

SOBRE NUEVAS COTAS PARA LOS NÚMEROS DE
 k -EMPAQUETAMIENTOS LIMITADOS EN GRAFOS

María Inés Lopez Pujato

Valeria Leoni

F.C.E.I.A. - UNR

LXV Reunión anual de Comunicaciones Científicas

Rosario - Argentina



MOTIVACIÓN: PROBLEMA DE LOCACIÓN DE SERVICIOS

- Colocar un conjunto de sensores.

MOTIVACIÓN: PROBLEMA DE LOCACIÓN DE SERVICIOS

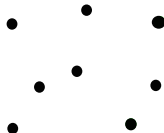
- Colocar un conjunto de sensores.
- **Demasiados** pueden ser detectados.

MOTIVACIÓN: PROBLEMA DE LOCACIÓN DE SERVICIOS

- Colocar un conjunto de sensores.
- **Demasiados** pueden ser detectados.
- Se pretende **maximizar** el número a utilizar.

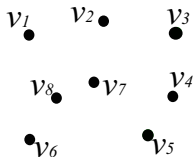
MOTIVACIÓN: PROBLEMA DE LOCACIÓN DE SERVICIOS

- Colocar un conjunto de sensores.
- **Demasiados** pueden ser detectados.
- Se pretende **maximizar** el número a utilizar.
 - Lugares a ser custodiados.



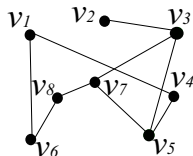
MOTIVACIÓN: PROBLEMA DE LOCACIÓN DE SERVICIOS

- Colocar un conjunto de sensores.
- **Demasiados** pueden ser detectados.
- Se pretende **maximizar** el número a utilizar.
 - Lugares a ser custodiados.
 - Cada lugar $\rightarrow$ vértice v_i .



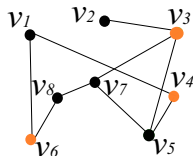
MOTIVACIÓN: PROBLEMA DE LOCACIÓN DE SERVICIOS

- Colocar un conjunto de sensores.
- **Demasiados** pueden ser detectados.
- Se pretende **maximizar** el número a utilizar.
 - Lugares a ser custodiados.
 - Cada lugar $\rightarrow$ vértice v_i .
 - desde v_i se visualiza $v_j \rightarrow$ arista.



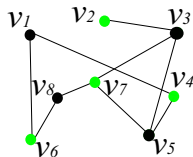
MOTIVACIÓN: PROBLEMA DE LOCACIÓN DE SERVICIOS

- Colocar un conjunto de sensores.
- **Demasiados** pueden ser detectados.
- Se pretende **maximizar** el número a utilizar.
 - Lugares a ser custodiados.
 - Cada lugar $\rightarrow$ vértice v_i .
 - desde v_i se visualiza $v_j \rightarrow$ arista.
- Ubicación: $D \subseteq \{v_1, v_2, \dots, v_8\}$



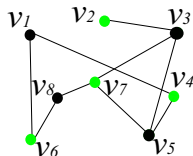
MOTIVACIÓN: PROBLEMA DE LOCACIÓN DE SERVICIOS

- Colocar un conjunto de sensores.
- **Demasiados** pueden ser detectados.
- Se pretende **maximizar** el número a utilizar.
 - Lugares a ser custodiados.
 - Cada lugar $\rightarrow$ vértice v_i .
 - desde v_i se visualiza $v_j \rightarrow$ arista.
- Ubicación: $D \subseteq \{v_1, v_2, \dots, v_8\}$ y $|D|$ máximo.



MOTIVACIÓN: PROBLEMA DE LOCACIÓN DE SERVICIOS

- Colocar un conjunto de sensores.
- **Demasiados** pueden ser detectados.
- Se pretende **maximizar** el número a utilizar.
 - Lugares a ser custodiados.
 - Cada lugar $\rightarrow$ vértice v_i .
 - desde v_i se visualiza $v_j \rightarrow$ arista.



- Ubicación: $D \subseteq \{v_1, v_2, \dots, v_8\}$ y $|D|$ máximo.

- d_i **grado** de $v_i \in V(G)$.
- $\Delta(G) = \max \{d_i : i = 1, \dots, |V(G)|\}$.
- $\delta(G) = \min \{d_i : i = 1, \dots, |V(G)|\}$.
- $N[v] = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\} \cup \{v\}$.

