n-2,k-1)$.

$$\phi(A) = \begin{cases} A \setminus \text{máx}(A) & \text{si } |\{n-1,n\} \cap A| \leq 1, \\ (A \setminus \{n-1,n\}) \cup \text{máx}(\overline{A}) & \text{si } \{n-1,n\} \subseteq A. \end{cases}$$

$KG(n,k) \to K(n-2,k-1) \to K(n-4,k-2) \ldots \to K(n-2k+2,1)$.

$KG(n-2k+2,1) \approx K_{n-2k+2}$.

Homomorfismos de grafos

- $KG(n,k) \to KG(n-2,k-1)$.

$$\phi(A) = \begin{cases} A \setminus \text{máx}(A) & \text{si } |\{n-1,n\} \cap A| \leq 1, \\ (A \setminus \{n-1,n\}) \cup \text{máx}(\overline{A}) & \text{si } \{n-1,n\} \subseteq A. \end{cases}$$

$KG(n,k) \to K(n-2,k-1) \to K(n-4,k-2) \ldots \to K(n-2k+2,1)$.

$KG(n-2k+2,1) \approx K_{n-2k+2}$.

$K(n,k) \to K_{n-2k+2}$.

Homomorfismos de grafos

- $KG(n,k) \to KG(n-2,k-1)$.

$$\phi(A) = \begin{cases} A \setminus \text{máx}(A) & \text{si } |\{n-1,n\} \cap A| \leq 1, \\ (A \setminus \{n-1,n\}) \cup \text{máx}(\overline{A}) & \text{si } \{n-1,n\} \subseteq A. \end{cases}$$

$KG(n,k) \to K(n-2,k-1) \to K(n-4,k-2) \ldots \to K(n-2k+2,1)$.

$KG(n-2k+2,1) \approx K_{n-2k+2}$.

$K(n,k) \to K_{n-2k+2}$.

$\chi(K(n,k)) \leq n-2k+2$.

r-UPLA COLOREO

Un r-upla coloreo de un grafo G es una asignación de r colores a cada vértice de forma tal que vértices adyacentes reciban conjuntos de r colores disjuntos.

r-UPLA COLOREO

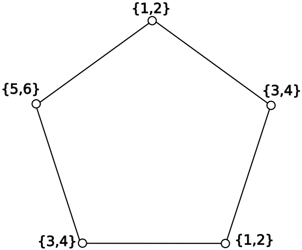
Un r-upla coloreo de un grafo G es una asignación de r colores a cada vértice de forma tal que vértices adyacentes reciban conjuntos de r colores disjuntos.

$\chi_r(G)$: número r-upla cromático.

r-UPLA COLOREO

Un r-upla coloreo de un grafo G es una asignación de r colores a cada vértice de forma tal que vértices adyacentes reciban conjuntos de r colores disjuntos.

$\chi_r(G)$: número r-upla cromático.

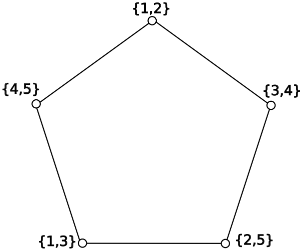


- $\chi_r(G) \leq r \cdot \chi(G)$.

r-UPLA COLOREO

Un r-upla coloreo de un grafo G es una asignación de r colores a cada vértice de forma tal que vértices adyacentes reciban conjuntos de r colores disjuntos.

$\chi_r(G)$: número r-upla cromático.

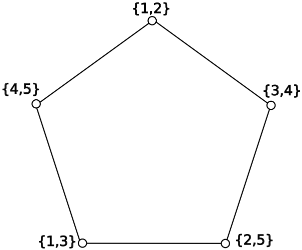


- $\chi_r(G) \leq r \cdot \chi(G)$.

r-UPLA COLOREO

Un r-upla coloreo de un grafo G es una asignación de r colores a cada vértice de forma tal que vértices adyacentes reciban conjuntos de r colores disjuntos.

$\chi_r(G)$: número r-upla cromático.

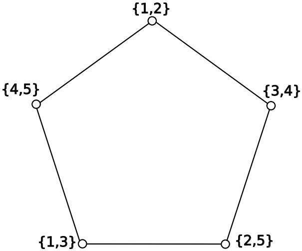


- $\chi_2(C_5) = 5$.

r-UPLA COLOREO

Un r-upla coloreo de un grafo G es una asignación de r colores a cada vértice de forma tal que vértices adyacentes reciban conjuntos de r colores disjuntos.

