MATCHING FRACCIONARIOS FUERTEMENTE ESTABLES

PABLO NEME   JORGE OVIEDO

UNIÓN MATEMÁTICA ARGENTINA

I M A S L

22/09/2016

Modelo

- M y W dos conjuntos disjuntos de agentes a los que llamaremos conjunto de **hombres** y **mujeres** respectivamente.
- Cada agente posee un **perfil de preferencias** P, el cual es un **orden** completo, transitivo y antisimétrico sobre el otro lado del mercado.
- Denotaremos por $a >_c b$, cuando el agente c prefiere estrictamente al agente a sobre el agente b. De la misma forma $a \geq_c b$ denota que sucede $a = b$ o $a >_c b$.
- El **modelo** queda denotado por (M, W, P).
- Un **Matching** μ es una función inyectiva de $M \cup W$ en si mismo, que cumpla que $\mu(w) = m$ si y solo si $\mu(m) = w$.

- M y W dos conjuntos disjuntos de agentes a los que llamaremos conjunto de **hombres** y **mujeres** respectivamente.
- Cada agente posee un **perfil de preferencias** P, el cual es un **orden** completo, transitivo y antisimétrico sobre el otro lado del mercado.
- Denotaremos por $a >_c b$, cuando el agente c prefiere estrictamente al agente a sobre el agente b. De la misma forma $a \geq_c b$ denota que sucede $a = b$ o $a >_c b$.
- El **modelo** queda denotado por (M, W, P).
- Un **Matching** μ es una función inyectiva de $M \cup W$ en si mismo, que cumpla que $\mu(w) = m$ si y solo si $\mu(m) = w$.

- M y W dos conjuntos disjuntos de agentes a los que llamaremos conjunto de **hombres** y **mujeres** respectivamente.
- Cada agente posee un **perfil de preferencias** P, el cual es un **orden** completo, transitivo y antisimétrico sobre el otro lado del mercado.
- Denotaremos por $a >_c b$, cuando el agente c prefiere estrictamente al agente a sobre el agente b. De la misma forma $a \geq_c b$ denota que sucede $a = b$ o $a >_c b$.
- El **modelo** queda denotado por (M, W, P).
- Un **Matching** μ es una función inyectiva de $M \cup W$ en si mismo, que cumpla que $\mu(w) = m$ si y solo si $\mu(m) = w$.

- M y W dos conjuntos disjuntos de agentes a los que llamaremos conjunto de **hombres** y **mujeres** respectivamente.
- Cada agente posee un **perfil de preferencias** P, el cual es un **orden** completo, transitivo y antisimétrico sobre el otro lado del mercado.
- Denotaremos por $a >_c b$, cuando el agente c prefiere estrictamente al agente a sobre el agente b. De la misma forma $a \geq_c b$ denota que sucede $a = b$ o $a >_c b$.
- El **modelo** queda denotado por (M, W, P).
- Un **Matching** μ es una función inyectiva de $M \cup W$ en si mismo, que cumpla que $\mu(w) = m$ si y solo si $\mu(m) = w$.

- M y W dos conjuntos disjuntos de agentes a los que llamaremos conjunto de **hombres** y **mujeres** respectivamente.
- Cada agente posee un **perfil de preferencias** P, el cual es un **orden** completo, transitivo y antisimétrico sobre el otro lado del mercado.
- Denotaremos por $a >_c b$, cuando el agente c prefiere estrictamente al agente a sobre el agente b. De la misma forma $a \geq_c b$ denota que sucede $a = b$ o $a >_c b$.
- El **modelo** queda denotado por (M, W, P).
- Un **Matching** μ es una función inyectiva de $M \cup W$ en si mismo, que cumpla que $\mu(w) = m$ si y solo si $\mu(m) = w$.

