

# Grafos vértice intersección de caminos en una grilla: caracterización dentro de la clase de los grafos bloque

L. Alcón F. Bonomo M. P. Mazzoleni

Dto. de Matemática, FCE-UNLP, La Plata, Argentina  
Dto. de Computación FCEN-UBA, Buenos Aires, Argentina

UMA 2016

# Introducción:

Grafos VPG:  
caracterización  
dentro de la  
clase de los  
grafos bloque

Alcón,  
Bonomo,  
Mazzoleni

Una **representación VPG** de un grafo  $G$  es una colección de caminos en una grilla donde los caminos representan a los vértices de  $G$  de manera que:

dos vértices son adyacentes en  $G$  si y sólo si los caminos correspondientes comparten al menos un vértice de la grilla.

Un grafo que tiene una representación VPG es llamado un **grafo VPG**.

Introducción

Grafos bloque

Bibliografía

# Introducción:

Grafos VPG:  
caracterización  
dentro de la  
clase de los  
grafos bloque

Alcón,  
Bonomo,  
Mazzoleni

Una **representación VPG** de un grafo  $G$  es una colección de caminos en una grilla donde los caminos representan a los vértices de  $G$  de manera que:

dos vértices son adyacentes en  $G$  si y sólo si los caminos correspondientes comparten al menos un vértice de la grilla.

Un grafo que tiene una representación VPG es llamado un **grafo VPG**.

Introducción

Grafos bloque

Bibliografía



En este trabajo, consideramos la subclase  $B_0$ -VPG.

Una **representación  $B_0$ -VPG** de  $G$  es una representación VPG en la cual cada camino representante es horizontal o vertical. Un grafo es  **$B_0$ -VPG** si tiene una representación  $B_0$ -VPG.

Reconocer la clase de grafos  $B_0$ -VPG es un problema **NP-completo**. Aunque, existe un algoritmo **polinomial** para decidir si un grafo **Cordal** dado es  $B_0$ -VPG (ver [5]).

En este trabajo, consideramos la subclase  $B_0$ -VPG.

Una **representación  $B_0$ -VPG** de  $G$  es una representación VPG en la cual cada camino representante es horizontal o vertical. Un grafo es  **$B_0$ -VPG** si tiene una representación  $B_0$ -VPG.

Reconocer la clase de grafos  $B_0$ -VPG es un problema **NP-completo**. Aunque, existe un algoritmo **polinomial** para decidir si un grafo **Cordal** dado es  $B_0$ -VPG (ver [5]).

Golumbic y Ries dieron una **caracterización por subgrafos inducidos prohibidos** para las siguientes tres subclases de Cordal  $B_0$ -VPG:

- ✓ Split  $B_0$ -VPG,
- ✓ Cordal  $B_0$ -VPG libre de toro,
- ✓ Cordal  $B_0$ -VPG libre de garra.

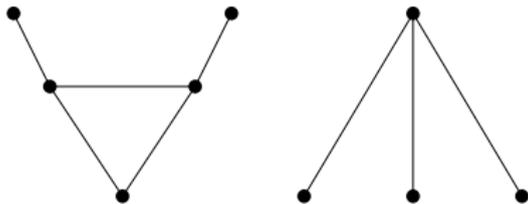


Figure: Grafo toro y grafo garra.

Además, para la clase Split  $B_0$ -VPG esto provee un algoritmo de reconocimiento en tiempo lineal.



En este trabajo estudiamos otra subclase de Cordal  
 $B_0$ -VPG: grafos bloque  $B_0$ -VPG.

Presentamos una caracterización por subgrafos inducidos  
prohibidos minimales de esta clase.

Además, la prueba del teorema principal provee un  
algoritmo de reconocimiento alternativo para los grafos  
 $B_0$ -VPG en la clase de los grafos bloque.

En este trabajo estudiamos otra subclase de Cordal  
 $B_0$ -VPG: grafos bloque  $B_0$ -VPG.

Presentamos una **caracterización** por **subgrafos inducidos prohibidos minimales** de esta clase.

Además, la prueba del teorema principal provee un **algoritmo de reconocimiento** alternativo para los grafos  $B_0$ -VPG en la clase de los **grafos bloque**.

En este trabajo estudiamos otra subclase de Cordal  
 $B_0$ -VPG: grafos bloque  $B_0$ -VPG.

Presentamos una caracterización por subgrafos inducidos  
prohibidos minimales de esta clase.