$\chi_r(G)$: número r-upla cromático.

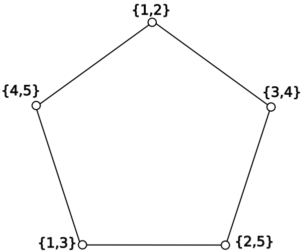


- G tiene un r-upla coloreo con t colores $\Leftrightarrow$ $G \to KG(t,r)$.

r-UPLA COLOREO

Un r-upla coloreo de un grafo G es una asignación de r colores a cada vértice de forma tal que vértices adyacentes reciban conjuntos de r colores disjuntos.

$\chi_r(G)$: número r-upla cromático.

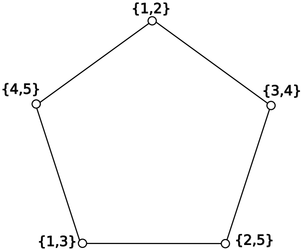


- G tiene un r-upla coloreo con t colores $\Leftrightarrow$ $G \to KG(t,r)$.
- ¿$\chi_r(KG(n,k))$?

r-UPLA COLOREO

Un r-upla coloreo de un grafo G es una asignación de r colores a cada vértice de forma tal que vértices adyacentes reciban conjuntos de r colores disjuntos.

$\chi_r(G)$: número r-upla cromático.



- G tiene un r-upla coloreo con t colores $\Leftrightarrow$ $G \to KG(t,r)$.
- ¿$\chi_r(KG(n,k))$?
- Mínimo t tal que $KG(n,k) \to KG(t,r)$.

r-UPLA COLOREO DE GRAFOS DE KNESER

- $1 \leq r \leq k$, $\chi_r(KG(n,k)) = n - 2(k-r)$.
- $\chi_r(KG(2k+1,k)) = 2k+1+\lfloor \frac{r-1}{k} \rfloor$.
- $\chi_{rk}(KG(n,k)) = rn$.

r-UPLA COLOREO DE GRAFOS DE KNESER

- $1 \leq r \leq k$, $\chi_r(KG(n,k)) = n - 2(k-r)$.
- $\chi_r(KG(2k+1,k)) = 2k+1+\lfloor \frac{r-1}{k} \rfloor$.
- $\chi_{rk}(KG(n,k)) = rn$.

Conjetura [Stahl, 1976]: Si $r = qk - p$, $q \geq 1$, $0 \leq p < k$, entonces $\chi_r(KG(n,k)) = qn - 2p$.

r-UPLA COLOREO DE GRAFOS DE KNESER

$\chi(G\Box H) = \text{máx}\{\chi(G), \chi(H)\}$.

r-upla coloreo de grafos de Kneser

$\chi(G\square H) = \text{máx}\{\chi(G), \chi(H)\}$.

¿$\chi_r(G\square H) = \text{máx}\{\chi_r(G), \chi_r(H)\}$?

r-UPLA COLOREO DE GRAFOS DE KNESER

$\chi(G\square H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$.

¿$\chi_r(G\square H) = \max\{\chi_r(G), \chi_r(H)\}$?

$t \geq 2r$ tal que $G\square H \to KG(t, r)$.

r-UPLA COLOREO DE GRAFOS DE KNESER

$\chi(G\Box H) = \text{máx}\{\chi(G), \chi(H)\}$.

¿$\chi_r(G\Box H) = \text{máx}\{\chi_r(G), \chi_r(H)\}$?

$t \geq 2r$ tal que $G\Box H \to KG(t,r)$.

$n > 2k$, $KG(n,k)\Box KG(n,k) \nrightarrow KG(n,k)$, [Larose et al.,1998]

r-UPLA COLOREO DE GRAFOS DE KNESER

$\chi(G\Box H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$.

¿$\chi_r(G\Box H) = \max\{\chi_r(G), \chi_r(H)\}$? No.

$t \geq 2r$ tal que $G\Box H \to KG(t,r)$.

$n > 2k$, $KG(n,k)\Box KG(n,k) \nrightarrow KG(n,k)$, [Larose et al.,1998]

r-UPLA COLOREO DE GRAFOS DE KNESER

$\chi(G\square H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$.

¿$\chi_r(G\square H) = \max\{\chi_r(G), \chi_r(H)\}$? No.

$t \geq 2r$ tal que $G\square H \to KG(t,r)$.

