El poliedro de Códigos de Identificación en familias de grafos split

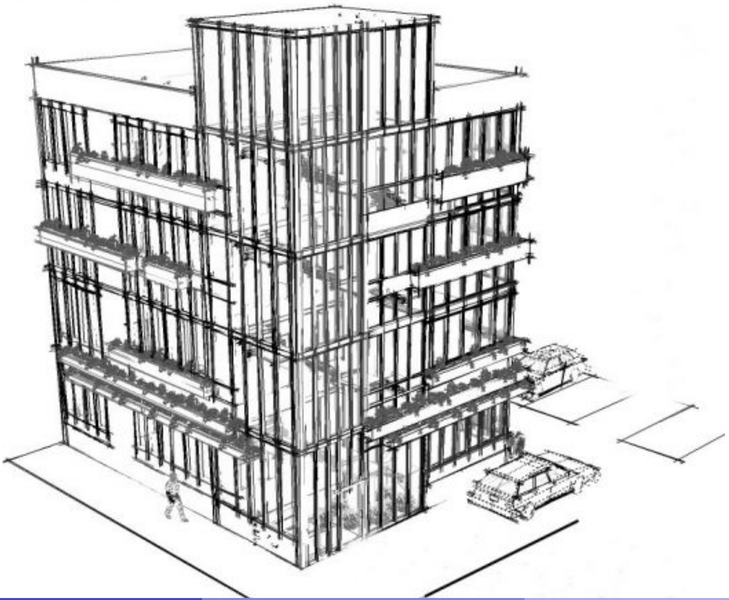
G. Argiroffo[1] S. Bianchi[1] Y. Lucarini[1,2]

[1] Universidad Nacional de Rosario. Dept. de Matemática.

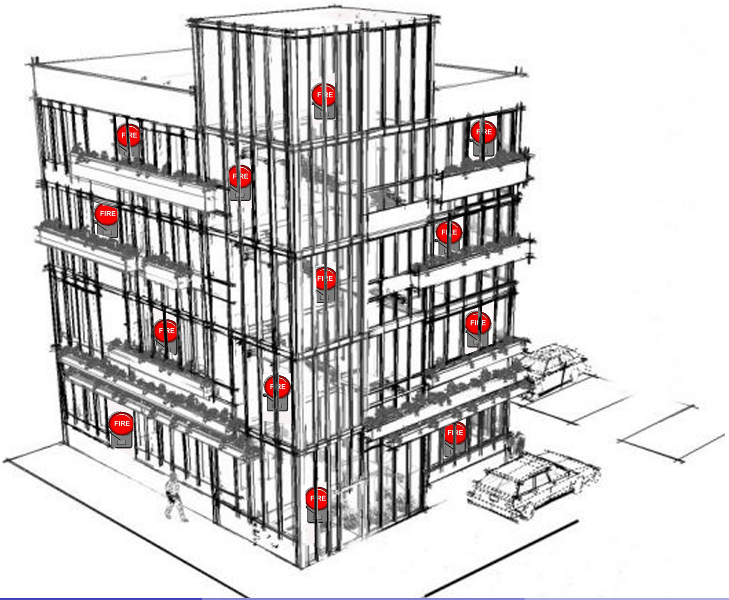
[2] CONICET

LXV Reunión anual de comunicaciones científicas,
Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca.

