

Sobre posets k -tree que admiten un modelo por contención de caminos en un árbol

L. Alcón ¹- N. Gudiño ²- M. Gutierrez ³

^{1,2,3} Dto. de Matemática, FCE–UNLP

² Dto. de Ciencias Básicas, FI–UNLP

^{2,3} CONICET

UMA - Bahía Blanca - Septiembre 2016

Un **conjunto parcialmente ordenado** o **poset** es un par $\mathbf{P} = (X, \leq)$ donde:

- X es un conjunto finito de vértices
- $\leq$ es una relación binaria reflexiva, simétrica y transitiva definida en X .
- x e y son **comparables** cuando $x < y$ o $y < x$.
Notación: $x \perp y$ en $\mathbf{P}$.
- x e y son **incomparables** cuando $x \neq y$ y no son comparables.
Notación $x \parallel y$ en $\mathbf{P}$.

Un **conjunto parcialmente ordenado** o **poset** es un par $\mathbf{P} = (X, \leq)$ donde:

- X es un conjunto finito de vértices
- $\leq$ es una relación binaria reflexiva, simétrica y transitiva definida en X .
- x e y son **comparables** cuando $x < y$ o $y < x$.
Notación: $x \perp y$ en $\mathbf{P}$.
- x e y son **incomparables** cuando $x \neq y$ y no son comparables.
Notación $x \parallel y$ en $\mathbf{P}$.

Si $y \in X$:

El **conjunto descendente** de y es $D(y) = \{x \in X : x < y\}$.

El **conjunto ascendente** de y es $U(y) = \{x \in X : y < x\}$.

y es un elemento **minimal** de $\mathbf{P}$ cuando $D(y) = \emptyset$.

y es un elemento **maximal** de $\mathbf{P}$ cuando $U(y) = \emptyset$.

Si $y \in X$:

El **conjunto descendente** de y es $D(y) = \{x \in X : x < y\}$.

El **conjunto ascendente** de y es $U(y) = \{x \in X : y < x\}$.

y es un elemento **minimal** de $\mathbf{P}$ cuando $D(y) = \emptyset$.

y es un elemento **maximal** de $\mathbf{P}$ cuando $U(y) = \emptyset$.

- Un **modelo por contención** de un poset $\mathbf{P} = (X, \leq)$ es una familia de conjuntos $\mathcal{F} = (F_x)_{x \in X}$:

$$x < y \iff F_x \subset F_y.$$

- Cuando los conjuntos F_x son intervalos de una recta el modelo es llamado un **modelo por contención de intervalos** o **modelo CI**¹.
- $\mathbf{P}$ admite un modelo por contención de intervalos entonces $\mathbf{P}$ es un **orden por contención de intervalos** o **poset CI**.

¹Dushnik, Ben and Miller, E.W.; *Partially Ordered Sets*, American Journal of Mathematics, vol.LXIII (1941).

- Un **modelo por contención** de un poset $\mathbf{P} = (X, \leq)$ es una familia de conjuntos $\mathcal{F} = (F_x)_{x \in X}$:

$$x < y \iff F_x \subset F_y.$$

- Cuando los conjuntos F_x son intervalos de una recta el modelo es llamado un **modelo por contención de intervalos** o **modelo CI**¹.
- $\mathbf{P}$ admite un modelo por contención de intervalos entonces $\mathbf{P}$ es un **orden por contención de intervalos** o **poset CI**.

¹Dushnik, Ben and Miller, E.W.; *Partially Ordered Sets*, American Journal of Mathematics, vol.LXIII (1941).

- Un **modelo por contención** de un poset $\mathbf{P} = (X, \leq)$ es una familia de conjuntos $\mathcal{F} = (F_x)_{x \in X}$:

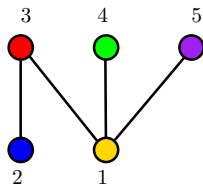
$$x < y \iff F_x \subset F_y.$$

- Cuando los conjuntos F_x son intervalos de una recta el modelo es llamado un **modelo por contención de intervalos** o **modelo CI**¹.
- $\mathbf{P}$ admite un modelo por contención de intervalos entonces $\mathbf{P}$ es un **orden por contención de intervalos** o **poset CI**.