- Un matching μ diremos que es **Individualmente Racional** si para cada agente v, $\mu(v) \geq_v \emptyset$.
- Un **Par Bloqueante** (m, w) es aquel que cumple que $m >_w \mu(w)$ y $w >_m \mu(m)$.
- Un matching μ es **Estable** si es individualmente racional y no posee pares bloqueantes.
- El conjunto de todos los matching estables del modelo (M, W, P) lo denotamos por $S(P)$.
- **Vector de incidencia** de un matching μ, es un vector $x \in \{0,1\}^{|M| \times |W|}$, de forma que $x_{m,w} = 1$ si y solo si $\mu(m) = w$ y $x_{m,w} = 0$ en caso contrario.

- Un matching μ diremos que es **Individualmente Racional** si para cada agente v, $\mu(v) \geq_v \emptyset$.
- Un **Par Bloqueante** (m, w) es aquel que cumple que $m >_w \mu(w)$ y $w >_m \mu(m)$.
- Un matching μ es **Estable** si es individualmente racional y no posee pares bloqueantes.
- El conjunto de todos los matching estables del modelo (M, W, P) lo denotamos por $S(P)$.
- **Vector de incidencia** de un matching μ, es un vector $x \in \{0,1\}^{|M| \times |W|}$, de forma que $x_{m,w} = 1$ si y solo si $\mu(m) = w$ y $x_{m,w} = 0$ en caso contrario.

- Un matching μ diremos que es **Individualmente Racional** si para cada agente v, $\mu(v) \geq_v \emptyset$.
- Un **Par Bloqueante** (m, w) es aquel que cumple que $m >_w \mu(w)$ y $w >_m \mu(m)$.
- Un matching μ es **Estable** si es individualmente racional y no posee pares bloqueantes.
- El conjunto de todos los matching estables del modelo (M, W, P) lo denotamos por $S(P)$.
- **Vector de incidencia** de un matching μ, es un vector $x \in \{0,1\}^{|M| \times |W|}$, de forma que $x_{m,w} = 1$ si y solo si $\mu(m) = w$ y $x_{m,w} = 0$ en caso contrario.

- Un matching μ diremos que es **Individualmente Racional** si para cada agente v, $\mu(v) \geq_v \emptyset$.
- Un **Par Bloqueante** (m, w) es aquel que cumple que $m >_w \mu(w)$ y $w >_m \mu(m)$.
- Un matching μ es **Estable** si es individualmente racional y no posee pares bloqueantes.
- El conjunto de todos los matching estables del modelo (M, W, P) lo denotamos por $S(P)$.
- **Vector de incidencia** de un matching μ, es un vector $x \in \{0,1\}^{|M| \times |W|}$, de forma que $x_{m,w} = 1$ si y solo si $\mu(m) = w$ y $x_{m,w} = 0$ en caso contrario.

- Un matching μ diremos que es **Individualmente Racional** si para cada agente v, $\mu(v) \geq_v \emptyset$.
- Un **Par Bloqueante** (m, w) es aquel que cumple que $m >_w \mu(w)$ y $w >_m \mu(m)$.
- Un matching μ es **Estable** si es individualmente racional y no posee pares bloqueantes.
- El conjunto de todos los matching estables del modelo (M, W, P) lo denotamos por $S(P)$.
- **Vector de incidencia** de un matching μ, es un vector $x \in \{0,1\}^{|M| \times |W|}$, de forma que $x_{m,w} = 1$ si y solo si $\mu(m) = w$ y $x_{m,w} = 0$ en caso contrario.

- Modelos de matching mediante un sistema de inecuaciones lineales por Vande Vate (1989).
- Una extensión por Rothblum (1992).
- Roth, Rothblum y Vande Vate (1993), plantearon el modelo de matching como solución de un programa lineal.

- Modelos de matching mediante un sistema de inecuaciones lineales por Vande Vate (1989).
- Una extensión por Rothblum (1992).
- Roth, Rothblum y Vande Vate (1993), plantearon el modelo de matching como solución de un programa lineal.