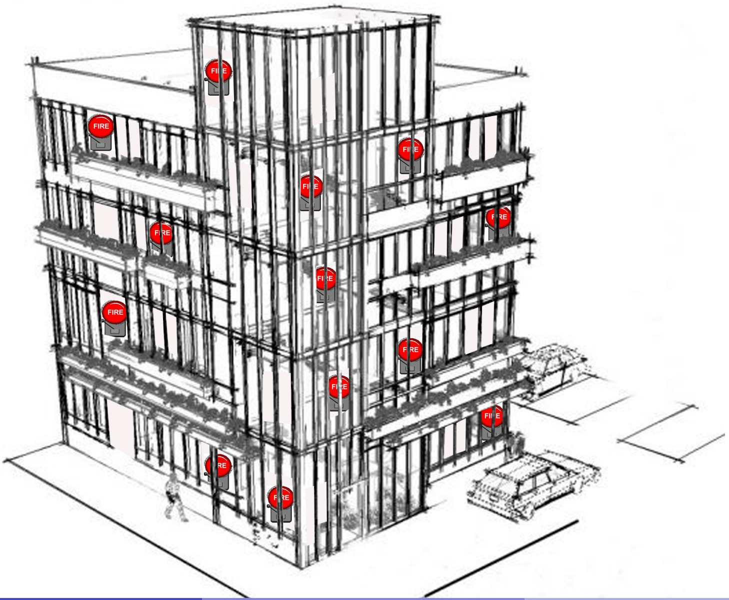
UNA APLICACIÓN



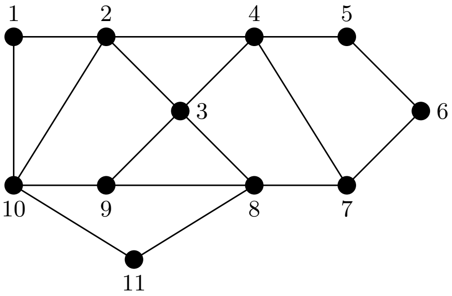
Una aplicación



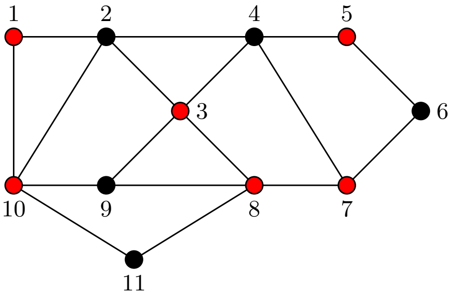
Una aplicación



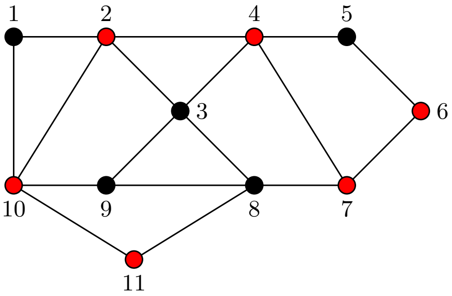
Una aplicación



Una aplicación



Una aplicación



Introducción

Sea $G = (V, E)$

$N[i] = \{j \in V : d(i,j) \leq 1\}$

INTRODUCCIÓN

Sea $G = (V, E)$

$N[i] = \{j \in V : d(i,j) \leq 1\}$

código de identificación de G: $C \subseteq V$ tal que

Sea $G = (V, E)$

$N[i] = \{j \in V : d(i,j) \leq 1\}$

código de identificación de G: $C \subseteq V$ tal que

- $N[i] \cap C \neq \emptyset \quad \forall i \in V$

Sea $G = (V, E)$

$N[i] = \{j \in V : d(i,j) \leq 1\}$

código de identificación de G: $C \subseteq V$ tal que

- $N[i] \cap C \neq \emptyset \quad \forall i \in V$
- $N[i] \cap C \neq N[j] \cap C \qquad \forall i \neq j$

Sea $G = (V, E)$

$N[i] = \{j \in V : d(i,j) \leq 1\}$

código de identificación de G: $C \subseteq V$ tal que

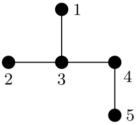
- $N[i] \cap C \neq \emptyset \quad \forall i \in V$ conjunto de identificación de i
- $N[i] \cap C \neq N[j] \cap C \qquad \forall i \neq j$

Sea $G = (V, E)$

$N[i] = \{j \in V : d(i,j) \leq 1\}$

código de identificación de G: $C \subseteq V$ tal que

- $N[i] \cap C \neq \emptyset \quad \forall i \in V$ conjunto de identificación de i
- $N[i] \cap C \neq N[j] \cap C \quad \forall i \neq j$

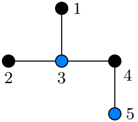


Sea $G = (V, E)$

$N[i] = \{j \in V : d(i,j) \leq 1\}$

código de identificación de G: $C \subseteq V$ tal que

- $N[i] \cap C \neq \emptyset \quad \forall i \in V$ conjunto de identificación de i
- $N[i] \cap C \neq N[j] \cap C \qquad \forall i \neq j$