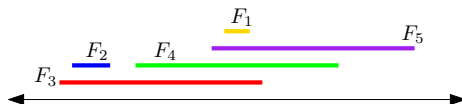
¹Dushnik, Ben and Miller, E.W.; *Partially Ordered Sets*, American Journal of Mathematics, vol.LXIII (1941).

Ejemplo

Diagrama de Hasse del poset $\mathbf{P}$



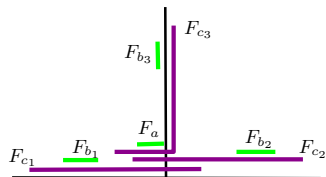
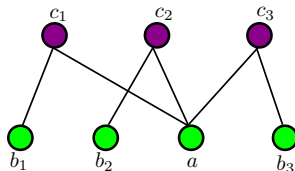
Modelo CI de $\mathbf{P}$



Posets CPT

P es un **orden por contención de caminos en un árbol**, o **CPT**², si él admite un modelo por contención tal que todo

F_x es un camino de un árbol T .



²M. Golumbic y A. Trenk, *Tolerance Graphs*; J. Spinrad, *Efficient Graph Representations*.

Dado un poset $\mathbf{P} = (X, \leq)$ llamaremos **grafo de comparabilidad** de $\mathbf{P}$ al grafo simple $\mathbf{G_P} = (X, E)$ siendo

$$E = \{\{x, y\} : x \perp y \text{ en } \mathbf{P}\}.$$

- Un grafo no dirigido $\mathbf{G}$ es un **grafo de comparabilidad** si existe un poset $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{G} = \mathbf{G_P}$.
- Los grafos de comparabilidad de posets *CPT* son **Grafos por Contención de Caminos en un Árbol** o **grafos CPT**.

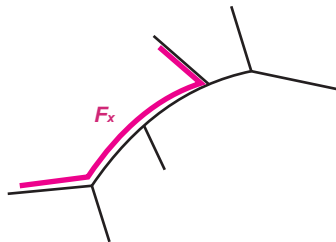
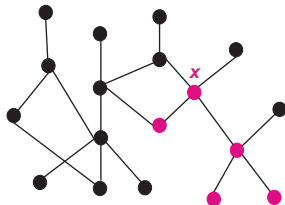
Dado un poset $\mathbf{P} = (X, \leq)$ llamaremos **grafo de comparabilidad** de $\mathbf{P}$ al grafo simple $\mathbf{G_P} = (X, E)$ siendo

$$E = \{\{x, y\} : x \perp y \text{ en } \mathbf{P}\}.$$

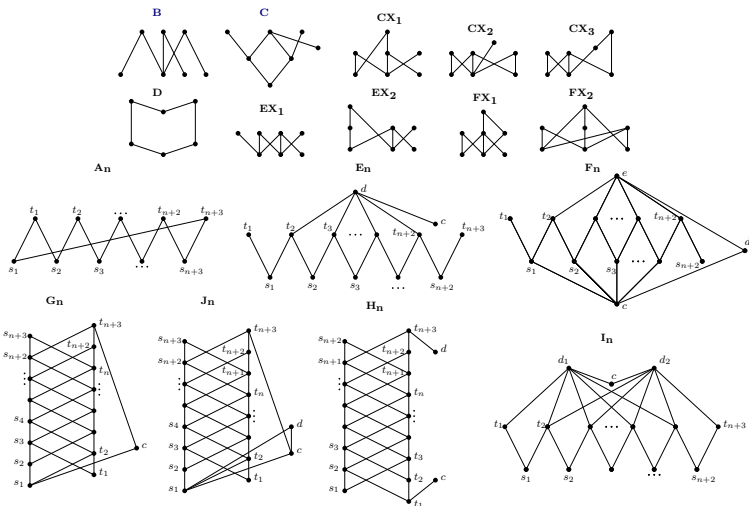
- Un grafo no dirigido $\mathbf{G}$ es un **grafo de comparabilidad** si existe un poset $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{G} = \mathbf{G_P}$.
- Los grafos de comparabilidad de posets *CPT* son **Grafos por Contención de Caminos en un Árbol** o **grafos CPT**.

