

Caracterización y detección en tiempo lineal de las obstrucciones minimales para los grafos concave-round y la propiedad de los unos circulares

Martín D. Safe

Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur
Instituto de Ciencias, Universidad Nacional de General Sarmiento

LXV Reunión Anual de Comunicaciones Científicas – UMA 2016
Bahía Blanca, 23 de septiembre de 2016

Obstrucciones minimales para los grafos concave-round

Obstrucciones minimales para la propiedad de los unos circulares

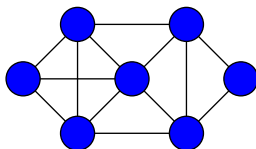
Conexión entre los concave-round y otros grafos arco-circulares

Grafos concave-round

Grafos concave-round

Un grafo es **concave-round** si existe una enumeración circular de sus vértices de tal modo que la vecindad cerrada de cada vértice sea un intervalo de dicha enumeración circular.

Ejemplo:

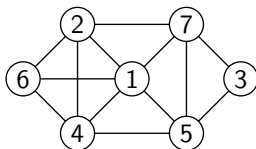


Grafos concave-round

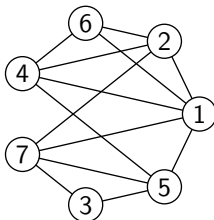
Grafos concave-round

Un grafo es **concave-round** si existe una enumeración circular de sus vértices de tal modo que la vecindad cerrada de cada vértice sea un intervalo de dicha enumeración circular.

Ejemplo:



Admite 1, 2, 6, 4, 7, 3, 5 como **enumeración concave-round**:



Grafos concave-round

- ▶ Tucker fue el primero en estudiar estos grafos como un cierto tipo de grafos arco-circulares:



A. Tucker. Characterizing circular-arc graphs. Bull. Amer. Math. Soc., 76:1257–1260, 1970.

Por esta razón, se los encuentra mencionados en la literatura como grafos Tucker arco-circulares o grafos Γ arco-circulares.

Grafos concave-round

- ▶ Tucker fue el primero en estudiar estos grafos como un cierto tipo de grafos arco-circulares:



A. Tucker. Characterizing circular-arc graphs. Bull. Amer. Math. Soc., 76:1257–1260, 1970.

Por esta razón, se los encuentra mencionados en la literatura como grafos Tucker arco-circulares o grafos Γ arco-circulares.

- ▶ El nombre concave-round es debido a Bang-Jensen, Huang y Yeo:



J. Bang-Jensen, J. Huang y A. Yeo. Convex-round and concave-round graphs. SIAM J. Discrete Math., 13(2):179–193, 2000.

Grafos concave-round

- ▶ Tucker fue el primero en estudiar estos grafos como un cierto tipo de grafos arco-circulares:



A. Tucker. Characterizing circular-arc graphs. Bull. Amer. Math. Soc., 76:1257–1260, 1970.

Por esta razón, se los encuentra mencionados en la literatura como grafos Tucker arco-circulares o grafos Γ arco-circulares.

- ▶ El nombre concave-round es debido a Bang-Jensen, Huang y Yeo:



J. Bang-Jensen, J. Huang y A. Yeo. Convex-round and concave-round graphs. SIAM J. Discrete Math., 13(2):179–193, 2000.

En el mismo trabajo definen los grafos convex-round como los complementos de los concave-round.

Grafos concave-round y convex-round

- ▶ El problema de dominación en grafos concave-round fue estudiado por Bang-Jensen, Huang, MacGillivray y Yeo (1999).

Grafos concave-round y convex-round

- ▶ El problema de dominación en grafos concave-round fue estudiado por Bang-Jensen, Huang, MacGillivray y Yeo (1999).
- ▶ Bang-Jensen, Huang y Yeo (2000) probaron que el número cromático de un grafo concave-round o convex-round puede determinarse en tiempo $O(n^2)$.

Grafos concave-round y convex-round

- ▶ El problema de dominación en grafos concave-round fue estudiado por Bang-Jensen, Huang, MacGillivray y Yeo (1999).
- ▶ Bang-Jensen, Huang y Yeo (2000) probaron que el número cromático de un grafo concave-round o convex-round puede determinarse en tiempo $O(n^2)$.
- ▶ Los grafos concave-round y los convex-round fueron estudiados con relación a la perfección circular (Bang-Jensen y Huang, 2002; Coulonges; 2006).