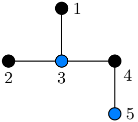
INTRODUCCIÓN

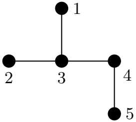
Sea $G = (V, E)$

$N[i] = \{j \in V : d(i,j) \leq 1\}$

código de identificación de G: $C \subseteq V$ tal que

- $N[i] \cap C \neq \emptyset \quad \forall i \in V$ conjunto de identificación de i
- $N[i] \cap C \neq N[j] \cap C \quad \forall i \neq j$



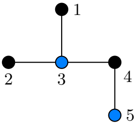


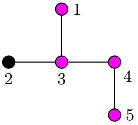
Sea $G=(V,E)$

$N[i]=\{j\in V : d(i,j)\leq 1\}$

código de identificación de G: $C\subseteq V$ tal que

- $N[i]\cap C\neq\emptyset \quad \forall i\in V$ conjunto de identificación de i
- $N[i]\cap C\neq N[j]\cap C \qquad \forall i\neq j$





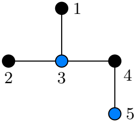
INTRODUCCIÓN

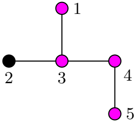
Sea $G=(V,E)$

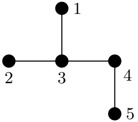
$N[i]=\{j\in V: d(i,j)\leq 1\}$

código de identificación de G: $C\subseteq V$ tal que

- $N[i]\cap C\neq\emptyset \quad \forall i\in V$ conjunto de identificación de i
- $N[i]\cap C\neq N[j]\cap C \qquad \forall i\neq j$





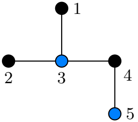


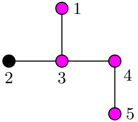
Sea $G=(V,E)$

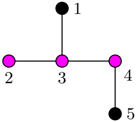
$N[i]=\{j\in V : d(i,j)\leq 1\}$

código de identificación de G: $C\subseteq V$ tal que

- $N[i]\cap C\neq\emptyset \quad \forall i\in V$ conjunto de identificación de i
- $N[i]\cap C\neq N[j]\cap C \qquad \forall i\neq j$



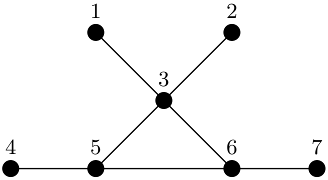




Una aplicación

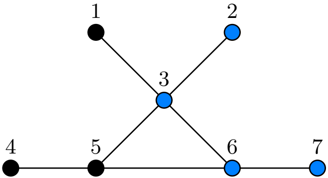
Detección de incendio en un edificio

Detección de incendio en un edificio

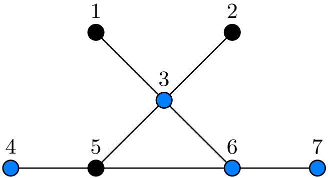


Una aplicación

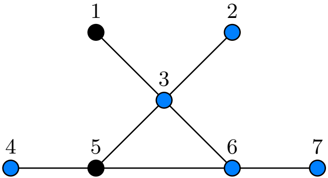
Detección de incendio en un edificio



Detección de incendio en un edificio

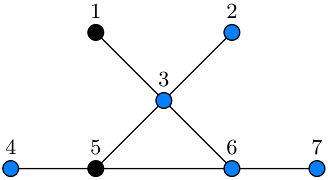


Detección de incendio en un edificio



Detección de incendio en un edificio

Minimizar el número de alarmas!



Dado $G = (V, E)$, se busca:

encontrar un código de identificación de tamaño mínimo

Dado $G = (V, E)$, se busca:

encontrar un código de identificación de tamaño mínimo

$\gamma^{ID}(G) := min\{|C| : C$ código de identificación en $G\}$

Sea $G = (V, E)$

$C \subset V \longrightarrow \chi^C \in \{0,1\}^V$ vector de incidencia de C.