Condición necesaria para ser poset CPT

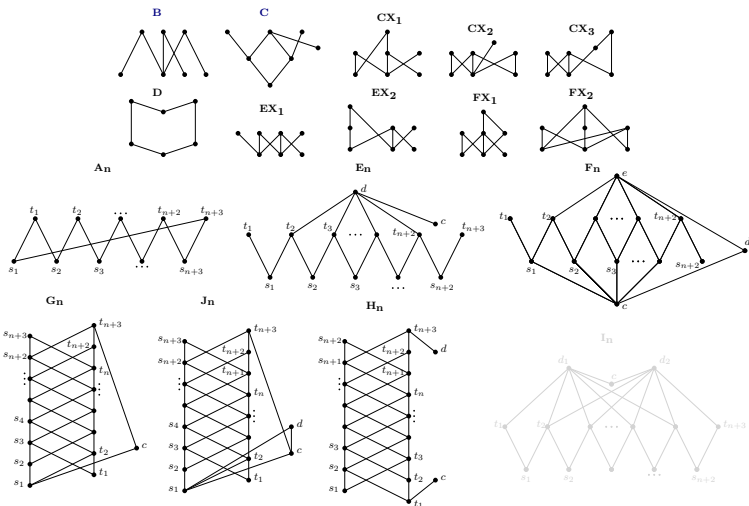
Si $\mathbf{P} = (X, \leq)$ es un poset *CPT* entonces para cada elemento $x \in X$ el subposet $\mathbf{P}(D[x])$ es un poset *CI*.



Prohibidos de CI = Posets 3-irreducibles

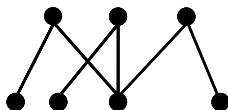


Construcción de posets no CPT



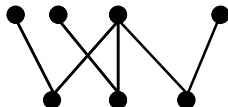
Construcción de posets no CPT

B



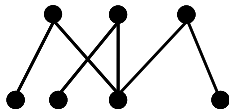
3-irreducible

B^d

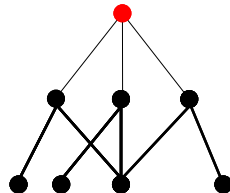


Construcción de posets no CPT

B

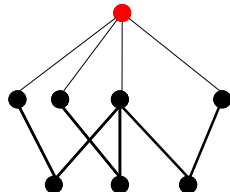
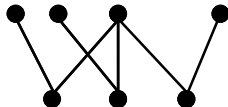


3-irreducible



no CPT

B^d

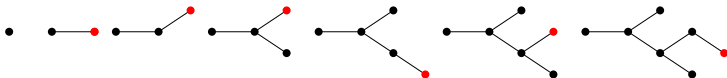


Posets k -tree

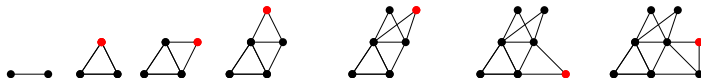
Los grafos k -tree tienen una definición recursiva

- Un grafo completo de k vértices es un grafo k -tree .
- En cada paso, se agrega un vértice vecino a exactamente k vértices los cuales inducen un completo.

grafo 1-tree = árbol

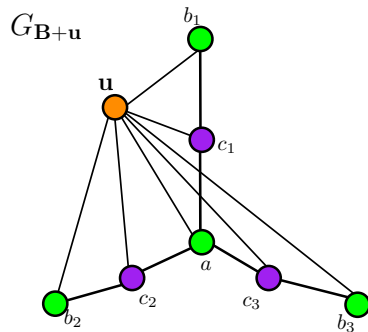
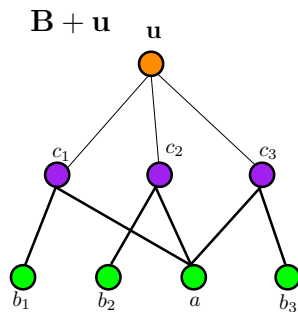


grafo 2-tree



$\mathbf{P}$ es un *poset k-tree* si su grafo de comparabilidad $\mathbf{G_P}$ es *k-tree*.