Grafos concave-round y convex-round

- ▶ El problema de dominación en grafos concave-round fue estudiado por Bang-Jensen, Huang, MacGillivray y Yeo (1999).
- ▶ Bang-Jensen, Huang y Yeo (2000) probaron que el número cromático de un grafo concave-round o convex-round puede determinarse en tiempo $O(n^2)$.
- ▶ Los grafos concave-round y los convex-round fueron estudiados con relación a la perfección circular (Bang-Jensen y Huang, 2002; Coulonges; 2006).
- ▶ Existen algoritmos de reconocimiento lineales (es decir, $O(m + n)$) para los grafos concave-round y los convex-round (Booth y Lueker, 1976) y también en tiempo lineal es posible obtener certificados negativos (McConnell, 2004).

Grafos concave-round y convex-round

- ▶ El problema de dominación en grafos concave-round fue estudiado por Bang-Jensen, Huang, MacGillivray y Yeo (1999).
- ▶ Bang-Jensen, Huang y Yeo (2000) probaron que el número cromático de un grafo concave-round o convex-round puede determinarse en tiempo $O(n^2)$.
- ▶ Los grafos concave-round y los convex-round fueron estudiados con relación a la perfección circular (Bang-Jensen y Huang, 2002; Coulonges; 2006).
- ▶ Existen algoritmos de reconocimiento lineales (es decir, $O(m + n)$) para los grafos concave-round y los convex-round (Booth y Lueker, 1976) y también en tiempo lineal es posible obtener certificados negativos (McConnell, 2004).
- ▶ El problema de isomorfismo para los grafos concave-round y los convex-round puede resolverse en tiempo lineal (Curtis, Lin, McConnell, Nussbaum, Soullignac, Spinrad y Szwarcfiter, 2013).

Grafos concave-round: subgrafos prohibidos

Uno de los resultados de este trabajo es la resolución del siguiente problema.

Problema (Bang-Jensen, Huang y Yeo, 2000)

Encontrar una caracterización en términos de subgrafos prohibidos de los grafos concave-round (o, equivalentemente, de los grafos convex-round).

Grafos concave-round: subgrafos prohibidos

Uno de los resultados de este trabajo es la resolución del siguiente problema.

Problema (Bang-Jensen, Huang y Yeo, 2000)

Encontrar una caracterización en términos de subgrafos prohibidos de los grafos concave-round (o, equivalentemente, de los grafos convex-round).

Mas aún, mostramos que es posible hallar uno de estos subgrafos prohibidos en tiempo lineal en cualquier grafo no concave-round.

Grafos concave-round: subgrafos prohibidos minimales

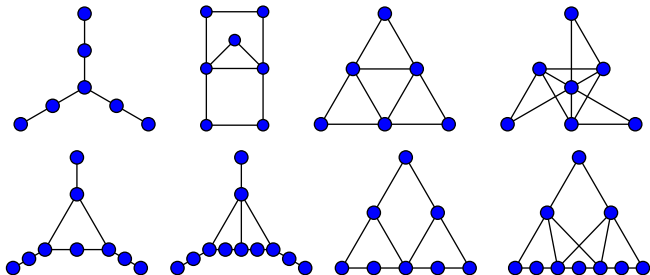
El siguiente resultado resuelve el problema de Bang-Jensen, Huang y Yeo (2000) mencionado.

Grafos concave-round: subgrafos prohibidos minimales

El siguiente resultado resuelve el problema de Bang-Jensen, Huang y Yeo (2000) mencionado.

Teorema

Un grafo es concave-round si y sólo si G no contiene $C_k \cup K_1$ para ningún $k \geq 4$, ni $\overline{C_{2k-1}} \cup K_1$ para ningún $k \geq 2$, ni $\overline{C_{2k}}$ para ningún $k \geq 3$, ni tampoco el complemento de ninguno de los siguientes como subgrafo inducido:



Grafos concave-round: subgrafos prohibidos minimales

Bosquejo de la demostración.

- ▶ Sea G un grafo prohibido minimal para la clase concave-round.

Grafos concave-round: subgrafos prohibidos minimales

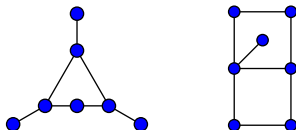
Bosquejo de la demostración.

- ▶ Sea G un grafo prohibido minimal para la clase concave-round.
- ▶ Los prohibidos minimales co-bipartitos se siguen de Tucker (1974), por lo que podemos asumir que G no es co-bipartito. Luego, $\overline{G}$ contiene un ciclo impar inducido.