POLIEDRO DE CÓDIGO DE IDENTIFICACIÓN

Sea $G = (V, E)$

$C \subset V \longrightarrow \chi^C \in \{0,1\}^V$ vector de incidencia de C.

Si $C \subset V$ es un código de identificación luego,

Poliedro de código de identificación

Sea $G = (V, E)$

$C \subset V \longrightarrow \chi^C \in \{0,1\}^V$ vector de incidencia de C.

Si $C \subset V$ es un código de identificación luego,

- $N[i] \cap C \neq \emptyset \qquad \forall i \in V$
- $N[i] \cap C \neq N[j] \cap C \qquad \forall i \neq j$

Poliedro de código de identificación

Sea $G = (V, E)$

$C \subset V \longrightarrow \chi^C \in \{0,1\}^V$ vector de incidencia de C.

Si $C \subset V$ es un código de identificación luego,

- $N[i] \cap C \neq \emptyset \qquad \forall i \in V$
- $(N[i] \, \Delta \, N[j]) \cap C \neq \emptyset \qquad \forall i \neq j$

Sea $G=(V,E)$

$C \subset V \longrightarrow \chi^C \in \{0,1\}^V$ vector de incidencia de C.

Si $C \subset V$ es un código de identificación luego,

- $N[i] \cap C \neq \emptyset \qquad \forall i \in V$
- $(N[i]\,\Delta\, N[j]) \cap C \neq \emptyset \qquad \forall i \neq j$

Sea $M_{ID}(G)$ una matriz cuyas filas son los vectores de incidencia de:

- $N[i] \qquad \forall i \in V$
- $N[i]\,\Delta\, N[j] \qquad \forall i,j \in V$

POLIEDRO DE CÓDIGO DE IDENTIFICACIÓN

Sea $G = (V, E)$

$C \subset V \longrightarrow \chi^C \in \{0,1\}^V$ vector de incidencia de C.

Si $C \subset V$ es un código de identificación luego,

- $N[i] \cap C \neq \emptyset \qquad \forall i \in V$
- $(N[i] \Delta N[j]) \cap C \neq \emptyset \qquad \forall i \neq j$

Sea $M_{ID}(G)$ una matriz cuyas filas son los vectores de incidencia de:

- $N[i] \qquad \forall i \in V$
- $N[i] \Delta N[j] \qquad \forall i,j \in V$

Si $C \subset V$ es un código de identificación luego $M_{ID}(G)\chi^C \geq \mathbf{1}$

Poliedro de código de identificación

Sea $C_{ID}(G)$ submatriz de $M_{ID}(G)$ ($C_{ID}(G)$ *matriz clutter del código de identificación*)

El Poliedro de Código de Identificación de G

$$P_{ID}(G) = conv\{x \in \mathbb{Z}^V : C_{ID}(G)x \geq \mathbf{1}\}$$

Sea $C_{ID}(G)$ submatriz de $M_{ID}(G)$ ($C_{ID}(G)$ *matriz clutter del código de identificación*)
El Poliedro de Código de Identificación de G

$$P_{ID}(G) = conv\{x \in \mathbb{Z}^V : C_{ID}(G)x \geq \mathbf{1}\}$$

El problema de mínimo código de identificación en G puede formularse como

POLIEDRO DE CÓDIGO DE IDENTIFICACIÓN

Sea $C_{ID}(G)$ submatriz de $M_{ID}(G)$ ($C_{ID}(G)$ *matriz clutter del código de identificación*)

El Poliedro de Código de Identificación de G

$$P_{ID}(G) = conv\{x \in \mathbb{Z}^V : C_{ID}(G)x \geq \mathbf{1}\}$$

El problema de mínimo código de identificación en G puede formularse como

$$min\ \mathbf{1}^T x : x \in P_{ID}(G)$$

Sea $C_{ID}(G)$ submatriz de $M_{ID}(G)$ ($C_{ID}(G)$ *matriz clutter del código de identificación*)
El Poliedro de Código de Identificación de G

$$P_{ID}(G) = conv\{x \in \mathbb{Z}^V : C_{ID}(G)x \geq \mathbf{1}\}$$

El problema de mínimo código de identificación en G puede formularse como

$$min\ \mathbf{1}^T x : x \in P_{ID}(G)$$

Un caso particular del problema de Cubrimiento de Conjuntos!