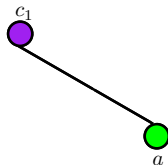
¿Los posets *k-tree* son CPT?



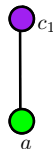
$\mathbf{P}$ es un *poset k-tree* si su grafo de comparabilidad $\mathbf{G_P}$ es k -tree.

¿Los posets k -tree son CPT?

$\mathbf{B} + \mathbf{u}$

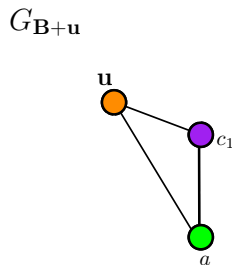
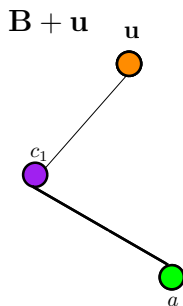


$G_{\mathbf{B}+\mathbf{u}}$



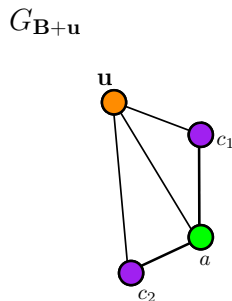
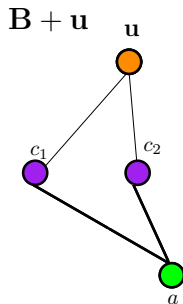
$\mathbf{P}$ es un *poset k-tree* si su grafo de comparabilidad $\mathbf{G_P}$ es *k-tree*.

¿Los posets *k-tree* son CPT?



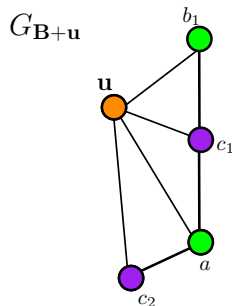
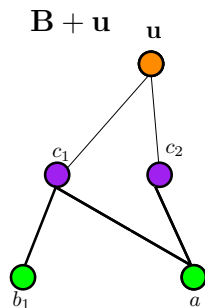
$\mathbf{P}$ es un *poset k-tree* si su grafo de comparabilidad $\mathbf{G_P}$ es *k-tree*.

¿Los posets *k-tree* son CPT?



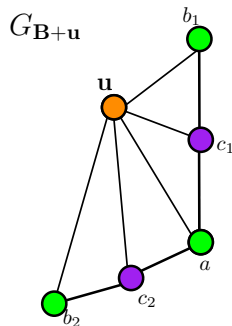
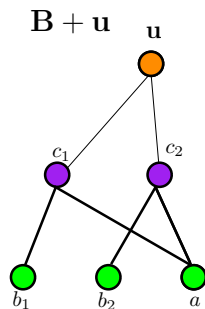
$\mathbf{P}$ es un *poset k-tree* si su grafo de comparabilidad $\mathbf{G_P}$ es *k-tree*.

¿Los posets *k-tree* son CPT?



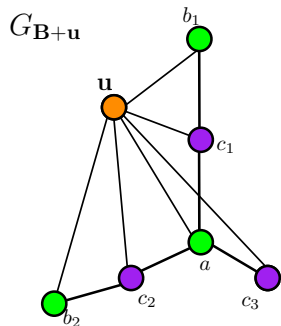
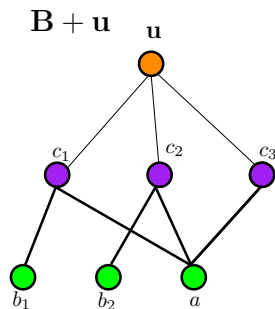
$\mathbf{P}$ es un *poset k-tree* si su grafo de comparabilidad $\mathbf{G_P}$ es *k-tree*.

¿Los posets *k-tree* son CPT?