Además, la prueba del teorema principal provee un  
algoritmo de reconocimiento alternativo para los grafos  
 $B_0$ -VPG en la clase de los grafos bloque.

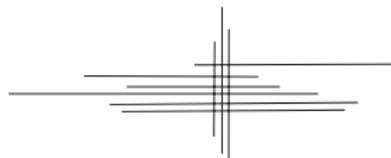
El siguiente lema es de gran importancia para obtener nuestros resultados:

### Lema (Golumbic et al.)

*En toda  $B_0$ -VPG representación de un clique, todos los caminos correspondientes tienen un punto en común en la grilla.*



Line clique



Cross clique

Figure: Un line clique y un cross clique.

# Grafos bloque:

Un **grafo bloque** es un grafo conexo en el cual toda componente 2-conexa (bloque) es un clique.

Un grafo es **Cordal** si no tiene ciclos inducidos de longitud mayor o igual que cuatro.

Un **diamante** es un grafo obtenido de  $K_4$  borrando una arista.



Figure: Grafo diamante.

⊗ Los grafos bloque son Cordales y libres de diamantes.

# Grafos bloque:

Grafos VPG:  
caracterización  
dentro de la  
clase de los  
grafos bloque

Alcón,  
Bonomo,  
Mazzoleni

Un **grafo bloque** es un grafo conexo en el cual toda componente 2-conexa (bloque) es un clique.

Un grafo es **Cordal** si no tiene ciclos inducidos de longitud mayor o igual que cuatro.

Un **diamante** es un grafo obtenido de  $K_4$  borrando una arista.



Figure: Grafo diamante.

⊗ Los grafos bloque son Cordales y libres de diamantes.

Introducción

Grafos bloque

Bibliografía

# Grafos bloque:

Grafos VPG:  
caracterización  
dentro de la  
clase de los  
grafos bloque

Alcón,  
Bonomo,  
Mazzoleni

Un **grafo bloque** es un grafo conexo en el cual toda componente 2-conexa (bloque) es un clique.

Un grafo es **Cordal** si no tiene ciclos inducidos de longitud mayor o igual que cuatro.

Un **diamante** es un grafo obtenido de  $K_4$  borrando una arista.

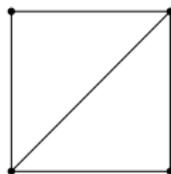


Figure: Grafo diamante.

Introducción

Grafos bloque

Bibliografía

⊗ Los grafos bloque son Cordales y libres de diamantes.

# Grafos bloque:

Grafos VPG:  
caracterización  
dentro de la  
clase de los  
grafos bloque

Alcón,  
Bonomo,  
Mazzoleni

Un **grafo bloque** es un grafo conexo en el cual toda componente 2-conexa (bloque) es un clique.

Un grafo es **Cordal** si no tiene ciclos inducidos de longitud mayor o igual que cuatro.

Un **diamante** es un grafo obtenido de  $K_4$  borrando una arista.

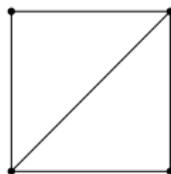


Figure: Grafo diamante.

⊗ Los grafos bloque son Cordales y libres de diamantes.

Introducción

Grafos bloque

Bibliografía

Un **vértice de corte** es un vértice tal que al removerlo aumenta el número de componentes conexas.

Un **endbloque** es un bloque que tiene exactamente un vértice de corte.

Un **almost endbloque** es un bloque  $B$  que tiene al menos dos vértices de corte y tal que exactamente uno de ellos pertenece a bloques (distintos de  $B$ ) que no son endbloques.

Un **internal bloque** es un bloque que no es ni endbloque ni almost endbloque.

Un **vértice de corte** es un vértice tal que al removerlo aumenta el número de componentes conexas.

Un **endbloque** es un bloque que tiene exactamente un vértice de corte.

Un **almost endbloque** es un bloque  $B$  que tiene al menos dos vértices de corte y tal que exactamente uno de ellos pertenece a bloques (distintos de  $B$ ) que no son endbloques.

Un **internal bloque** es un bloque que no es ni endbloque ni almost endbloque.

Un **vértice de corte** es un vértice tal que al removerlo aumenta el número de componentes conexas.

Un **endbloque** es un bloque que tiene exactamente un vértice de corte.

Un **almost endbloque** es un bloque  $B$  que tiene al menos dos vértices de corte y tal que exactamente uno de ellos pertenece a bloques (distintos de  $B$ ) que no son endbloques.