- Modelos de matching mediante un sistema de inecuaciones lineales por Vande Vate (1989).
- Una extensión por Rothblum (1992).
- Roth, Rothblum y Vande Vate (1993), plantearon el modelo de matching como solución de un programa lineal.

$$
\begin{array}{lll}
Max & \displaystyle\sum_{(i,j)\in A} x_{i,j} & \\
\text{st:} & \displaystyle\sum_{j\in W} x_{m,j} \leq 1 & \text{para } m \in M \\
& \displaystyle\sum_{i\in M} x_{i,w} \leq 1 & \text{para } w \in W \\
& \displaystyle\sum_{j>_m w} x_{m,j} + \sum_{i>_w m} x_{i,w} + x_{m,w} \geq 1 & \text{para } (m,w) \in A \\
& x_{m,w} \geq 0 & \text{para } (m,w) \in M \times W \\
& x_{m,w} = 0 & \text{para } (m,w) \in (M \times W) \setminus A
\end{array}
$$

- Roth, Rothblum y Vande Vate (1993) definieron el concepto de matching fraccionario débilmente estable como solución no necesariamente entera del Programa Lineal.
- El Teorema de Birkhoff, Vande Vate (1989), Rothblum (1992), mostraron que los matching fraccionarios débilmente estables son *combinaciones convexas* de matching estables.
- Gale y Shapley (1962) establecieron la existencia de matching estables. Esto implica que el conjunto de matching fraccionarios débilmente estables es no vacío. Denotaremos este conjunto por $fd(P)$.

- Roth, Rothblum y Vande Vate (1993) definieron el concepto de matching fraccionario débilmente estable como solución no necesariamente entera del Programa Lineal.
- El Teorema de Birkhoff, Vande Vate (1989), Rothblum (1992), mostraron que los matching fraccionarios débilmente estables son *combinaciones convexas* de matching estables.
- Gale y Shapley (1962) establecieron la existencia de matching estables. Esto implica que el conjunto de matching fraccionarios débilmente estables es no vacío. Denotaremos este conjunto por $fd(P)$.

- Roth, Rothblum y Vande Vate (1993) definieron el concepto de matching fraccionario débilmente estable como solución no necesariamente entera del Programa Lineal.
- El Teorema de Birkhoff, Vande Vate (1989), Rothblum (1992), mostraron que los matching fraccionarios débilmente estables son *combinaciones convexas* de matching estables.
- Gale y Shapley (1962) establecieron la existencia de matching estables. Esto implica que el conjunto de matching fraccionarios débilmente estables es no vacío. Denotaremos este conjunto por $fd\left(P\right)$.

Ejemplo

Consideremos el problema de matrimonio estable, el cual involucra 3 hombres y 3 mujeres con las siguientes preferencias.

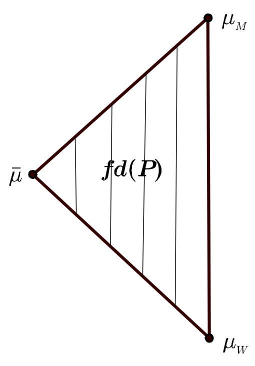
$$
\begin{array}{ll}
P(m_1) = w_1, w_3, w_2 & P(w_1) = m_3, m_2, m_1 \\
P(m_2) = w_2, w_1, w_3 & P(w_2) = m_1, m_3, m_2 \\
P(m_3) = w_3, w_2, w_1 & P(w_3) = m_2, m_1, m_3
\end{array}
$$

Hay tres matching estables cuyos vectores de incidencia asociados son:

$$
x^{\mu_M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad x^{\bar{\mu}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad x^{\mu_W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Ejemplo

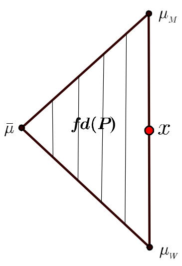
$$fd\left(P\right) = \left\{ x = \alpha_1 x^{\mu_M} + \alpha_2 x^{\bar{\mu}} + \alpha_3 x^{\mu_W} : \sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1 \text{ y } \alpha_i \geq 0 \right\}$$