Sea $C_{ID}(G)$ submatriz de $M_{ID}(G)$ ($C_{ID}(G)$ *matriz clutter del código de identificación*)
El Poliedro de Código de Identificación de G

$$P_{ID}(G) = conv\{x \in \mathbb{Z}^V : C_{ID}(G)x \geq \mathbf{1}\}$$

El problema de mínimo código de identificación en G puede formularse como

$$min\ \mathbf{1}^T x : x \in P_{ID}(G)$$

Un caso particular del problema de Cubrimiento de Conjuntos!

$$\gamma^{ID}(G) = min\ \mathbf{1}^T x : x \in P_{ID}(G) \quad \text{número de identificación de } G$$

$$\gamma^{ID}(G) = min\ \mathbf{1}^T x : x \in P_{ID}(G)$$

es un problema difícil para varias clases de grafos.

$$\gamma^{ID}(G) = min\ \mathbf{1}^T x : x \in P_{ID}(G)$$

es un problema difícil para varias clases de grafos.

Sea

$$Q_{ID}(G) = \{x \in \mathbb{R}^V : M_{ID}(G)x \geq \mathbf{1}\}$$

la relajación lineal del poliedro de código de identificación

$$\gamma^{ID}(G) = min\ \mathbf{1}^T x : x \in P_{ID}(G)$$

es un problema difícil para varias clases de grafos.

Sea

$$Q_{ID}(G) = \{x \in \mathbb{R}^V : M_{ID}(G)x \geq \mathbf{1}\}$$

la relajación lineal del poliedro de código de identificación

Claramente

$$P_{ID}(G) = conv\{x \in \mathbb{Z}^V : M_{ID}(G)x \geq \mathbf{1}\} \subset Q_{ID}(G)$$

$$\gamma^{ID}(G) = min\ \mathbf{1}^T x : x \in P_{ID}(G)$$

es un problema difícil para varias clases de grafos.

Sea

$$Q_{ID}(G) = \{x \in \mathbb{R}^V : M_{ID}(G)x \geq \mathbf{1}\}$$

la relajación lineal del poliedro de código de identificación

Claramente

$$P_{ID}(G) = conv\{x \in \mathbb{Z}^V : M_{ID}(G)x \geq \mathbf{1}\} \subset Q_{ID}(G)$$

Una forma de abordar el problema

$$\gamma^{ID}(G) = min\ \mathbf{1}^T x : x \in P_{ID}(G)$$

es un problema difícil para varias clases de grafos.

Sea

$$Q_{ID}(G) = \{x \in \mathbb{R}^V : M_{ID}(G)x \geq \mathbf{1}\}$$

la relajación lineal del poliedro de código de identificación

Claramente

$$P_{ID}(G) = conv\{x \in \mathbb{Z}^V : M_{ID}(G)x \geq \mathbf{1}\} \subset Q_{ID}(G)$$

Una forma de abordar el problema

- estudiar $ax \geq b$ válida para $P_{ID}(G)$,

El problema de mínimo código de identificación

$$\gamma^{ID}(G) = min\ \mathbf{1}^T x : x \in P_{ID}(G)$$

es un problema difícil para varias clases de grafos.

Sea

$$Q_{ID}(G) = \{x \in \mathbb{R}^V : M_{ID}(G)x \geq \mathbf{1}\}$$

la relajación lineal del poliedro de código de identificación

Claramente

$$P_{ID}(G) = conv\{x \in \mathbb{Z}^V : M_{ID}(G)x \geq \mathbf{1}\} \subset Q_{ID}(G)$$

Una forma de abordar el problema

- estudiar $ax \geq b$ válida para $P_{ID}(G)$,
- añadir $ax \geq b$ a $Q_{ID}(G)$ y utilizar estrategias de $B\&C$.