Todos los grafos son simples y conexos.

k -EMPAQUETAMIENTOS LIMITADOS

Dado G , $k \in \mathbb{Z}^+$,

$B \subseteq V(G)$ es un **k -empaquetamiento limitado** en G si

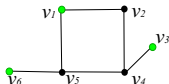
$$|N[v] \cap B| \leq k \quad \forall v \in V(G). \quad [\text{Gallant et al. - 2010}]$$

k -EMPAQUETAMIENTOS LIMITADOS

Dado G , $k \in \mathbb{Z}^+$,

$B \subseteq V(G)$ es un **k -empaquetamiento limitado** en G si

$$|N[v] \cap B| \leq k \quad \forall v \in V(G). \quad [\text{Gallant et al. - 2010}]$$



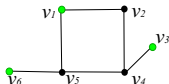
$$k = 2$$

k -EMPAQUETAMIENTOS LIMITADOS

Dado G , $k \in \mathbb{Z}^+$,

$B \subseteq V(G)$ es un **k -empaquetamiento limitado** en G si

$$|N[v] \cap B| \leq k \quad \forall v \in V(G). \quad [\text{Gallant et al. - 2010}]$$



$k = 2$

NÚMERO DE k -EMPAQUETAMIENTO LIMITADO:

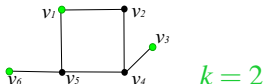
$$L_k(G) = \max \{ |B| : B \text{ es } k\text{-empaquetamiento limitado en } G \}.$$

k -EMPAQUETAMIENTOS LIMITADOS

Dado G , $k \in \mathbb{Z}^+$,

$B \subseteq V(G)$ es un **k -empaquetamiento limitado** en G si

$$|N[v] \cap B| \leq k \quad \forall v \in V(G). \quad [\text{Gallant et al. - 2010}]$$



NÚMERO DE k -EMPAQUETAMIENTO LIMITADO:

$$L_k(G) = \max \{ |B| : B \text{ es } k\text{-empaquetamiento limitado en } G \}.$$

PROBLEMA DEL k -EMPAQUETAMIENTO LIMITADO (PkEL), $k \in \mathbb{Z}^+$ FIJO

Instancia: G un grafo, y $\alpha \in \mathbb{N}$.

Pregunta: ¿Es $L_k(G) \geq \alpha$?

[Dobson, Leoni, Nasini. -2011]

[Gallant, Gunther, Hartnell, Rall. -2010]

- $L_1(P_m), L_2(P_m), L_1(C_m), L_2(C_m), L_k(K_m), L_k(K_{m,n})$.

COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL DE PkEL

[Gallant, Gunther, Hartnell, Rall. -2010]

- $L_1(P_m), L_2(P_m), L_1(C_m), L_2(C_m), L_k(K_m), L_k(K_{m,n})$.

[Dobson, Leoni, Nasini. -2011]

- PkEL es resoluble en tiempo polinomial en:
grafos fuertemente cordales, grafos P_4 -tidy.

COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL DE PkEL

[Gallant, Gunther, Hartnell, Rall. -2010]

- $L_1(P_m), L_2(P_m), L_1(C_m), L_2(C_m), L_k(K_m), L_k(K_{m,n})$.

[Dobson, Leoni, Nasini. -2011]

- PkEL es resoluble en tiempo polinomial en:
grafos fuertemente cordales, grafos P_4 -tidy.

[Hinrichsen, Leoni. -2014]

- PkEL es resoluble en tiempo polinomial en:
grafos con clique-width acotado

COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL DE PkEL

[Gallant, Gunther, Hartnell, Rall. -2010]

- $L_1(P_m)$, $L_2(P_m)$, $L_1(C_m)$, $L_2(C_m)$, $L_k(K_m)$, $L_k(K_{m,n})$.

[Dobson, Leoni, Nasini. -2011]

- PkEL es resoluble en tiempo polinomial en:
grafos fuertemente cordales, grafos P_4 -tidy.

[Hinrichsen, Leoni. -2014]

- PkEL es resoluble en tiempo polinomial en:
grafos con clique-width acotado

[Dobson, Leoni, Nasini. -2011]

- PkEL es NP-completo,

COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL DE PkEL

[Gallant, Gunther, Hartnell, Rall. -2010]

- $L_1(P_m)$, $L_2(P_m)$, $L_1(C_m)$, $L_2(C_m)$, $L_k(K_m)$, $L_k(K_{m,n})$.

[Dobson, Leoni, Nasini. -2011]

- PkEL es resoluble en tiempo polinomial en:
grafos fuertemente cordales, grafos P_4 -tidy.

[Hinrichsen, Leoni. -2014]

- PkEL es resoluble en tiempo polinomial en:
grafos con clique-width acotado

[Dobson, Leoni, Nasini. -2011]

- PkEL es NP-completo, aún en grafos:
 - bipartitos,
 - split.

COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL DE PkEL

[Gallant, Gunther, Hartnell, Rall. -2010]

- $L_1(P_m)$, $L_2(P_m)$, $L_1(C_m)$, $L_2(C_m)$, $L_k(K_m)$, $L_k(K_{m,n})$.

[Dobson, Leoni, Nasini. -2011]

- PkEL es resoluble en tiempo polinomial en:
grafos fuertemente cordales, grafos P_4 -tidy.

[Hinrichsen, Leoni. -2014]

- PkEL es resoluble en tiempo polinomial en:
grafos con clique-width acotado

[Dobson, Leoni, Nasini. -2011]

- PkEL es NP-completo, aún en grafos:
 - bipartitos,
 - split.

Tener cotas para $L_k(G)$ es útil,
sobre todo en instancias donde PkEL es NP-completo.

COTAS PARA EL NÚMERO DE k -EMPAQUETAMIENTO LIMITADO

- $\forall B \subseteq V(G), |B| = k$ es un k -empaquetamiento limitado $\Rightarrow L_k(G) \geq k$.

COTAS PARA EL NÚMERO DE k -EMPAQUETAMIENTO LIMITADO

- $\forall B \subseteq V(G), |B| = k$ es un k -empaquetamiento limitado $\Rightarrow L_k(G) \geq k$.

[Gallant, Gunther, Hartnell, Rall. -2010]

- $L_1(G) \leq L_2(G) \leq \dots \leq L_{\Delta(G)+1}(G) = |V(G)|$.

COTAS PARA EL NÚMERO DE k -EMPAQUETAMIENTO LIMITADO

- $\forall B \subseteq V(G), |B| = k$ es un k -empaquetamiento limitado $\Rightarrow L_k(G) \geq k$.

[Gallant, Gunther, Hartnell, Rall. -2010]

- $L_1(G) \leq L_2(G) \leq \dots \leq L_{\Delta(G)+1}(G) = |V(G)|$.
- $G, |V(G)| = n, \delta(G) \geq k \implies L_k(G) \leq \frac{k}{k+1}n$.

COTAS PARA EL NÚMERO DE k -EMPAQUETAMIENTO LIMITADO

- $\forall B \subseteq V(G), |B| = k$ es un k -empaquetamiento limitado $\Rightarrow L_k(G) \geq k$.

[Gallant, Gunther, Hartnell, Rall. -2010]

- $L_1(G) \leq L_2(G) \leq \dots \leq L_{\Delta(G)+1}(G) = |V(G)|$.
- $G, |V(G)| = n, \delta(G) \geq k \implies L_k(G) \leq \frac{k}{k+1}n$.

[Gagarin, Zverovich. -2015]

- $G, |V(G)| = n, k \leq \delta(G) + 1 \implies L_k(G) \leq \gamma_{\times k}(G)$.

COTAS PARA EL NÚMERO DE k -EMPAQUETAMIENTO LIMITADO

- $\forall B \subseteq V(G), |B| = k$ es un k -empaquetamiento limitado $\Rightarrow L_k(G) \geq k$.

[Gallant, Gunther, Hartnell, Rall. -2010]

- $L_1(G) \leq L_2(G) \leq \dots \leq L_{\Delta(G)+1}(G) = |V(G)|$.
- $G, |V(G)| = n, \delta(G) \geq k \Rightarrow L_k(G) \leq \frac{k}{k+1}n$.

[Gagarin, Zverovich. -2015]

- $G, |V(G)| = n, k \leq \delta(G) + 1 \Rightarrow L_k(G) \leq \gamma_{\times k}(G)$.
- $G, |V(G)| = n, k \leq \delta(G) \Rightarrow L_k(G) \leq \left(1 - \frac{\delta'(G)}{\delta'(G) \sqrt[k-1]{b_{k-1}^G (1 + \delta'(G))^{1 + \frac{1}{\delta'(G)}}}}\right) \cdot n$.

COTAS PARA EL NÚMERO DE k -EMPAQUETAMIENTO LIMITADO

- $\forall B \subseteq V(G), |B| = k$ es un k -empaquetamiento limitado $\Rightarrow L_k(G) \geq k$.

[Gallant, Gunther, Hartnell, Rall. -2010]

- $L_1(G) \leq L_2(G) \leq \dots \leq L_{\Delta(G)+1}(G) = |V(G)|$.
- $G, |V(G)| = n, \delta(G) \geq k \Rightarrow L_k(G) \leq \frac{k}{k+1}n$.