Ejemplo (de matching **bloqueado** por una pareja)

$$P(m_1) = w_1, w_3, w_2 \qquad P(w_1) = \mathbf{m}_3, m_2, \mathbf{m}_1$$
$$P(m_2) = \mathbf{w}_2, w_1, \mathbf{w}_3 \qquad P(w_2) = m_1, m_3, m_2$$
$$P(m_3) = w_3, w_2, w_1 \qquad P(w_3) = m_2, m_1, m_3$$

$$x = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$



Matching Fraccionarios Fuertemente Estables

Definición (Roth, Rothblum y Vande Vate (1993))

Dado el modelo (M, W, P). *Un* **matching fraccionario fuertemente estable** x, *es un matching fraccionario débilmente estable que cumple:*

$$\left[1 - \sum_{j \geq_m w} x_{m,j}\right] \cdot \left[1 - \sum_{i \geq_w m} x_{i,w}\right] = 0$$

para cada $(m, w) \in A$.

Denotaremos por $SS(P)$ el *conjunto de los matching fraccionarios fuertemente estables* del modelo (M, W, P).

Definición (Roth, Rothblum y Vande Vate (1993))

Dado el modelo (M, W, P). Un **matching fraccionario fuertemente estable** x, *es un matching fraccionario débilmente estable que cumple:*

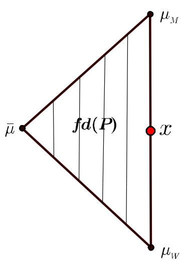
$$\left[1 - \sum_{j \geq_m w} x_{m,j}\right] \cdot \left[1 - \sum_{i \geq_w m} x_{i,w}\right] = 0$$

para cada $(m, w) \in A$.

Denotaremos por $SS(P)$ el *conjunto de los matching fraccionarios fuertemente estables* del modelo (M, W, P).

Ejemplo (de matching **bloqueado** por una pareja)

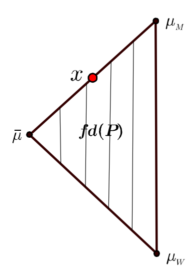
$$x = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$



Observemos que las sumas que fallan son: $\sum_{i \geq_{w_1} m_2} x_{i,1} = \frac{1}{2}$ *y* $\sum_{j \geq_{m_2} w_1} x_{2,j} = \frac{1}{2}$, *lo que contradice la definición.*

Ejemplo

$$x = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$



Ciclos en las Preferencias

Ejemplo (Modificación de preferencias)

Sea $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ *y* $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ *con las siguientes listas de preferencias.*

$$
\begin{array}{ll}
P(m_1) = w_3, w_1, w_2, w_4 & P(w_1) = m_2, m_1, m_3, m_4 \\
P(m_2) = w_2, w_4, w_1, w_3 & P(w_2) = m_3, m_1, m_2, m_4 \\
P(m_3) = w_3, w_4, w_1, w_2 & P(w_3) = m_4, m_3, m_1, m_2 \\
P(m_4) = w_4, w_3, w_1, w_2 & P(w_4) = m_3, m_4, m_1
\end{array}
$$

Calculo $\mu_M = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{pmatrix}$, $\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_2 & m_1 & m_4 & m_3 \end{pmatrix}$

Ejemplo (Modificación de preferencias)

Sea $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ *y* $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ *con las siguientes listas de preferencias.*

$$\begin{array}{ll} P(m_1) = w_3, w_1, w_2, w_4 & P(w_1) = m_2, m_1, m_3, m_4 \\ P(m_2) = w_2, w_4, w_1, w_3 & P(w_2) = m_3, m_1, m_2, m_4 \\ P(m_3) = w_3, w_4, w_1, w_2 & P(w_3) = m_4, m_3, m_1, m_2 \\ P(m_4) = w_4, w_3, w_1, w_2 & P(w_4) = m_3, m_4, m_1 \end{array}$$