Grafos concave-round: subgrafos prohibidos minimales

Bosquejo de la demostración.

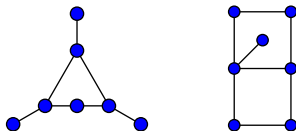
- ▶ Sea G un grafo prohibido minimal para la clase concave-round.
- ▶ Los prohibidos minimales co-bipartitos se siguen de Tucker (1974), por lo que podemos asumir que G no es co-bipartito. Luego, $\overline{G}$ contiene un ciclo impar inducido.
- ▶ Como todos los grafos arco-circulares propios son concave-round (Tucker, 1971), sabemos que G no es arco-circular propio. Luego, G contiene un subgrafo inducido prohibido para la clase de grafos arco-circulares propios. De Tucker (1974), resulta que $\overline{G}$ debe contener alguno de los siguientes como subgrafo inducido:



Grafos concave-round: subgrafos prohibidos minimales

Bosquejo de la demostración.

- ▶ Sea G un grafo prohibido minimal para la clase concave-round.
- ▶ Los prohibidos minimales co-bipartitos se siguen de Tucker (1974), por lo que podemos asumir que G no es co-bipartito. Luego, $\overline{G}$ contiene un ciclo impar inducido.
- ▶ Como todos los grafos arco-circulares propios son concave-round (Tucker, 1971), sabemos que G no es arco-circular propio. Luego, G contiene un subgrafo inducido prohibido para la clase de grafos arco-circulares propios. De Tucker (1974), resulta que $\overline{G}$ debe contener alguno de los siguientes como subgrafo inducido:



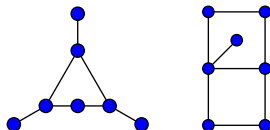
- ▶ Analizando las formas en que un ciclo inducido impar puede coexistir en $\overline{G}$ con uno de estos dos grafos, se prueba la presencia de alguno de los subgrafos prohibidos propuestos. □

Grafos concave-round: detección de prohibidos

La demostración tiene la siguiente consecuencia algorítmica.

Corolario

Dado un grafo G , un ciclo inducido impar $\overline{G}$ y un subgrafo inducido de $\overline{G}$ isomorfo a uno de:



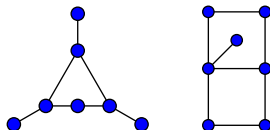
es posible hallar un subgrafo inducido prohibido minimal para la clase concave-round en G en tiempo lineal.

Grafos concave-round: detección de prohibidos

La demostración tiene la siguiente consecuencia algorítmica.

Corolario

Dado un grafo G , un ciclo inducido impar $\overline{G}$ y un subgrafo inducido de $\overline{G}$ isomorfo a uno de:



es posible hallar un subgrafo inducido prohibido minimal para la clase concave-round en G en tiempo lineal.

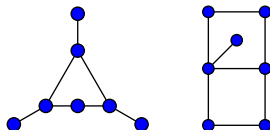
Nuestro objetivo ahora es mostrar que es posible detectar un subgrafo prohibido minimal de la clase concave-round en tiempo lineal.

Grafos concave-round: detección de prohibidos

La demostración tiene la siguiente consecuencia algorítmica.

Corolario

Dado un grafo G , un ciclo inducido impar $\overline{G}$ y un subgrafo inducido de $\overline{G}$ isomorfo a uno de:



es posible hallar un subgrafo inducido prohibido minimal para la clase concave-round en G en tiempo lineal.

Nuestro objetivo ahora es mostrar que es posible detectar un subgrafo prohibido minimal de la clase concave-round en tiempo lineal.

Lo conseguiremos combinando el resultado aquí arriba con una versión algorítmica de la caracterización de Tucker (1974) probada por Soullignac (2015) y con resultados algorítmicos que obtendremos estudiando las **matrices prohibidas minimales para la propiedad de los unos circulares**.

Propiedad de los unos consecutivos

Todas las matrices en este trabajo son binarias.

Propiedad de los unos consecutivos

Todas las matrices en este trabajo son **binarias**.

Propiedad de los unos consecutivos (Fulkerson y Gross, 1964)

- Una matriz tiene la **propiedad de los unos consecutivos (para las filas)** si permutando sus columnas es posible obtener una matriz donde los unos de cada fila aparezcan formando un intervalo.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Propiedad de los unos consecutivos

Todas las matrices en este trabajo son **binarias**.