$n > 2k$, $KG(n,k)\square KG(n,k) \nrightarrow KG(n,k)$, [Larose et al.,1998]

$\chi_2(KG(2s+4,2)^2) - \chi_2(KG(2s+4,2))$ no es acotado, [Bonomo, Koch, Valencia, T., 2015]

Hom-idempotencia de grafos de Kneser estables

G es hom-idempotente si $G^2 = G \square G \to G$.

Hom-idempotencia de grafos de Kneser estables

G es hom-idempotente si $G^2 = G \square G \to G$.

G es débil hom-idempotente si existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $G^{n+1} \to G^n$.

Hom-idempotencia de grafos de Kneser estables

G es hom-idempotente si $G^2 = G \square G \to G$.

G es débil hom-idempotente si existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $G^{n+1} \to G^n$.

- Los grafos de Kneser no son débil hom-idempotente, [Larose et al., 1998].

HOM-IDEMPOTENCIA DE GRAFOS DE KNESER ESTABLES

G es hom-idempotente si $G^2 = G \square G \to G$.

G es débil hom-idempotente si existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $G^{n+1} \to G^n$.

- Los grafos de Kneser no son débil hom-idempotente, [Larose et al., 1998].

- Si $n \geq 2k+2$ y $k \geq 2$ los grafos de Schijver no son débil hom-idempotente, [Valencia, T., 2015].

Hom-idempotencia de grafos de Kneser estables

G es hom-idempotente si $G^2 = G \Box G \to G$.

G es débil hom-idempotente si existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $G^{n+1} \to G^n$.

- Los grafos de Kneser no son débil hom-idempotente, [Larose et al., 1998].
- Si $n \geq 2k+2$ y $k \geq 2$ los grafos de Schijver no son débil hom-idempotente, [Valencia, T., 2015].
- Los grafos $KG(2s+2,2)_s$ no son hom-idempotentes, [Valencia, T., 2015].

HOM-IDEMPOTENCIA DE GRAFOS DE KNESER ESTABLES

G es hom-idempotente si $G^2 = G\Box G \to G$.

G es débil hom-idempotente si existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $G^{n+1} \to G^n$.

- Los grafos de Kneser no son débil hom-idempotente, [Larose et al., 1998].
- Si $n \geq 2k+2$ y $k \geq 2$ los grafos de Schijver no son débil hom-idempotente, [Valencia, T., 2015].
- Los grafos $KG(2s+2,2)_s$ no son hom-idempotentes, [Valencia, T., 2015].
- Los grafos $KG(sk+1,k)_s$ son hom-idempotentes y circulares, [Valencia, T., 2015].

Hom-idempotencia de grafos de Kneser estables

- Los grafos $KG(sk+1,k)_s$ son hom-idempotentes y circulares [Valencia, T., 2015].

Hom-idempotencia de grafos de Kneser estables

- Los grafos $KG(sk+1,k)_s$ son hom-idempotentes y circulares [Valencia, T., 2015].

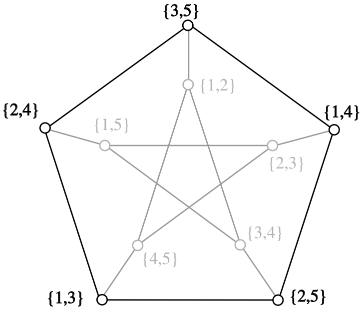


Figura : $KG(5,2)_2$

HOM-IDEMPOTENCIA DE GRAFOS DE KNESER ESTABLES

- Los grafos $KG(sk+1,k)_s$ son hom-idempotentes y circulares [Valencia, T., 2015].

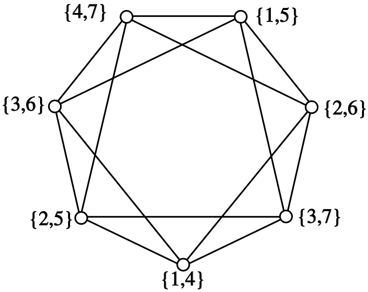


FIGURA : $KG(7,2)_3$

Hom-idempotencia de grafos de Kneser estables

- Los grafos $KG(sk+1,k)_s$ son hom-idempotentes y circulares [Valencia, T., 2015].

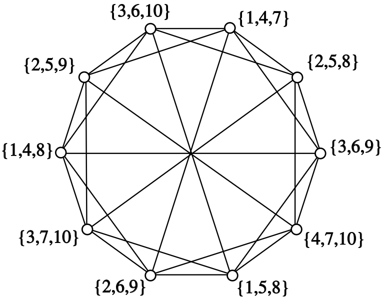


Figura : $KG(10,3)_3$

Automorfismos de grafos

Un homomorfismo biyectivo de G en sí mismo es un automorfismo.