Un **internal bloque** es un bloque que no es ni endbloque ni almost endbloque.

Un **vértice de corte** es un vértice tal que al removerlo aumenta el número de componentes conexas.

Un **endbloque** es un bloque que tiene exactamente un vértice de corte.

Un **almost endbloque** es un bloque  $B$  que tiene al menos dos vértices de corte y tal que exactamente uno de ellos pertenece a bloques (distintos de  $B$ ) que no son endbloques.

Un **internal bloque** es un bloque que no es ni endbloque ni almost endbloque.

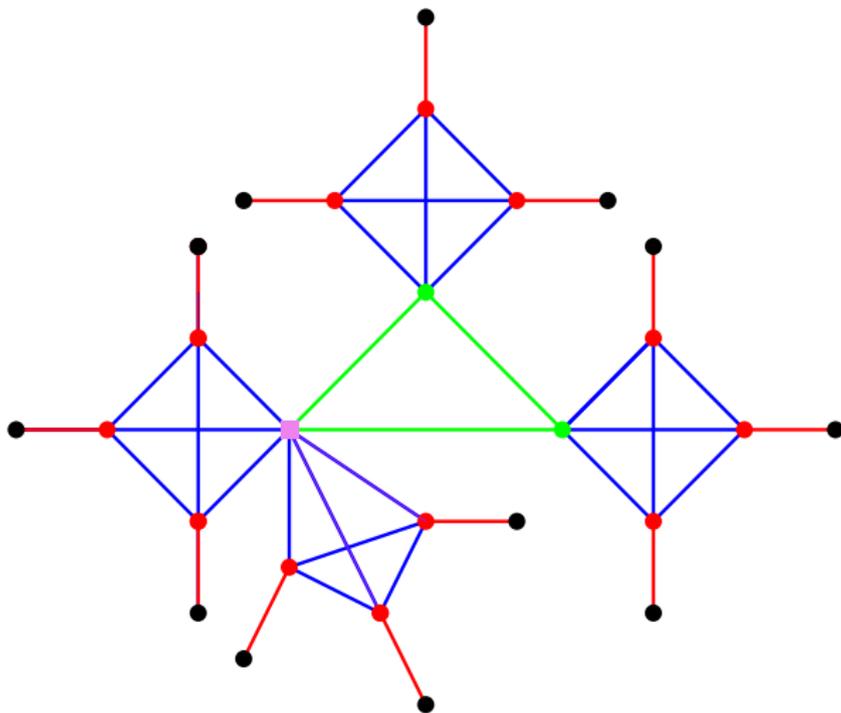


Figure: Endbloque=rojo, almost endbloque=azul, internal bloque=verde.

Un **3-vértice de corte** es un vértice de corte que pertenece a exactamente 3 bloques.

Un **2-vértice de corte** es un vértice de corte que pertenece a exactamente 2 bloques, uno de los cuales es un endbloque.



Una **araña flaca**  $N_n$  es un grafo cuyos  $2n$  vértices se partitionan en un clique  $K = \{c_1, \dots, c_n\}$  y un conjunto estable  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  tal que  $s_i \sim c_j$  si y sólo si  $i = j$ .

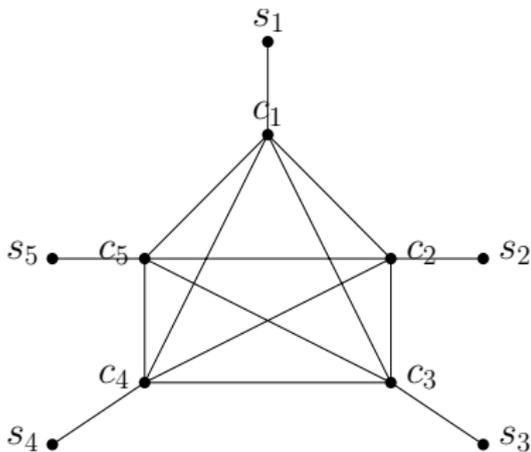


Figure: La araña flaca  $N_5$ .

Golumbic y Ries probaron que  $N_5 \notin B_0\text{-VPG}$ .