Propiedad de los unos consecutivos (Fulkerson y Gross, 1964)

- ▶ Una matriz tiene la **propiedad de los unos consecutivos (para las filas)** si permutando sus columnas es posible obtener una matriz donde los unos de cada fila aparezcan formando un intervalo.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ Se define análogamente para las columnas.

Propiedad de los unos consecutivos

Todas las matrices en este trabajo son **binarias**.

Propiedad de los unos consecutivos (Fulkerson y Gross, 1964)

- ▶ Una matriz tiene la **propiedad de los unos consecutivos (para las filas)** si permutando sus columnas es posible obtener una matriz donde los unos de cada fila aparezcan formando un intervalo.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ Se define análogamente para las columnas.
- ▶ Cuando mencionamos la propiedad sin mencionar filas ni columnas, nos referimos a la misma para las filas.

Propiedad de los unos consecutivos

Todas las matrices en este trabajo son **binarias**.

Propiedad de los unos consecutivos (Fulkerson y Gross, 1964)

- ▶ Una matriz tiene la **propiedad de los unos consecutivos (para las filas)** si permutando sus columnas es posible obtener una matriz donde los unos de cada fila aparezcan formando un intervalo.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ Se define análogamente para las columnas.
- ▶ Cuando mencionamos la propiedad sin mencionar filas ni columnas, nos referimos a la misma para las filas.

Contención de matrices

Dadas dos matrices M y M' , diremos que **M contiene M'** si alguna permutación de filas y/o columnas de M' es submatriz de M .

Propiedad de los unos consecutivos: Matrices de Tucker

Teorema (Tucker, 1972)

Una matriz tiene la propiedad de los unos consecutivos si y sólo si no contiene ninguna de las siguientes matrices:

$$M_I(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{II}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & 0 \\ & 1 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{III}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & 0 \\ & 1 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{IV} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedad de los unos consecutivos: Matrices de Tucker

Matrices de Tucker

Las matrices del teorema anterior se llaman **matrices de Tucker** y son las **matrices prohibidas minimales para la propiedad de los unos consecutivos**.

Propiedad de los unos consecutivos: Matrices de Tucker

Matrices de Tucker

Las matrices del teorema anterior se llaman **matrices de Tucker** y son las **matrices prohibidas minimales para la propiedad de los unos consecutivos**.

Recientemente se probó que pueden detectarse en tiempo lineal:

Teorema (Lindzey y McConnell, 2016)

Dada una matriz M que no posee la propiedad de los unos consecutivos, es posible encontrar una matriz de Tucker contenida en M en tiempo lineal, es decir, en tiempo $O(\text{tamaño}(M))$ donde

$\text{tamaño}(M) = \text{números de filas} + \text{número de columnas} + \text{número de unos}$.

Propiedad de los unos circulares

Propiedad de los circulares (Tucker, 1970)

- Una matriz tiene la **propiedad de los unos circulares (para las filas)** si existe un ordenamiento circular de las sus columnas de manera que los unos de cada fila sean consecutivos en ese ordenamiento circular.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedad de los unos circulares

Propiedad de los circulares (Tucker, 1970)

- ▶ Una matriz tiene la **propiedad de los unos circulares (para las filas)** si existe un ordenamiento circular de las sus columnas de manera que los unos de cada fila sean consecutivos en ese ordenamiento circular.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- ▶ Se define análogamente para las columnas.

Propiedad de los unos circulares

Propiedad de los circulares (Tucker, 1970)

- ▶ Una matriz tiene la **propiedad de los unos circulares (para las filas)** si existe un ordenamiento circular de las sus columnas de manera que los unos de cada fila sean consecutivos en ese ordenamiento circular.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

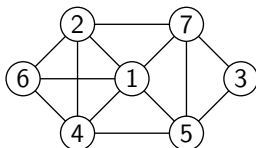
- ▶ Se define análogamente para las columnas.
- ▶ Cuando mencionamos la propiedad sin mencionar filas ni columnas, nos referimos a la misma para las filas.

Grafos concave-round y unos circulares

La **matriz de adyacencia aumentada** $A^+(G)$ de un grafo G se obtiene agregando unos a lo largo de la diagonal de la matriz de adyacencia.