Automorfismos de grafos

Un homomorfismo biyectivo de G en sí mismo es un automorfismo.

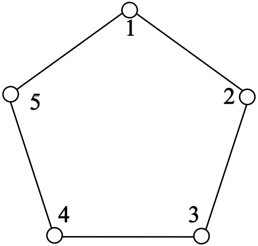


Figura : C_5

Automorfismos de grafos

Un homomorfismo biyectivo de G en sí mismo es un automorfismo.

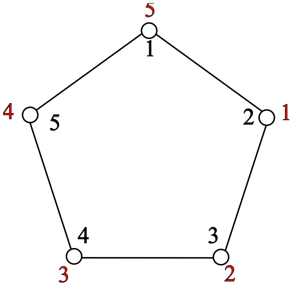


Figura : Rotación

Automorfismos de grafos

Un homomorfismo biyectivo de G en sí mismo es un automorfismo.

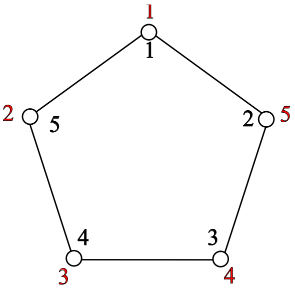


Figura : Reflexión

El grupo de automorfismos de C_n, $Aut(C_n)$, es D_{2n}.

Automorfismos de los grafos de Kneser

ϕ rotación en $[n]$.

Automorfismos de los grafos de Kneser

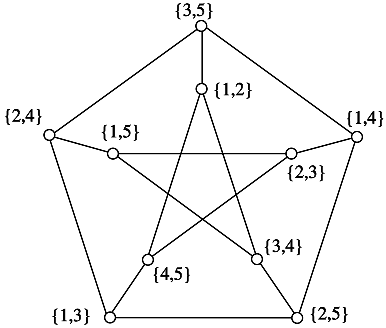
ϕ rotación en $[n]$.

Si $n = 5$, e.g. $\phi(\{1,3\}) = \{2,4\}$, $\phi(\{2,5\}) = \{3,1\}$.

Automorfismos de los grafos de Kneser

ϕ rotación en $[n]$.

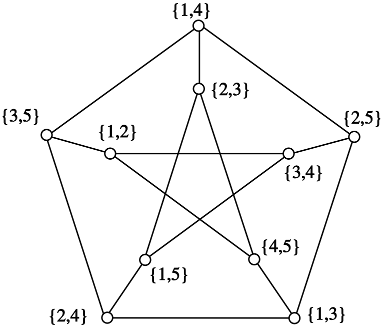
Si $n = 5$, e.g. $\phi(\{1,3\}) = \{2,4\}$, $\phi(\{2,5\}) = \{3,1\}$.



AUTOMORFISMOS DE LOS GRAFOS DE KNESER

ϕ rotación en $[n]$.

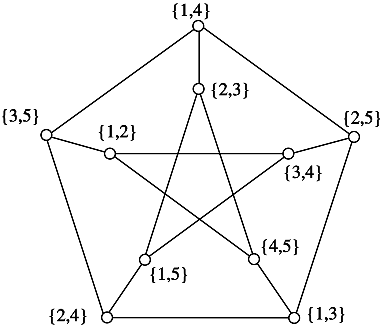
Si $n = 5$, e.g. $\phi(\{1,3\}) = \{2,4\}$, $\phi(\{2,5\}) = \{3,1\}$.



Automorfismos de los grafos de Kneser

ϕ rotación en $[n]$.

Si $n = 5$, e.g. $\phi(\{1,3\}) = \{2,4\}$, $\phi(\{2,5\}) = \{3,1\}$.



$Aut(KG(n,k))$ es isomorfo a $Sim(n)$.

Automorfismos de los grafos de Kneser estables

- El grupo de automorfismos del grafo de Schrijver $Aut(KG(n,k)_2)$ es isomorfo a $D(2n)$ [B. Braun, 2010].

Automorfismos de los grafos de Kneser estables

- El grupo de automorfismos del grafo de Schrijver $Aut(KG(n,k)_2)$ es isomorfo a $D(2n)$ [B. Braun, 2010].