HIPERGRAFO

Sea $\mathscr{H} = (V, \mathscr{E})$ un *hipergrafo* con $V = \{1, \ldots, n\}$ y $\mathscr{E} \subseteq 2^V$, definimos

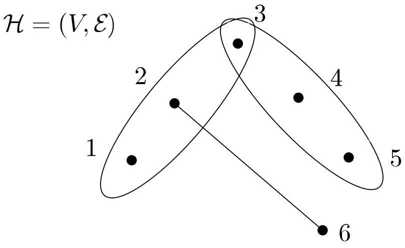
HIPERGRAFO

Sea $\mathscr{H} = (V, \mathscr{E})$ un *hipergrafo* con $V = \{1, \ldots, n\}$ y $\mathscr{E} \subseteq 2^V$, definimos

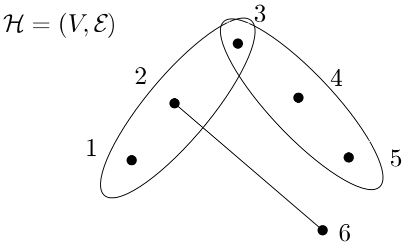
- $M(\mathscr{H}) \longrightarrow$ matriz incidencia.
- $H_{ID}(G) \longrightarrow$ *hipergrafo de código de identificación*, hipergrafo cuya matriz incidencia $M(H_{ID}(G))$ coincide con $C_{ID}(G)$.
- $\mathscr{C} = (V', \mathscr{E}') \longrightarrow$ *hiperciclo de longitud m*, es un hipergrafo definido por la sigiente secuencia: $i_1 E_1 i_2 \ldots i_m E_m i_1$ de m nodos y m hiperaristas con $\{i_j, i_{j+1}\} \in E_j$ e $i_{m+1} = i_1$.

Ejemplo: Sean $V = \{1,2,3,4,5,6\}$ y $\mathscr{E} = \{\{1,2,3\},\{3,4,5\},\{2,5\}\}$

Ejemplo: Sean $V = \{1,2,3,4,5,6\}$ y $\mathscr{E} = \{\{1,2,3\},\{3,4,5\},\{2,5\}\}$



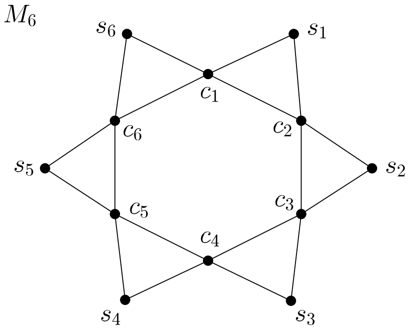
Ejemplo: Sean $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $\mathscr{E} = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 5\}\}$



$$M(\mathscr{H}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Sea M_6 el siguiente grafo

Ejemplo: Sea M_6 el siguiente grafo



HIPERGRAFO

La matriz clutter de M_6 es:

La matriz clutter de M_6 es:

$$C_{ID}(M_6) = \left(\begin{array}{cccccccccccccc}
\Delta & | & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & | & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \\
- & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\
N[c_2]\Delta N[s_2] & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
N[c_3]\Delta N[s_3] & | & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & & \\
N[c_1]\Delta N[s_1] & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
- & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\
N[s_6]\Delta N[c_1] & | & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
N[s_1]\Delta N[c_2] & | & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & & \\
N[s_3]\Delta N[c_6] & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)$$

Por lo tanto,

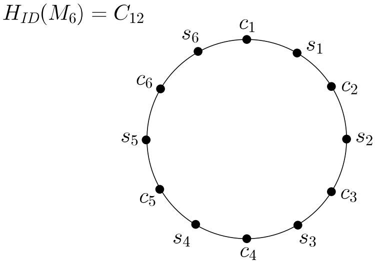
Hipergrafo

Por lo tanto,

- $C_{ID}(M_6) = C_{12}^2$,

Por lo tanto,

- $C_{ID}(M_6) = C_{12}^2$,
- $H_{ID}(M_6) = C_{12}$.

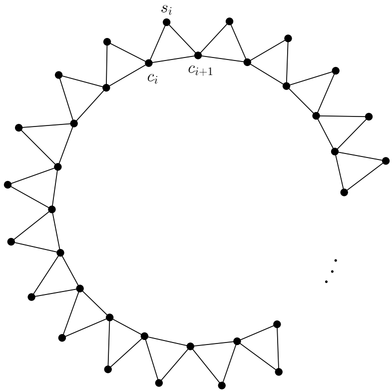


- $H_{ID}(M_6) = C_{12}$ es el hipergrafo de código de identificación (hiperciclo-ciclo) ya que es un hipergrafo cuya matriz de incidencia $M(H_{ID}(M_6)) = C_{12}^2$ coincide con $C_{ID}(M_6)$.