Grafos concave-round y unos circulares

Un grafo G es concave-round si y sólo si $A^+(G)$ tiene la propiedad de los unos circulares para filas y columnas.



$$A^+ = \begin{pmatrix} \color{red}{1} & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \color{red}{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \color{red}{1} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \color{red}{1} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \color{red}{1} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \color{red}{1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Unos circulares: matrices prohibidas minimales

Para poder describir las matrices prohibidas minimales para la propiedad de los unos circulares, vamos a necesitar introducir algo de notación.

Unos circulares: matrices prohibidas minimales

Para poder describir las matrices prohibidas minimales para la propiedad de los unos circulares, vamos a necesitar introducir algo de notación.

M^* y $\overline{M}$

Sea M una matriz.

- ▶ Denotamos por M^* la matriz que se obtiene a partir de M agregando una columna formada solo por ceros;
- ▶ Denotamos por $\overline{M}$ la matriz que se obtiene complementando todas las filas de M .

Unos circulares: matrices prohibidas minimales

Para poder describir las matrices prohibidas minimales para la propiedad de los unos circulares, vamos a necesitar introducir algo de notación.

M^* y $\overline{M}$

Sea M una matriz.

- ▶ Denotamos por M^* la matriz que se obtiene a partir de M agregando una columna formada solo por ceros;
- ▶ Denotamos por $\overline{M}$ la matriz que se obtiene complementando todas las filas de M .

$\alpha \circ M$

Si M es una matriz con k filas y $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$ es una secuencia binaria de longitud k , denotamos por $\alpha \circ M$ la matriz que se obtiene complementando las filas i -ésimas de M tales que $\alpha_i = 1$.

$$1010 \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Unos circulares: matrices prohibidas minimales

Rotación y reversa de una secuencia

Si $a = a_1 a_2 \dots a_k$ es una secuencia binaria, llamamos **rotación de a** a la secuencia $a_2 \dots a_k a_1$ y **reversa de a** a la secuencia $a_k a_{k-1} \dots a_1$.

Unos circulares: matrices prohibidas minimales

Rotación y reversa de una secuencia

Si $a = a_1 a_2 \dots a_k$ es una secuencia binaria, llamamos **rotación de a** a la secuencia $a_2 \dots a_k a_1$ y **reversa de a** a la secuencia $a_k a_{k-1} \dots a_1$.

Brazalete

Un **brazalete** es el menor elemento en orden lexicográfico dentro de alguna clase de equivalencia de secuencias binarias bajo rotaciones y reversiones.

Unos circulares: matrices prohibidas minimales

Rotación y reversa de una secuencia

Si $a = a_1 a_2 \dots a_k$ es una secuencia binaria, llamamos **rotación de a** a la secuencia $a_2 \dots a_k a_1$ y **reversa de a** a la secuencia $a_k a_{k-1} \dots a_1$.

Brazaletes

Un **brazaletes** es el menor elemento en orden lexicográfico dentro de alguna clase de equivalencia de secuencias binarias bajo rotaciones y reversiones.

$$A_k, k \geq 3$$

Si $k \geq 4$, sea **A_k** el conjunto de los brazaletes binarios de longitud k .

Si $k = 3$, sea **$A_3 = \{000, 111\}$** . (Los brazaletes $001, 011 \notin A_3$.)

Unos circulares: matrices prohibidas minimales

Tucker (1972) caracterizó las matrices con la propiedad de los unos consecutivos por matrices prohibidas minimales.

Unos circulares: matrices prohibidas minimales

Tucker (1972) caracterizó las matrices con la propiedad de los unos consecutivos por matrices prohibidas minimales.

La falta de una caracterización análoga para la propiedad de los unos consecutivos había sido notada por Dom, Guo y Niedermeier (2010).

Unos circulares: matrices prohibidas minimales

Tucker (1972) caracterizó las matrices con la propiedad de los unos consecutivos por matrices prohibidas minimales.

La falta de una caracterización análoga para la propiedad de los unos consecutivos había sido notada por Dom, Guo y Niedermeier (2010).

En este trabajo hallamos tal caracterización.

Teorema

Una matriz tiene la propiedad de los unos circulares si y sólo si no contiene ninguna de las matrices de la siguiente familia:

$$\mathcal{F}_{\text{circR}} = \{\alpha \circ M_I^*(k) : k \geq 3 \text{ y } \alpha \in A_k\} \cup \{M_{IV}, \overline{M_{IV}}, M_V^*, \overline{M_V^*}\}.$$

Más aún, los elementos de $\mathcal{F}_{\text{circR}}$ son matrices prohibidas minimales.