Calculo $\mu_M = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{pmatrix}$, $\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_2 & m_1 & m_4 & m_3 \end{pmatrix}$

Paso 1: Removemos de cada hombre los $w_i >_m \mu_M(m)$

$$\begin{array}{lcl}
P(m_1) = \cancel{w_3}, w_1, w_2, w_4 & \longrightarrow & P(m_1) = w_1, w_2, w_4 \\
P(m_2) = w_2, w_4, w_1, w_3 & \longrightarrow & P(m_2) = w_2, w_4, w_1, w_3 \\
P(m_3) = w_3, w_4, w_1, w_2 & \longrightarrow & P(m_3) = w_3, w_4, w_1, w_2 \\
P(m_4) = w_4, w_3, w_1, w_2 & \longrightarrow & P(m_4) = w_4, w_3, w_1, w_2
\end{array}$$

Removemos de cada mujer los $m_i >_w \mu_W(w)$

$$\begin{array}{lcl}
P(w_1) = m_2, m_1, m_3, m_4 & \longrightarrow & P(w_1) = m_2, m_1, m_3, m_4 \\
P(w_2) = \cancel{m_3}, m_1, m_2, m_4 & \longrightarrow & P(w_2) = m_1, m_2, m_4 \\
P(w_3) = m_4, m_3, m_1, m_2 & \longrightarrow & P(w_3) = m_4, m_3, m_1, m_2 \\
P(w_4) = m_3, m_4, m_1 & \longrightarrow & P(w_4) = m_3, m_4, m_1
\end{array}$$

Paso 2: Removemos de cada hombre los $w_i <_m \mu_W(m)$

$$
\begin{array}{lcl}
P(m_1) = w_1, w_2, \cancel{w_4} & \longrightarrow & P(m_1) = w_1, w_2 \\
P(m_2) = w_2, w_4, w_1, \cancel{w_3} & \longrightarrow & P(m_2) = w_2, w_4, w_1 \\
P(m_3) = w_3, w_4, \cancel{w_1}, \cancel{w_2} & \longrightarrow & P(m_3) = w_3, w_4, \\
P(m_4) = w_4, w_3, \cancel{w_1}, \cancel{w_2} & \longrightarrow & P(m_4) = w_4, w_3
\end{array}
$$

Removemos de cada mujer los $m_i <_w \mu_M(w)$

$$
\begin{array}{lcl}
P(w_1) = m_2, m_1, \cancel{m_3}, \cancel{m_4} & \longrightarrow & P(w_1) = m_2, m_1 \\
P(w_2) = m_1, m_2, \cancel{m_4} & \longrightarrow & P(w_2) = m_1, m_2 \\
P(w_3) = m_4, m_3, \cancel{m_1}, \cancel{m_2} & \longrightarrow & P(w_3) = m_4, m_3 \\
P(w_4) = m_3, m_4, \cancel{m_1} & \longrightarrow & P(w_4) = m_3, m_4
\end{array}
$$

Paso 3: Removemos de la lista de los hombres, las mujeres que no son aceptables para cada hombre.

$$\begin{array}{lcl}
P(m_1) = w_1, w_2 & \longrightarrow & P(m_1) = w_1, w_2 \\
P(m_2) = w_2, \cancel{w_4}, w_1 & \longrightarrow & P(m_2) = w_2, w_1 \\
P(m_3) = w_3, w_4, & \longrightarrow & P(m_3) = w_3, w_4 \\
P(m_4) = w_4, w_3 & \longrightarrow & P(m_4) = w_4, w_3
\end{array}$$

Removemos de la lista de las mujeres, los hombres no aceptables para cada mujer.

$$\begin{array}{l}
P(w_1) = m_2, m_1 \\
P(w_2) = m_1, m_2 \\
P(w_3) = m_4, m_3 \\
P(w_4) = m_3, m_4
\end{array}$$

No se elimina nada

De esta forma las listas de preferencias reducidas quedan:

$$
\begin{array}{ll}
P^{\mu_M}(m_1) = w_1, w_2 & P^{\mu_M}(w_1) = m_2, m_1 \\
P^{\mu_M}(m_2) = w_2, w_1 & P^{\mu_M}(w_2) = m_1, m_2 \\
P^{\mu_M}(m_3) = w_3, w_4 & P^{\mu_M}(w_3) = m_4, m_3 \\
P^{\mu_M}(m_4) = w_4, w_3 & P^{\mu_M}(w_4) = m_3, m_4
\end{array}
$$

Irving y Leather (1986) introdujeron el concepto de ciclos. Estos ciclos pueden ser usados para generar todos los matching estables.