Familia de grafos

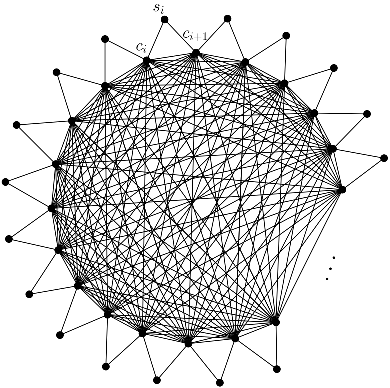
M_n: *n-suns*.
$M_n = (C \cup S, E)$, C induce un hole y S un estable, además $s_i \in S$ es adyacente a exactamente dos vértices de C, c_i y c_{i+1}.

M_n: *n-suns*.
$M_n = (C \cup S, E)$, C induce un hole y S un estable, además $s_i \in S$ es adyacente a exactamente dos vértices de C, c_i y c_{i+1}.



S_n: *complete suns*.
$S_n = (C \cup S, E)$, C induce una clique y S un estable, además $s_i \in S$ es adyacente a exactamente dos vértices de C, c_i y c_{i+1}.

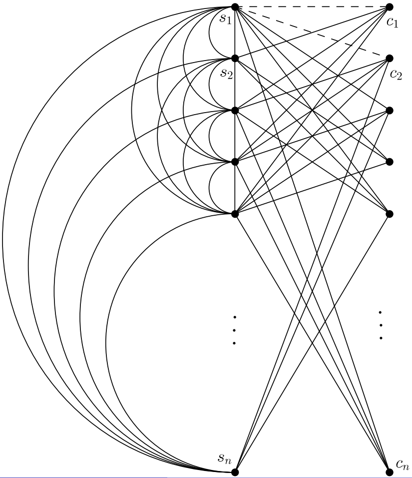
S_n: *complete suns*.
$S_n = (C \cup S, E)$, C induce una clique y S un estable, además $s_i \in S$ es adyacente a exactamente dos vértices de C, c_i y c_{i+1}.



Familia de grafos

$\overline{S_n}$: *co-suns*.
$\overline{S_n}$ es el complemento de S_n.

$\overline{S_n}$: *co-suns*.
$\overline{S_n}$ es el complemento de S_n.



TEOREMA

Para un n-sun $M_n = (C \cup S, E)$ *con* $n \geq 4$, *tenemos*

$$C_{ID}(M_n) = \begin{pmatrix} I & I \\ C_w & I \end{pmatrix}$$

donde C_w *es una matriz circulante cuya primera fila es* $(0,1,0,\ldots,0)$. *Más aún,* $H_{ID}(M_n) = C_{2n}$ *y* $C_{ID}(M_n) = C_{2n}^2$.

TEOREMA

Para un n-sun $M_n = (C \cup S, E)$ con $n \geq 4$, tenemos

$$C_{ID}(M_n) = \begin{pmatrix} I & I \\ C_w & I \end{pmatrix}$$

donde C_w es una matriz circulante cuya primera fila es $(0,1,0,\ldots,0)$. Más aún, $H_{ID}(M_n) = C_{2n}$ y $C_{ID}(M_n) = C_{2n}^2$.

COROLARIO

Para $M_n = (C \cup S, E)$ con $n \geq 4$, $P_{ID}(M_n)$ coincide con la relajación lineal $Q(C_{ID}(M_n))$ y $\gamma^{ID}(M_n) = n$.

Lema

Sea $S_n = (C \cup S, E)$ un complete sun con $n \geq 4$. Las hiperaristas $N[s_i]$, $N[s_{i+1}]$ y $N[s_i] \Delta N[s_{i+1}]$ forman un hiperciclo en $H_{ID}(S_n)$ que induce la faceta de rango $x(\{c_i, c_{i+1}, c_{i+2}, s_i, s_{i+1}\}) \geq 2$ de $P_{ID}(S_n)$.