[Gagarin, Zverovich. -2015]

- $G, |V(G)| = n, k \leq \delta(G) + 1 \Rightarrow L_k(G) \leq \gamma_{\times k}(G)$.
- $G, |V(G)| = n, k \leq \delta(G) \Rightarrow L_k(G) \leq \left(1 - \frac{\delta'(G)}{\delta'(G) \sqrt[k]{b_{k-1}^G (1 + \delta'(G))^{1 + \frac{1}{\delta'(G)}}}}\right) \cdot n$.
- $G, |V(G)| = n, k \leq \Delta(G) \Rightarrow L_k(G) \geq \frac{k}{(k+1) \sqrt[k]{\binom{\Delta(G)}{k} (\Delta(G)+1)}} n$.

COTAS PARA EL NÚMERO DE k -EMPAQUETAMIENTO LIMITADO

- $\forall B \subseteq V(G), |B| = k$ es un k -empaquetamiento limitado $\Rightarrow L_k(G) \geq k$.

[Gallant, Gunther, Hartnell, Rall. -2010]

- $L_1(G) \leq L_2(G) \leq \dots \leq L_{\Delta(G)+1}(G) = |V(G)|$.
- $G, |V(G)| = n, \delta(G) \geq k \Rightarrow L_k(G) \leq \frac{k}{k+1}n$.

[Gagarin, Zverovich. -2015]

- $G, |V(G)| = n, k \leq \delta(G) + 1 \Rightarrow L_k(G) \leq \gamma_{\times k}(G)$.
- $G, |V(G)| = n, k \leq \delta(G) \Rightarrow L_k(G) \leq \left(1 - \frac{\delta'(G)}{\delta'(G) \sqrt[k]{b_{k-1}^G (1 + \delta'(G))^{1 + \frac{1}{\delta'(G)}}}}\right) \cdot n$.
- $G, |V(G)| = n, k \leq \Delta(G) \Rightarrow L_k(G) \geq \frac{k}{(k+1) \sqrt[k]{\binom{\Delta(G)}{k} (\Delta(G)+1)}} n$.

OBJETIVOS

1ER OBJETIVO: SOBRE LA COTA $L_k(G) \geq \frac{k}{(k+1) \sqrt[k]{\binom{\Delta(G)}{k} (\Delta(G)+1)}} \cdot n$

$$GZ_k(G) := \frac{k}{(k+1) \sqrt[k]{\binom{\Delta(G)}{k} (\Delta(G)+1)}} \cdot n$$

1ER OBJETIVO: SOBRE LA COTA $L_k(G) \geq \frac{k}{(k+1) \sqrt[k]{\binom{\Delta(G)}{k} (\Delta(G)+1)}} \cdot n$

$$GZ_k(G) := \frac{k}{(k+1) \sqrt[k]{\binom{\Delta(G)}{k} (\Delta(G)+1)}} \cdot n$$

$$L_k(G) \geq k$$

1ER OBJETIVO: SOBRE LA COTA $L_k(G) \geq \frac{k}{(k+1)^k \sqrt[k]{\binom{\Delta(G)}{k} (\Delta(G)+1)}} \cdot n$

$$GZ_k(G) := \frac{k}{(k+1)^k \sqrt[k]{\binom{\Delta(G)}{k} (\Delta(G)+1)}} \cdot n$$

$$L_k(G) \geq k$$

No funciona bien $\longleftrightarrow GZ_k(G) < k$

1ER OBJETIVO: SOBRE LA COTA $L_k(G) \geq \frac{k}{(k+1)^{\sqrt[k]{\binom{\Delta(G)}{k}(\Delta(G)+1)}}} \cdot n$

$$GZ_k(G) := \frac{k}{(k+1)^{\sqrt[k]{\binom{\Delta(G)}{k}(\Delta(G)+1)}}} \cdot n$$

$$L_k(G) \geq k$$

No funciona bien $\longleftrightarrow GZ_k(G) < k$

- *Deseable y útil que funcione bien en instancias donde PkEL es NP-completo.*

1ER OBJETIVO: SOBRE LA COTA $L_k(G) \geq \frac{k}{(k+1)^{\sqrt[k]{\binom{\Delta(G)}{k}(\Delta(G)+1)}}} \cdot n$

$$GZ_k(G) := \frac{k}{(k+1)^{\sqrt[k]{\binom{\Delta(G)}{k}(\Delta(G)+1)}}} \cdot n$$

$$L_k(G) \geq k$$

No funciona bien $\longleftrightarrow GZ_k(G) < k$

- *Deseable y útil que funcione bien en instancias donde PkEL es NP-completo.*
- *Exhibimos un conjunto infinito de instancias donde PkEL es NP-completo y la cota no funciona bien.*