Ejemplo (Ciclo en la preferencia P^{μ_M})

$$P^{\mu_M}(m_1) = \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$$
$$P^{\mu_M}(m_2) = \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1$$
$$P^{\mu_M}(m_3) = w_3, w_4$$
$$P^{\mu_M}(m_4) = w_4, w_3$$

Irving y Leather (1986) introdujeron el concepto de ciclos. Estos ciclos pueden ser usados para generar todos los matching estables.

Ejemplo (Ciclo en la preferencia P^{μ_M})

$$
\begin{aligned}
P^{\mu_M}(m_1) &= \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \\
P^{\mu_M}(m_2) &= \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1 \\
P^{\mu_M}(m_3) &= w_3, w_4 \\
P^{\mu_M}(m_4) &= w_4, w_3
\end{aligned}
$$

Ejemplo (Matching Cíclico)

Si $\sigma = \{m_1, m_2\}$ *entonces* μ_M *en azul y* $\mu_M(\sigma)$ *en rojo*

$$
\begin{array}{lcl}
P^{\mu_M}(m_1) = \color{blue}{w_1}, w_2 & \longrightarrow & P^{\mu_M}(m_1) = w_1, \color{red}{w_2} \\
P^{\mu_M}(m_2) = \color{blue}{w_2}, w_1 & \longrightarrow & P^{\mu_M}(m_2) = w_2, \color{red}{w_1} \\
P^{\mu_M}(m_3) = \color{blue}{w_3}, w_4 & \longrightarrow & P^{\mu_M}(m_3) = \color{red}{w_3}, w_4 \\
P^{\mu_M}(m_4) = \color{blue}{w_4}, w_3 & \longrightarrow & P^{\mu_M}(m_4) = \color{red}{w_4}, w_3
\end{array}
$$

Proposición (Irving y Leather 1986)

Sea P^{μ} *un perfil reducido de preferencias para* (M, W, P). *Si* $\mu(\sigma)$ *es un matching cíclico de* μ, *entonces* $\mu(\sigma)$ *es un matching estable en las preferencias originales.*

Ejemplo (Matching Cíclico)

Si $\sigma = \{m_1, m_2\}$ *entonces* μ_M *en azul y* $\mu_M(\sigma)$ *en rojo*

$$
\begin{array}{lcl}
P^{\mu_M}(m_1) = w_1, w_2 & \longrightarrow & P^{\mu_M}(m_1) = w_1, w_2 \\
P^{\mu_M}(m_2) = w_2, w_1 & \longrightarrow & P^{\mu_M}(m_2) = w_2, w_1 \\
P^{\mu_M}(m_3) = w_3, w_4 & \longrightarrow & P^{\mu_M}(m_3) = w_3, w_4 \\
P^{\mu_M}(m_4) = w_4, w_3 & \longrightarrow & P^{\mu_M}(m_4) = w_4, w_3
\end{array}
$$

Proposición (Irving y Leather 1986)

Sea P^{μ} *un perfil reducido de preferencias para* (M, W, P). *Si* $\mu(\sigma)$ *es un matching cíclico de* μ, *entonces* $\mu(\sigma)$ *es un matching estable en las preferencias originales.*

Definición

Sea P^{μ} el perfil reducido de preferencias. Sea $\Phi(\mu) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ el **conjunto de ciclos de** P^{μ}*. Para todo conjunto $K \subseteq \Phi(\mu)$ definimos $\mu_K = \mu(K)$. Es decir μ_K es el matching cíclico que se obtiene al verificar todos los ciclos del conjunto K.*

Denotamos por

$$\mathcal{M}_{\mu} = \{\mu' \in \mathcal{S}(P) : \text{existe } K \subseteq \Phi(\mu), \mu' = \mu(K)\}$$

al **conjunto de todos los matching estables cíclicos de** μ, para la lista de preferencias reducida P^{μ}.