- El grupo de automorfismos del grafo grafo de Kneser estable $Aut(KG(n,k)_s)$ es isomorfo a $D(2n)$ [T., 2015].

AUTOMORFISMOS DE LOS GRAFOS DE KNESER ESTABLES

Un grafo es vértice transitivo si para cada par de vértices u ,v, existe un automorfismo ϕ de G tal que $\phi(u) = v$.

Automorfismos de los grafos de Kneser estables

Un grafo es vértice transitivo si para cada par de vértices u ,v, existe un automorfismo ϕ de G tal que $\phi(u) = v$.

- Los grafos de Kneser son vértice transitivo.

Automorfismos de los grafos de Kneser estables

Un grafo es vértice transitivo si para cada par de vértices u ,v, existe un automorfismo ϕ de G tal que $\phi(u) = v$.

- Los grafos de Kneser son vértice transitivo.
- Los grafos de Schrijver no son vértice transitivo en general.

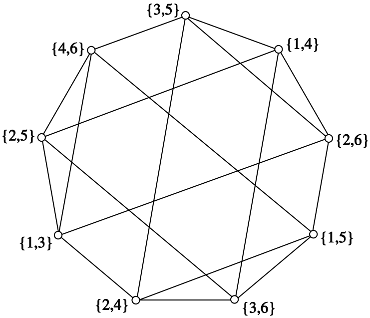


FIGURA : $KG(6,2)_2$

CASOS DONDE $\chi_r(G\Box H) = \max\{\chi_r(G), \chi_r(H)\}$

- Si $\chi(G) \leq \chi(H) = \omega(H)$ [Bonomo, Koch, Valencia, T., 2015].

- Si G es hom-idempotente y H es subgrafo de G [B.K.V.T].

- Si G es no bipartito con un shift y H es bipartito [B.K.V.T].
  [Un automorfismo ϕ de G es un shift si $u, \phi(u) \in E(G)$ para todo vértice u.]

G	r	$\chi_r(G)$	$\chi_r(G\Box G) =$	$\chi_r(G\Box G) \geq$	$\chi_r(G\Box G) \leq$
$KG(5,2)$	2	5	6	-	-
-	3	8	9	-	-
-	4	10	12	-	-
-	5	13	15	-	-
-	6	15	18	-	-
-	7	18	?	20	21
$KG(6,2)$	2	6	8	-	-
-	3	?	12	-	-
-	4	12	?	15	16
-	5	?	?	19	20
$KG(7,2)$	2	7	?	9	10
-	3	?	?	13	15
$KG(8,2)$	2	8	?	11	12
-	3	?	?	16	18

Muchas gracias

Referencias

1. B. Braun, *Symmetries of the stable Kneser graphs*, Advances in Applied Mathematics, 45:12–14, 2010.
2. P. Erdős, C. Ko, R. Rado, *Intersection theorems for systems of finite sets*. Quarterly Journal of Mathematics, 12:313–320, 1961.
3. M. Kneser, Aufgabe 360, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 2. Abteilung, vol. 50, 1955, pp. 27.
4. B. Larose, F. Laviolette, C. Tardif, *On normal Cayley graphs and Hom-idempotent graphs*, European Journal of Combinatorics, 19:867–881, 1998.
5. L. Lovász, *Kneser's conjecture, chromatic number and homotopy*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 25:319–324, 1978.
6. F. Meunier, *The chromatic number of almost stable Kneser hypergraphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 118:1820–1828, 2011.
7. A. Schrijver, *Vertex-critical subgraphs of Kneser graphs*, Nieuw Arch. Wiskd., 26(3):454–461, 1978.
8. S. Stahl, *n-Tuple colorings and associated graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, 20:185–203, 1976.
9. S. Stahl, *The multichromatic numbers of some Kneser graphs*, Discrete Mathematics, 185:287–291, 1998.

Trabajos citados

1. F. Bonomo, I. Koch, P. Torres, M. Valencia-Pabon, *k-tuple chromatic number of the cartesian product of graphs*, In Proc. of LAGOS'15, Electronic Notes in Discrete Mathematics 50, 243–248, 2015.
2. F. Bonomo, I. Koch, P. Torres, M. Valencia-Pabon, *k-tuple colorings of the cartesian product of graphs*, Submitted, 2015.
3. P. Torres, *The automorphism group of the s-stable Kneser graphs*, Submitted, 2015.
4. P. Torres, M. Valencia-Pabon, *Shifts of the Stable Kneser Graphs and Hom-Idempotence*, Submitted, 2015.