Unos circulares: matrices prohibidas minimales

Tucker (1972) caracterizó las matrices con la propiedad de los unos consecutivos por matrices prohibidas minimales.

La falta de una caracterización análoga para la propiedad de los unos consecutivos había sido notada por Dom, Guo y Niedermeier (2010).

En este trabajo hallamos tal caracterización.

Teorema

Una matriz tiene la propiedad de los unos circulares si y sólo si no contiene ninguna de las matrices de la siguiente familia:

$$\mathcal{F}_{\text{circR}} = \{\alpha \circ M_I^*(k) : k \geq 3 \text{ y } \alpha \in A_k\} \cup \{M_{IV}, \overline{M_{IV}}, M_V^*, \overline{M_V^*}\}.$$

Más aún, los elementos de $\mathcal{F}_{\text{circR}}$ son **matrices prohibidas minimales**.

La demostración utiliza una reducción de Tucker (1970) del problema de los unos circulares al problema de los unos consecutivos y la caracterización de la propiedad de los unos consecutivos mediante matrices de Tucker (1972).

Unos circulares: matrices prohibidas minimales

Nuestra caracterización dice que más allá de 4 matrices esporádicas, las matrices prohibidas minimales son las que se obtienen de complementar filas a matrices de una única familia:

$$M_I^*(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & 0 \\ & 1 & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & 0 \\ & & & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{para } k \geq 3$$

Unos circulares: matrices prohibidas minimales

Nuestra caracterización dice que más allá de 4 matrices esporádicas, las matrices prohibidas minimales son las que se obtienen de complementar filas a matrices de una única familia:

$$M_I^*(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & 0 \\ & 1 & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & 0 \\ & & & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{para } k \geq 3$$

Otra consecuencia es que el algoritmo de Lindzey y McConnell (2016) para detectar matrices prohibidas minimales para la propiedad de los unos consecutivos puede adaptarse para detectar las matrices prohibidas minimales para la propiedad de los unos circulares.

Corolario

Dada una matriz M que no tiene la propiedad de los unos circulares, es posible detectar **en tiempo lineal una matriz prohibida minimal F** contenida en M .

Unos circulares: matrices prohibidas minimales

Nuestra caracterización también permite calcular el número de matrices prohibidas minimales para la propiedad de los unos circulares con k filas, que es 2, 10, 8, 13, 18, 30, ... para $k = 3, 4, 5, \dots$. De hecho, para cada $k \geq 5$, coincide con el número de brazaletes binarios de longitud k , que es conocido:

$$\frac{1}{2k} \sum_{d|k} \varphi(d) 2^{k/d} + \begin{cases} \frac{3}{4} \cdot 2^{k/2} & \text{si } k \text{ is par,} \\ \frac{1}{2} \cdot 2^{(k-1)/2} & \text{si } k \text{ is impar,} \end{cases}$$

donde φ es la función φ de Euler.

Unos circulares para filas y columnas

A partir de la caracterización de la propiedad de los unos circulares, es posible obtener un resultado análogo para la propiedad de los unos circulares para filas y columnas.

Sea

$$\mathcal{A}_{\text{circRC}} = \{0001, 0011, 0111, 00001, 00011, 00111, 01111, 000111\}$$

y, si $\alpha \in \mathcal{A}_{\text{circRC}}$, denotamos por $|\alpha|$ la longitud de α .

Teorema

Una matriz M tiene la propiedad de los unos circulares para filas y columnas si y sólo si no contiene ninguna matriz de la familia

$$\mathcal{F}_{\text{circRC}} = \bigcup_{k=3}^{\infty} \{M_I^*(k), \overline{M_I^*(k)}\} \cup \{\alpha \circ M_I^*(|\alpha|) : \alpha \in \mathcal{A}_{\text{circRC}}\} \cup \{M_V^*, \overline{M_V^*}\}$$

ni sus transpuestas. Mas aún, todas estas matrices son **prohibidas minimales** y, si M no tiene la propiedad de los unos circulares para filas y columnas, una tal **matriz prohibida minimal puede detectarse en tiempo lineal**.

Unos circulares para filas y columnas

Más allá de 10 matrices prohibidas minimales esporádicas, las matrices minimales para la propiedad de los unos circulares para filas y columnas son

$$M_I^*(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & 0 \\ & 1 & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & 0 \\ & & & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{para } k \geq 3$$

y sus complementos, junto con las transpuestas de dichas matrices.