Definición

Sea P^{μ} el perfil reducido de preferencias. Sea $\Phi(\mu) = \{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$ el **conjunto de ciclos de** P^{μ}*. Para todo conjunto $K \subseteq \Phi(\mu)$ definimos $\mu_K = \mu(K)$. Es decir μ_K es el matching cíclico que se obtiene al verificar todos los ciclos del conjunto K.*

Denotamos por

$$\mathcal{M}_{\mu} = \left\{\mu' \in \mathcal{S}(P) : \text{existe } K \subseteq \Phi(\mu), \mu' = \mu(K)\right\}$$

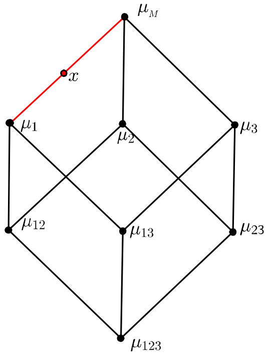
al **conjunto de todos los matching estables cíclicos de** μ, para la lista de preferencias reducida P^{μ}.

Caracterización de un Matching Fraccionario Fuertemente Estable

Sea P^{μ} un perfil reducido de preferencias, σ un ciclo de P^{μ}.

Proposición

$x = \alpha x^{\mu} + (1-\alpha)\, x^{\mu(\sigma)}$, $0 \leq \alpha \leq 1$ *es un matching fraccionario fuertemente estable en* P.

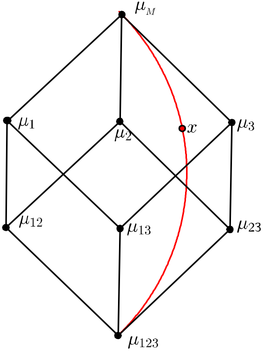


Reticulado

Sea P^{μ} un perfil reducido de preferencias, sea $\mu_k \in \mathcal{M}_{\mu}$.

Proposición

$x = \alpha x^{\mu} + (1 - \alpha)\, x^{\mu_K}$, $0 \leq \alpha \leq 1$ *es un matching fraccionario fuertemente estable en* P.

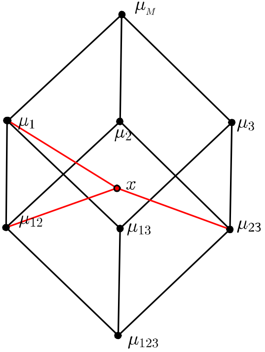


Reticulado

Sea P^{μ} un perfil reducido de preferencias, $\{\mu_1, ...\mu_t\} \subseteq \mathcal{M}_{\mu}$.

Proposición

$x = \sum_{l=1}^{t} \alpha_l x^{\mu_l}$, $0 \leq \alpha_l \leq 1$, $\sum_{l=1}^{t} \alpha_l = 1$ *es un matching fraccionario fuertemente estable en* P.

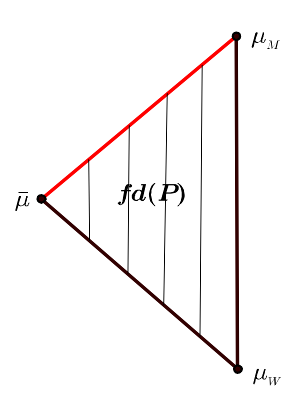


Reticulado

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
P(m_1) &= \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3, w_2 \\
P(m_2) &= \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1, w_3 \\
P(m_3) &= \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_2, w_1
\end{aligned}
$$