1ER OBJETIVO: SOBRE LA COTA $L_k(G) \geq \frac{k}{(k+1) \sqrt[k]{\binom{\Delta(G)}{k} (\Delta(G)+1)}} \cdot n$

$PkEL$ es NP-completo en grafos split. [Dobson, Leoni, Nasini. -2011]

1ER OBJETIVO: SOBRE LA COTA
$$L_k(G) \geq \frac{k}{(k+1)^k \sqrt[k]{\binom{\Delta(G)}{k} (\Delta(G)+1)}} \cdot n$$

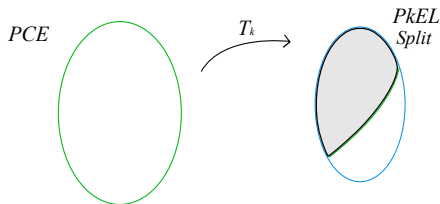
$PkEL$ es NP-completo en grafos split. [Dobson, Leoni, Nasini. -2011]

Para cada entero $k \geq 1$ existe $\mathcal{S}_k$ familia infinita de grafos split:

- $PkEL$ es NP-completo en $\mathcal{S}_k$;
- $\forall G' \in \mathcal{S}_k, \quad GZ_k(G') < k.$

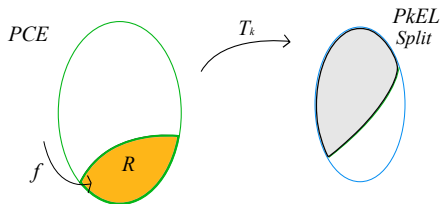
1ER OBJETIVO: SOBRE LA COTA $L_k(G) \geq \frac{k}{(k+1) \sqrt[k]{\binom{\Delta(G)}{k} (\Delta(G)+1)}} \cdot n$

- PkEL es NP-completo en grafos split.
[Dobson, Leoni, Nasini. -2011]



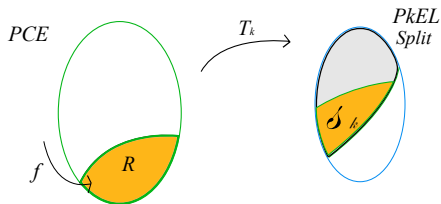
1ER OBJETIVO: SOBRE LA COTA
$$L_k(G) \geq \frac{k}{(k+1)^k \sqrt[k]{\binom{\Delta(G)}{k} (\Delta(G)+1)}} \cdot n$$

- PkEL es NP-completo en grafos split.
[Dobson, Leoni, Nasini. -2011]
- PCE es NP-completo aún en $R = \{\text{grafos } 3\text{-regulares}\}$.
[Garey, Johnson, Stockmeyer -1976]



1ER OBJETIVO: SOBRE LA COTA $L_k(G) \geq \frac{k}{(k+1)^k \sqrt[k]{\binom{\Delta(G)}{k} (\Delta(G)+1)}} \cdot n$

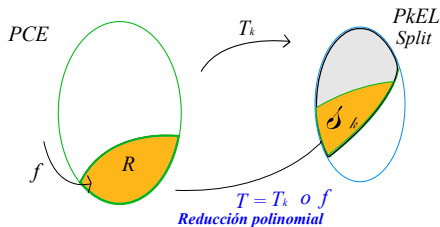
- PkEL es NP-completo en grafos split.
[Dobson, Leoni, Nasini. -2011]
- PCE es NP-completo aún en $R = \{\text{grafos } 3\text{-regulares}\}$.
[Garey, Johnson, Stockmeyer -1976]



$$\mathcal{S}_k := T_k(R)$$

1ER OBJETIVO: SOBRE LA COTA $L_k(G) \geq \frac{k}{(k+1)^k \sqrt[k]{\binom{\Delta(G)}{k}} (\Delta(G)+1)} \cdot n$

- PkEL es NP-completo en grafos split.
[Dobson, Leoni, Nasini. -2011]
- PCE es NP-completo aún en $R = \{\text{grafos } 3\text{-regulares}\}$.
[Garey, Johnson, Stockmeyer -1976]

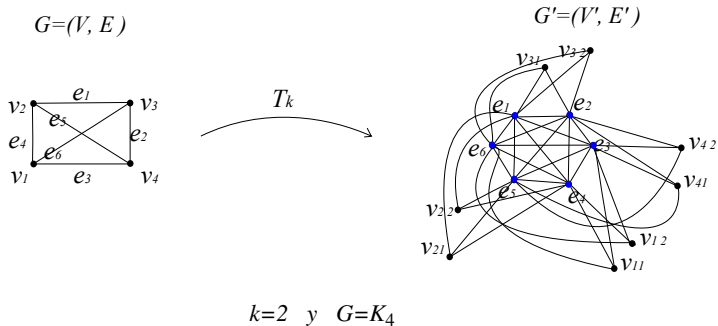


$$\mathcal{S}_k := T_k(R)$$

PkEL es NP-completo en $\mathcal{S}_k$.