Unos circulares para filas y columnas

Más allá de 10 matrices prohibidas minimales esporádicas, las matrices minimales para la propiedad de los unos circulares para filas y columnas son

$$M_I^*(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & 0 \\ & 1 & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & 0 \\ & & & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{para } k \geq 3$$

y sus complementos, junto con las transpuestas de dichas matrices.

A partir de esto es posible probar la siguiente consecuencia algorítmica para los grafos concave-round.

Teorema

Existe un algoritmo que, dado un grafo no concave-round G , en tiempo lineal produce un subgrafo inducido prohibido minimal de G para la clase concave-round o un ciclo impar inducido en $\overline{G}$.

Concave-round: detección de prohibidos minimales

De todo el análisis, podemos ahora concluir lo siguiente.

Corolario

Dado un grafo **no concave-round** G , es posible hallar un subgrafo inducido de G **prohibido minimal para clase concave-round en tiempo lineal**.

Concave-round: detección de prohibidos minimales

De todo el análisis, podemos ahora concluir lo siguiente.

Corolario

Dado un grafo **no concave-round** G , es posible hallar un subgrafo inducido de G **prohibido minimal para clase concave-round en tiempo lineal**.

Idea de la demostración.

- ▶ Por el Teorema anterior, sea J un ciclo impar inducido J en $\overline{G}$.

Concave-round: detección de prohibidos minimales

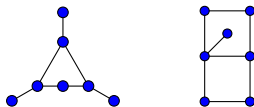
De todo el análisis, podemos ahora concluir lo siguiente.

Corolario

Dado un grafo **no concave-round** G , es posible hallar un subgrafo inducido de G **prohibido minimal para clase concave-round en tiempo lineal**.

Idea de la demostración.

- ▶ Por el Teorema anterior, sea J un ciclo impar inducido J en $\overline{G}$.
- ▶ Como G no es concave-round, G contiene un prohibido minimal H para la clase de grafos arco-circulares propios (Tucker, 1970). Obtenemos H usando Soulignac (2015). Si $\overline{H}$ no es ninguno de:



entonces es uno de los prohibidos minimales y terminamos. Por lo tanto, asumimos que $\overline{H}$ es uno de estos dos grafos.

Concave-round: detección de prohibidos minimales

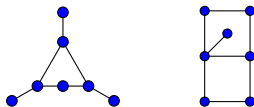
De todo el análisis, podemos ahora concluir lo siguiente.

Corolario

Dado un grafo **no concave-round** G , es posible hallar un subgrafo inducido de G **prohibido minimal para clase concave-round en tiempo lineal**.

Idea de la demostración.

- ▶ Por el Teorema anterior, sea J un ciclo impar inducido J en $\overline{G}$.
- ▶ Como G no es concave-round, G contiene un prohibido minimal H para la clase de grafos arco-circulares propios (Tucker, 1970). Obtenemos H usando Soulignac (2015). Si $\overline{H}$ no es ninguno de:



entonces es uno de los prohibidos minimales y terminamos. Por lo tanto, asumimos que $\overline{H}$ es uno de estos dos grafos.

- ▶ De la solución que dimos al problema de Bang-Jensen et al. (2000) se sigue que es posible obtener de J y H un prohibido minimal para la clase concave-round. □

Relación con otras clases de grafos arco-circulares

Teorema (Tucker, 1970)

Todo grafo concave-round es arco-circular.

Relación con otras clases de grafos arco-circulares

Teorema (Tucker, 1970)

Todo grafo concave-round es arco-circular.

Observamos que se puede afirmar algo más.

Grafo arco-circular normal

Un grafo **arco-circular normal** es un grafo de intersección de arcos en un círculo tal que ningún par de arcos cubre todo el círculo.

Combinando resultados de Tucker (1974), Golumbic (1980), Müller (1997) y Hell y Huang (2004), surge lo siguiente.

Corolario

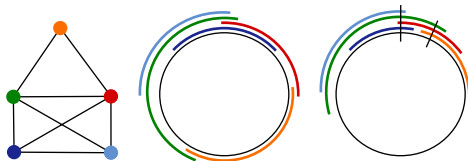
Todo grafo concave-round es arco-circular normal.

(El resultado de Hell y Huang (2004) que utilizamos es que el complemento de un bigrafo de intervalo es un grafo arco-circular normal.)