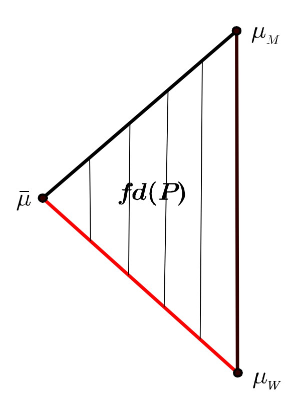
	m_1	m_2	m_3
μ_M	w_1	w_2	w_3
$\bar{\mu}$	w_3	w_1	w_2
μ_W	w_2	w_3	w_1



Ejemplo

$$P(m_1) = \cancel{w}_1, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_2$$
$$P(m_2) = \cancel{w}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3$$
$$P(m_3) = \cancel{w}_3, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1$$

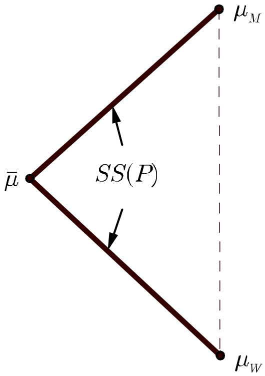
	m_1	m_2	m_3
μ_M	w_1	w_2	w_3
$\bar{\mu}$	w_3	w_1	w_2
μ_W	w_2	w_3	w_1



Proposición

Dado el modelo (M, W, P). *Si* x *es un matching fraccionario fuertemente estable, entonces existe* $\mu \in S(P)$ *tal que*

$$x \in Conv\left\{\mathcal{M}_{\mu}\right\}.$$



Caracterización

Teorema

Dado el modelo (M, W, P). Un matching fraccionario x es fuertemente estable si y solo si $x \in Conv\{\mathcal{M}_\mu\}$ para algún matching estable μ.

El conjunto de todos los matching fraccionarios fuertemente estables queda dado por:

$$SS(P) = \bigcup_{\mu \in S(P)} Conv\{\mathcal{M}_\mu\}.$$

Caracterización

Teorema

Dado el modelo (M, W, P). Un matching fraccionario x es fuertemente estable si y solo si $x \in Conv\left\{\mathcal{M}_{\mu}\right\}$ para algún matching estable μ.

El conjunto de todos los matching fraccionarios fuertemente estables queda dado por:

$$SS(P) = \bigcup_{\mu \in S(P)} Conv\left\{\mathcal{M}_{\mu}\right\}.$$

Muchas Gracias

Bibliografía

- Birkhoff, G. , "Tres observaciones sobre el algebra lineal" Rev. Universidad Nacional de Tucuman. Ser. A 5:147-150 (1946).
- Gale, D. y Shapley, L. , "Collage Admissions and Stability of Marriage", Amer. Math. Monthly, 69:9-15 (1962).
- McVitie, D. G y Wilson, L. B. "Three procedures for the stable matching problem",ACM Algorithm 411. Comm. of the ACM 14:491-492 (1971).
- Roth, A., Rothblum, U. y Vande Vate, J. , "Stable matchings, optimal assignments and linear programming". Math. Oper. Res., 18:803–828 (1993).
- Rothblum, U. G "Characterization of stable matching as extreme proint of a polytope", Mathematical Programming North-Holland 54: 57-67 (1992).
- Vande Vate, J. H., "Linear programming brings marital bliss". Oper. Res. Lett., 8:147–153 (1989).

Bibliografía

- Gusfield D. e Irving R. "The Stable Marriage Problem. Structure and Algorithms" The MIT Press (1989)
- Knuth, D., "Marriages Stables et leurs relations avec d'autres problèmes combinatoires". Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal. Translated as Stable Marriage and Its Relation to Other Combinatorial Problems by
- Roth, A. y Sotomayor, M. , "Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis", Vol. 18 de Econometric Society Monographs. Cambridge University Press, Cambridge England (1990).
- Schrijver, A. "Theory of Linear and Integer programing" John Wiley & Sons, Chichester.