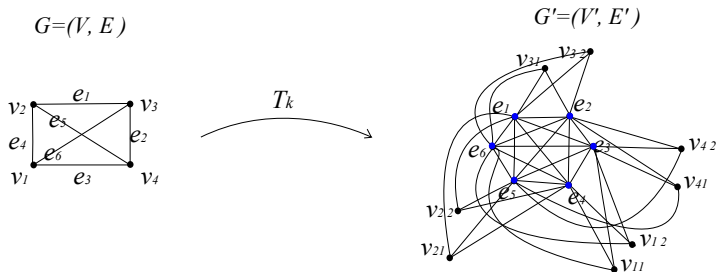
1ER OBJETIVO: SOBRE LA COTA $L_k(G) \geq \frac{k}{(k+1) \sqrt[k]{\binom{\Delta(G)}{k} (\Delta(G)+1)}} \cdot n$

Reducción del Problema del Conjunto Estable (**PCE**) en G general a PkEL en G' split:



1ER OBJETIVO: SOBRE LA COTA $L_k(G) \geq \frac{k}{(k+1) \sqrt[k]{\binom{\Delta(G)}{k} (\Delta(G)+1)}} \cdot n$

Reducción del Problema del Conjunto Estable (**PCE**) en G general a PkEL en G' split:

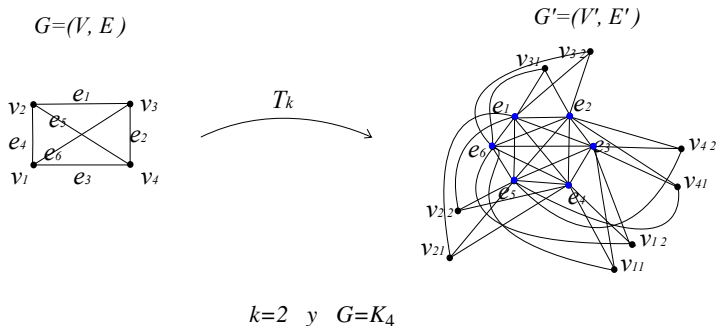


$k=2$ y $G=K_4$

- $G' \in \mathcal{S}_k$, $|V(G')| = \left(\frac{3}{2} + k\right)n$, siendo $n = |V(G)|$.

1ER OBJETIVO: SOBRE LA COTA $L_k(G) \geq \frac{k}{(k+1) \sqrt[k]{\binom{\Delta(G)}{k} (\Delta(G)+1)}} \cdot n$

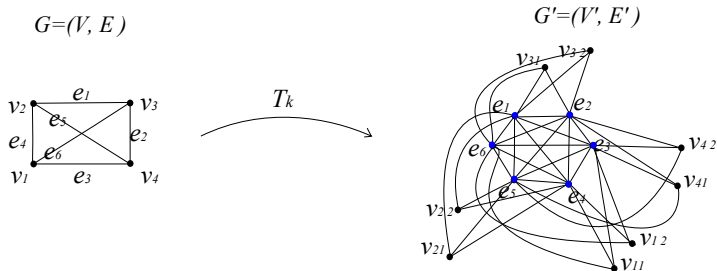
Reducción del Problema del Conjunto Estable (**PCE**) en G general a PkEL en G' split:



- $G' \in \mathcal{S}_k$, $|V(G')| = \left(\frac{3}{2} + k\right)n$, siendo $n = |V(G)|$.
- Grados de todo v de $G' \in \mathcal{S}_k \rightarrow \Delta(G') = \frac{3}{2} + 2k + 1$.