Conexión con los grafos arco-circulares Helly

Grafo arco-circular Helly (Gavril, 1974)

Un grafo es **arco-circular Helly** si es la intersección de arcos en un círculo tal que todos los arcos que representan los vértices de una clique comparten un mismo punto del círculo.



Obstáculos minimales, arco-circulares y libres de claw

- ▶ Lin y Szwarcfiter (2006) caracterizaron por subgrafos inducidos prohibidos, llamados **obstáculos**, aquellos grafos arco-circulares que son arco-circulares Helly. Los obstáculos pueden o no ser minimales (contener uno propiamente a otro) o no ser arco-circulares.

Obstáculos minimales, arco-circulares y libres de claw

- ▶ Lin y Szwarcfiter (2006) caracterizaron por subgrafos inducidos prohibidos, llamados **obstáculos**, aquellos grafos arco-circulares que son arco-circulares Helly. Los obstáculos pueden no ser minimales (contener uno propiamente a otro) o no ser arco-circulares.
- ▶ Se conocen los obstáculos minimales y arco-circulares para una superclase de los W_4 -free (Bonomo, Durán, S. y Wagler, 2014).

Obstáculos minimales, arco-circulares y libres de claw

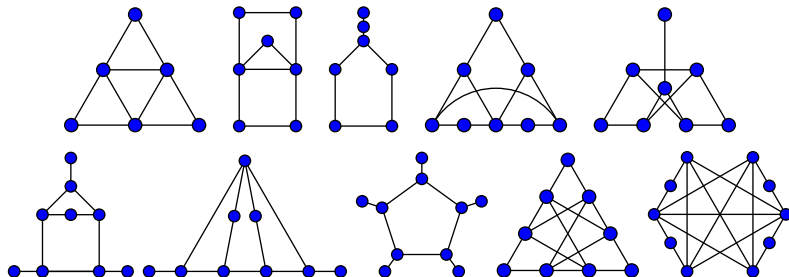
- ▶ Lin y Szwarcfiter (2006) caracterizaron por subgrafos inducidos prohibidos, llamados **obstáculos**, aquellos grafos arco-circulares que son arco-circulares Helly. Los obstáculos pueden no ser minimales (contener uno propiamente a otro) o no ser arco-circulares.
- ▶ Se conocen los obstáculos minimales y arco-circulares para una superclase de los W_4 -free (Bonomo, Durán, S. y Wagler, 2014).
- ▶ Aquí los hallamos para los **libres de claw**:

Obstáculos minimales, arco-circulares y libres de claw

- ▶ Lin y Szwarcfiter (2006) caracterizaron por subgrafos inducidos prohibidos, llamados **obstáculos**, aquellos grafos arco-circulares que son arco-circulares Helly. Los obstáculos pueden no ser minimales (contener uno propiamente a otro) o no ser arco-circulares.
- ▶ Se conocen los obstáculos minimales y arco-circulares para una superclase de los W_4 -free (Bonomo, Durán, S. y Wagler, 2014).
- ▶ Aquí los hallamos para los **libres de claw**:

Teorema

Los obstáculos minimales, arco-circulares y libres de claw son $\overline{3K_2}$, $\overline{P_7}$, $\overline{2P_4}$ y los complementos de los siguientes:



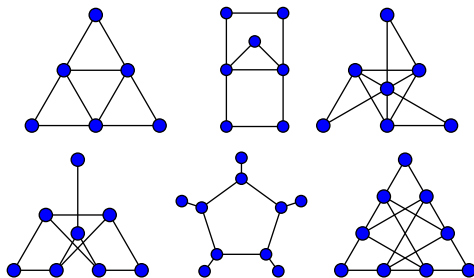
Relación con otras clases de grafos arco-circulares

Combinando Lin y Szwarcfiter (2006) con nuestros resultados:

Corolario

Para cada grafo G , son equivalentes:

- (i) G es arco-circular Helly y **cuasi-línea** (es decir, libre de $\overline{C_{2k-1} \cup K_1}$ para todo $k \geq 2$);
- (ii) G es arco-circular Helly y concave-round;
- (iii) G no contiene $C_k \cup K_1$ para ningún $k \geq 4$, $\overline{C_{2k-1} \cup K_1}$ para ningún $k \geq 2$, $\overline{C_6}$, $\overline{3K_2}$, $\overline{2P_4}$, $\overline{P_7}$, ni el complemento de ninguno de los siguientes como subgrafo inducido:



¡Muchas gracias por su atención!