⊛ Sea  $\mathcal{F}$  la familia de grafos bloque obtenidos de  $N_5$  mediante una secuencia finita de aplicaciones del siguiente procedimiento:

★ considerar un subgrafo completo de tamaño 4 que tenga al menos dos 2-vértices de corte digamos  $v_1$  y  $v_2$ , con endbloques  $B_1$  y  $B_2$ , respectivamente;

★ contraer  $v_1$  y  $v_2$  en un único vértice  $x$ ;

★ reemplazar  $B_1 - \{x\}$  y  $B_2 - \{x\}$  por dos arañas flacas de tamaño 3, haciendo  $x$  adyacente a los vértices de los cliques de ambas arañas.

⊛ Sea  $\mathcal{F}$  la familia de grafos bloque obtenidos de  $N_5$  mediante una secuencia finita de aplicaciones del siguiente procedimiento:

★ considerar un subgrafo completo de tamaño 4 que tenga al menos dos 2-vértices de corte digamos  $v_1$  y  $v_2$ , con endbloques  $B_1$  y  $B_2$ , respectivamente;

★ contraer  $v_1$  y  $v_2$  en un único vértice  $x$ ;

★ reemplazar  $B_1 - \{x\}$  y  $B_2 - \{x\}$  por dos arañas flacas de tamaño 3, haciendo  $x$  adyacente a los vértices de los cliques de ambas arañas.

⊛ Sea  $\mathcal{F}$  la familia de grafos bloque obtenidos de  $N_5$  mediante una secuencia finita de aplicaciones del siguiente procedimiento:

★ considerar un subgrafo completo de tamaño 4 que tenga al menos dos 2-vértices de corte digamos  $v_1$  y  $v_2$ , con endbloques  $B_1$  y  $B_2$ , respectivamente;

★ contraer  $v_1$  y  $v_2$  en un único vértice  $x$ ;

★ reemplazar  $B_1 - \{x\}$  y  $B_2 - \{x\}$  por dos arañas flacas de tamaño 3, haciendo  $x$  adyacente a los vértices de los cliques de ambas arañas.

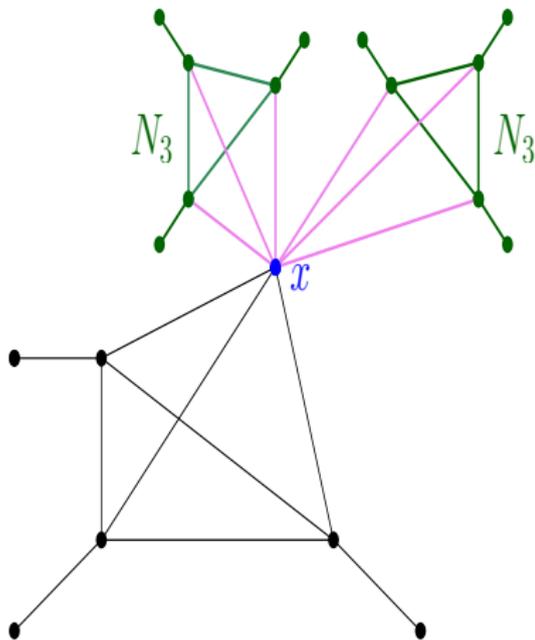
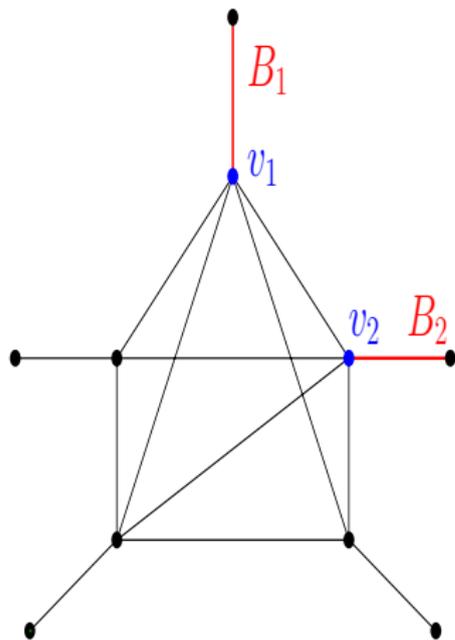
⊛ Sea  $\mathcal{F}$  la familia de grafos bloque obtenidos de  $N_5$  mediante una secuencia finita de aplicaciones del siguiente procedimiento:

★ considerar un subgrafo completo de tamaño 4 que tenga al menos dos 2-vértices de corte digamos  $v_1$  y  $v_2$ , con endbloques  $B_1$  y  $B_2$ , respectivamente;

★ contraer  $v_1$  y  $v_2$  en un único vértice  $x$ ;

★ reemplazar  $B_1 - \{x\}$  y  $B_2 - \{x\}$  por dos arañas flacas de tamaño 3, haciendo  $x$  adyacente a los vértices de los cliques de ambas arañas.