1ER OBJETIVO: SOBRE LA COTA $L_k(G) \geq \frac{k}{(k+1)^{\sqrt[k]{\binom{\Delta(G)}{k}}(\Delta(G)+1)}} \cdot n$

Reducción del Problema del Conjunto Estable (**PCE**) en G general a PkEL en G' split:



$$k=2 \text{ y } G=K_4$$

- $G' \in \mathcal{S}_k$, $|V(G')| = \left(\frac{3}{2} + k\right)n$, siendo $n = |V(G)|$.
- Grados de todo v de $G' \in \mathcal{S}_k \rightarrow \Delta(G') = \frac{3}{2} + 2k + 1$.

$$\forall k \geq 1, \forall G' \in \mathcal{S}_k \Rightarrow GZ_k(G') < k.$$

2DO OBJETIVO: MEJOR COTA SUPERIOR PARA L_k

G , $|V(G)| = n$, $\delta(G) \geq k$

$$(1) \quad L_k(G) \leq \frac{k}{k+1}n \quad [2010] \quad (2) \quad L_k(G) \leq \left(1 - \frac{\delta'(G)}{\delta'(G) \sqrt{\tilde{b}_{k-1}^G} (1 + \delta'(G))^{1 + \frac{1}{\delta'(G)}}} \right) n \quad [2015].$$

2DO OBJETIVO: MEJOR COTA SUPERIOR PARA L_k

$G, |V(G)| = n, \delta(G) \geq k$

$$(1) L_k(G) \leq \frac{k}{k+1}n \text{ [2010]} \quad (2) L_k(G) \leq \left(1 - \frac{\delta'(G)}{\delta'(G)\sqrt{\tilde{b}_{k-1}^G}(1+\delta'(G))^{1+\frac{1}{\delta'(G)}}}\right)n \text{ [2015]}.$$

TEOREMA

G grafo, $\delta(G) \geq k \Rightarrow L_k(G) \leq \frac{k}{\delta(G)+1}n$, y es ajustada.

2DO OBJETIVO: MEJOR COTA SUPERIOR PARA L_k

$$G, \quad |V(G)| = n, \quad \delta(G) \geq k$$

$$(1) \quad L_k(G) \leq \frac{k}{k+1}n \quad [2010] \quad (2) \quad L_k(G) \leq \left(1 - \frac{\delta'(G)}{\delta'(G)\sqrt{\tilde{b}_{k-1}^G}(1+\delta'(G))^{1+\frac{1}{\delta'(G)}}} \right) n \quad [2015].$$

TEOREMA

G grafo, $\delta(G) \geq k \Rightarrow L_k(G) \leq \frac{k}{\delta(G)+1}n$, y es ajustada.

- $\forall G$ con $\delta(G) = k$, coincide con la cota (1); $\forall G$ con $\delta(G) > k$ la mejora.

2DO OBJETIVO: MEJOR COTA SUPERIOR PARA L_k

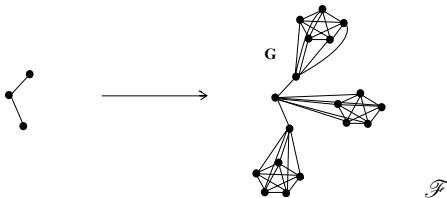
$$G, \quad |V(G)| = n, \quad \delta(G) \geq k$$

$$(1) \quad L_k(G) \leq \frac{k}{k+1}n \quad [2010] \quad (2) \quad L_k(G) \leq \left(1 - \frac{\delta'(G)}{\delta'(G)\sqrt{\tilde{b}_{k-1}^G}(1+\delta'(G))^{1+\frac{1}{\delta'(G)}}}\right)n \quad [2015].$$

TEOREMA

G grafo, $\delta(G) \geq k \Rightarrow L_k(G) \leq \frac{k}{\delta(G)+1}n$, y es ajustada.

- $\forall G$ con $\delta(G) = k$, coincide con la cota (1); $\forall G$ con $\delta(G) > k$ **la mejora**.
- $\forall G \in \mathcal{F}$, $L_k(G) = \frac{k}{\delta(G)+1}n$ y (2) **no es ajustada**.



2DO OBJETIVO: MEJOR COTA SUPERIOR $L_k(G) \leq \frac{k}{\delta(G)+1}n$

Junto con $L_k(G) \geq \frac{k}{(k+1)\sqrt[k]{\binom{\Delta(G)}{k}(\Delta(G)+1)}}.n$:

$$G \text{ 3-regular} \quad \frac{n}{3\sqrt{3}} \leq L_2(G) \leq \frac{n}{3}.$$

2DO OBJETIVO: MEJOR COTA SUPERIOR $L_k(G) \leq \frac{k}{\delta(G)+1}n$

Junto con $L_k(G) \geq \frac{k}{(k+1)\sqrt[k]{\binom{\Delta(G)}{k}(\Delta(G)+1)}}.n$:

$$G \text{ 3-regular} \quad \frac{n}{3\sqrt{3}} \leq L_2(G) \leq \frac{n}{3}.$$

Mejora:

- $L_k(G) \leq \frac{k}{k+1}n$ [Gallant et al. - 2010]