RESULTADOS OBTENIDOS S_n

LEMA

Sea $S_n = (C \cup S, E)$ un complete sun con $n \geq 4$. Las hiperaristas $N[s_i]$, $N[s_{i+1}]$ y $N[s_i] \Delta N[s_{i+1}]$ forman un hiperciclo en $H_{ID}(S_n)$ que induce la faceta de rango $x(\{c_i, c_{i+1}, c_{i+2}, s_i, s_{i+1}\}) \geq 2$ de $P_{ID}(S_n)$.

TEOREMA

Para un complete sun $S_n = (C \cup S, E)$ con $n \geq 4$ el conjunto estable S es un código de identificación mínimo y $\gamma^{ID}(S_n) = n$.

Resultados obtenidos $\overline{S_n}$

Por definición de $\overline{S_n}$, obtenemos las siguientes hiperaristas de $H_{ID}(\overline{S_n})$:

RESULTADOS OBTENIDOS $\overline{S_n}$

Por definición de $\overline{S_n}$, obtenemos las siguientes hiperaristas de $H_{ID}(\overline{S_n})$:

- $N[s_i] = (C \setminus \{c_i, c_{i-1}\}) \cup \{s_i\}$
- $N[s_i] \Delta N[s_j] = \{c_{i-1}, c_i, c_{j-1}, c_j, s_i, s_j\}$ en particular $N[s_i] \Delta N[s_{i+1}] = \{c_{i-1}, c_{i+1}, s_i, s_{i+1}\}$
- $N[c_i] \Delta N[c_j] = \{s_i, s_{i+1}, s_j, s_{j+1}\}$ en particular $N[c_i] \Delta N[c_{i+1}] = \{s_i, s_{i+2}\}$

Resultados obtenidos $\overline{S_n}$

Por definición de $\overline{S_n}$, obtenemos las siguientes hiperaristas de $H_{ID}(\overline{S_n})$:

- $N[s_i] = (C \setminus \{c_i, c_{i-1}\}) \cup \{s_i\}$
- $N[s_i]\Delta N[s_j] = \{c_{i-1}, c_i, c_{j-1}, c_j, s_i, s_j\}$ en particular $N[s_i]\Delta N[s_{i+1}] = \{c_{i-1}, c_{i+1}, s_i, s_{i+1}\}$
- $N[c_i]\Delta N[c_j] = \{s_i, s_{i+1}, s_j, s_{j+1}\}$ en particular $N[c_i]\Delta N[c_{i+1}] = \{s_i, s_{i+2}\}$

Teorema

El número de código de identificación de $\overline{S_n}$ con $n \geq 7$ es $n-1$.

Muchas gracias!

Bibliografía

- G. Argiroffo, S. Bianchi: On the set covering polyhedron of circulant matrices, Discrete Optimization Vol 6-2 (2009) 162-173.
- G. Argiroffo, S. Bianchi, A. Wagler: Polyhedra associated with identifying codes (extended abstract), Electronic Notes in Discrete Mathematics Vol 44 (2013) 175-180.
- G. Argiroffo, S. Bianchi, A. Wagler: Study of identifying code polyhedra for some families of split graphs, Lecture Notes in Computer Science 8596 (2014) 13-25.
- G. Argiroffo, M. Carr, On the set covering polyhedron of q-roses, VI ALIO/EURO Workshop on Applied Combinatorial Optimization 2008.
- Auger, D.: Minimal identifying codes in trees and planar graphs with large girth, European Journal of Combinatorics 31, 1372-1384 (2010).
- E. Balas, S. M. Ng, On the set covering polytope: I. All the facets with coefficients in 0,1,2, Mathematical Programming 43, (1989), pp. 57-69.
- G. Cornuejols, Combinatorial Optimization: Packing and Covering, SIAM, CBMS 74, 2001.
- Foucaud, F., Gravier, S., Naserasr, R., Parreau, A., Valicov, P.: Identifying codes in line graphs, Journal of Graph Theory 73, 4 (2013) 425-448.