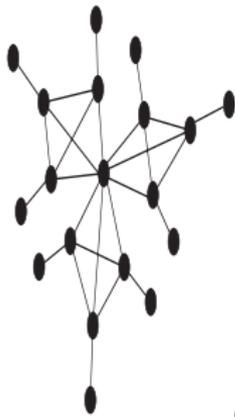
En la siguiente figura ofrecemos dos ejemplos de grafos en  $\mathcal{F}$ .



Más ejemplos de grafos en  $\mathcal{F}$ .



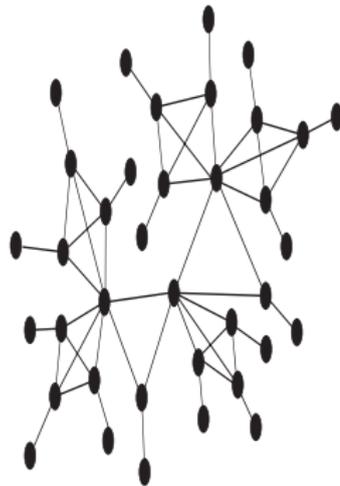
(a)



(b)



(c)



(d)

## Proposición

*La familia  $\mathcal{F}$  es infinita.*

## Corolario

*Cada grafo en  $\mathcal{F}$  es minimal, esto es, no contiene a ningún otro grafo de  $\mathcal{F}$  como subgrafo inducido.*

## Lema

*Los grafos de  $\mathcal{F}$  no son  $B_0$ -VPG.*

## Proposición

*La familia  $\mathcal{F}$  es infinita.*

## Corolario

*Cada grafo en  $\mathcal{F}$  es minimal, esto es, no contiene a ningún otro grafo de  $\mathcal{F}$  como subgrafo inducido.*

## Lema

*Los grafos de  $\mathcal{F}$  no son  $B_0$ -VPG.*

## Proposición

*La familia  $\mathcal{F}$  es infinita.*

## Corolario

*Cada grafo en  $\mathcal{F}$  es minimal, esto es, no contiene a ningún otro grafo de  $\mathcal{F}$  como subgrafo inducido.*

## Lema

*Los grafos de  $\mathcal{F}$  no son  $B_0$ -VPG.*

El siguiente teorema permite determinar si un grafo bloque VPG es  $B_0$ -VPG en términos de subgrafos inducidos prohibidos minimales.

## Teorema

*Sea  $G$  un grafo bloque VPG.*

*$G$  es  $B_0$ -VPG si y sólo si  $G$  no tiene a ningún grafo de  $\mathcal{F}$  como subgrafo inducido.*

*Más aún, los grafos de  $\mathcal{F}$  son prohibidos minimales de  $B_0$ -VPG.*

# Bibliografía:

-  L. Alcón, F. Bonomo, M.P. Mazzoleni, *Vertex intersection graphs of paths on a grid: characterization within block graphs.*, Submitted to Graphs Combin. (2016). arXiv:1510.09174.
-  A. Asinowski, E. Cohen, M.C. Golumbic, V. Limouzy, M. Lipshteyn, M. Stern, *Vertex intersection graphs of paths on a grid*, J. Graph Algorithms Appl. 16(2) (2012) 129-150.
-  J.A. Bondy, U.S.R. Murty, *Graph Theory*, Springer, New York, (2007).
-  M.L. Brady, M. Sarrafzadeh, *Stretching a knock-knee layout of multilayer wiring*, IEEE Trans. Comput. 39 (1990) 148-151.
-  S. Chaplick, E. Cohen, J. Stacho, *Recognizing some subclasses of vertex intersection graphs of 0-bend paths in a grid*, Lecture Notes in Comput. Sci. 6986 (2011) 319-330.
-  M.C. Golumbic, B. Ries, *On the intersection graphs of orthogonal line segments in the plane: characterizations of some subclasses of chordal graphs*, Graphs Combin. 29 (2013) 499-517.
-  F. Harary, G. Prins, *The block-cutpoint-tree of a graph*, Publ. Math. Debrecen 13 (1966) 103-107.

# Muchas Gracias!!