- $L_k(G) \leq \left(1 - \frac{\delta'(G)}{\delta'(G)\sqrt[k]{b_{k-1}^G}(1+\delta'(G))^{1+\frac{1}{\delta'(G)}}}\right)n$ [Gagarin, Zverovich. -2015]

2DO OBJETIVO: MEJOR COTA SUPERIOR $L_k(G) \leq \frac{k}{\delta(G)+1}n$

Junto con $L_k(G) \geq \frac{k}{(k+1)\sqrt[k]{\binom{\Delta(G)}{k}(\Delta(G)+1)}}.n$:

$$G \text{ 3-regular} \quad \frac{n}{3\sqrt{3}} \leq L_2(G) \leq \frac{n}{3}.$$

Mejora:

- $L_k(G) \leq \frac{k}{k+1}n$ [Gallant et al. - 2010]

- $L_k(G) \leq \left(1 - \frac{\delta'(G)}{\delta'(G)\sqrt[k]{b_{k-1}^G(1+\delta'(G))}^{1+\frac{1}{\delta'(G)}}}\right)n$ [Gagarin, Zverovich. -2015]

- $G \text{ 3-regular} \quad \frac{1}{4}n \leq L_2(G) \leq \frac{1}{2}n$ [Gallant et al. - 2010]

2DO OBJETIVO: MEJOR COTA SUPERIOR $L_k(G) \leq \frac{k}{\delta(G)+1}n$

Junto con $L_k(G) \geq \frac{k}{(k+1)\sqrt[k]{\binom{\Delta(G)}{k}(\Delta(G)+1)}}.n$:

$$G \text{ 3-regular} \quad \frac{n}{3\sqrt{3}} \leq L_2(G) \leq \frac{n}{3}.$$

Mejora:

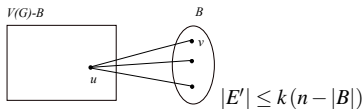
- $L_k(G) \leq \frac{k}{k+1}n$ [Gallant et al. - 2010]
- $L_k(G) \leq \left(1 - \frac{\delta'(G)}{\delta'(G)\sqrt[k]{b_{k-1}^G(1+\delta'(G))}^{1+\frac{1}{\delta'(G)}}}\right)n$ [Gagarin, Zverovich. -2015]
- $G \text{ 3-regular} \quad \frac{1}{4}n \leq L_2(G) \leq \frac{1}{2}n$ [Gallant et al. - 2010]

Complejidad computacional de $PkEL$ en r -regulares: no se conoce.

$$L_k(G) \leq \frac{k}{\delta(G)+1} n$$

Idea Demostración:

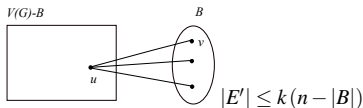
- $B \subseteq V(G) / |B| = L_k(G) \quad E' = \{uv \in E(G) / u \in V - B \wedge v \in B\}$
- $\forall v \in V - B$, tiene a lo sumo k vecinos en B .



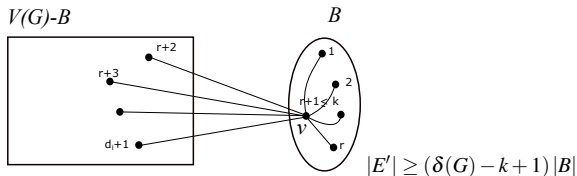
$$L_k(G) \leq \frac{k}{\delta(G)+1} n$$

Idea Demostración:

- $B \subseteq V(G) / |B| = L_k(G) \quad E' = \{uv \in E(G) / u \in V - B \wedge v \in B\}$
- $\forall v \in V - B$, tiene a lo sumo k vecinos en B .



- $\forall v \in B$, tiene al menos $\delta(G) - (k - 1)$ vecinos en $V - B$.



$$L_k(G) = |B| \leq \frac{k}{\delta(G)+1} n$$

¡ Gracias por su atención !

REFERENCIAS

- M. P. Dobson, V. Leoni, and G. Nasini, The Multiple Domination and Limited Packing Problems in Graphs, Inform. Processing. Letters 111 (2011) 1108-1113.
- V. A. Leoni , E. G. Hinrichsen, $\{k\}$ -Packing Functions of Graphs, Combinatorial Optimization Volume 8596 of the series Lecture Notes in Computer Science pp 325-335 (2014).
- A. Gagarin and V. Zverovich, The probabilistic approach to limited packing in graphs, Discrete Applied Mathematics 184 (2015) 146-153.
- Gallant, R., Gunther, G., Hartnell, B., Rall, D., Limited Packings in graphs. Discrete Applied Mathematics 158-12 (2010) 1357–1364.