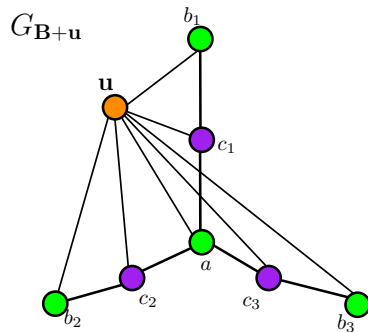
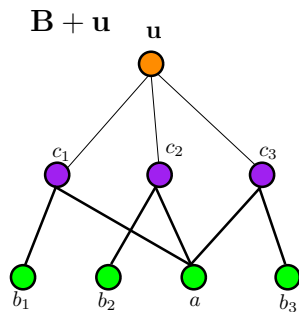
$\mathbf{P}$ es un *poset k-tree* si su grafo de comparabilidad $\mathbf{G_P}$ es *k-tree*.

¿Los posets *k-tree* son CPT?

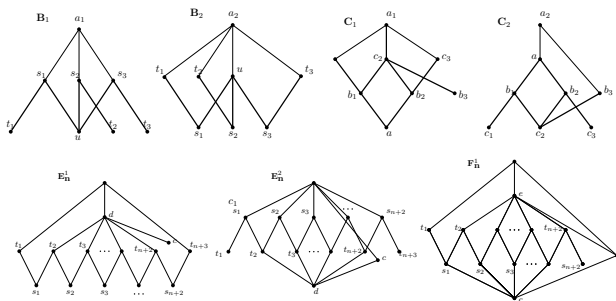


$\mathbf{P}$ es un *poset k-tree* si su grafo de comparabilidad $\mathbf{G_P}$ es *k-tree*.

¿Los posets *k-tree* son CPT?



Caracterización de los posets CPT en la clase k-tree



Caracterización de los posets CPT en la clase k-tree

Teorema

Para cualquier *poset k-tree* $\mathbf{P}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1 $\mathbf{P}$ es CPT
- 2 el conjunto descendente de cualquier vértice induce un poset CI
- 3 ninguno de los posets $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{E}_n^1, \mathbf{E}_n^2, \mathbf{F}_n$ es un subposet de $\mathbf{P}$.

Corolario

Todos los posets sin ciclos de altura uno son CPT.

Caracterización de los posets CPT en la clase k-tree

Teorema

Para cualquier *poset k-tree* $\mathbf{P}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1 $\mathbf{P}$ es CPT
- 2 el conjunto descendente de cualquier vértice induce un poset CI
- 3 ninguno de los posets $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{E}_n^1$, $\mathbf{E}_n^2$, $\mathbf{F}_n$ es un subposet de $\mathbf{P}$.

Corolario

Todos los posets sin ciclos de altura uno son CPT.

Caracterización de los posets CPT en la clase k-tree

Teorema

Para cualquier *poset k-tree* $\mathbf{P}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1 $\mathbf{P}$ es CPT
- 2 el conjunto descendente de cualquier vértice induce un poset CI
- 3 ninguno de los posets $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{E}_n^1, \mathbf{E}_n^2, \mathbf{F}_n$ es un subposet de $\mathbf{P}$.

Corolario

Todos los posets sin ciclos de altura uno son CPT.

-  A. Brandstädt, V. Le and J. Spinrad, *Graph classes: a survey*, (1999), Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
-  B. Dushnik, E. Miller, Partially ordered sets, *Amer. J. Math.* 63, (1941), pp. 600–610.
-  S. Even, A. Pnueli, A. Lempel Permutation graphs and transitive graphs, *J. ACM* 19, (1972), pp. 400–410.
-  T. Gallai, Transitiv Orientierbare Graphen, *Acta. Math. Hungar.* 18, (1967), pp. 25–66.
-  M.C. Golumbic, *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, Academic Press, Inc., (1980).
-  A. Pnueli, A. Lempel, S. Even, Transitive orientation of graphs and identification of permutation graphs, *Canad. J. Math.* 23, (1971), pp. 160–175.



W.T. Trotter, Combinatorics and partially ordered sets: dimension theory, The Johns Hopkins University Press, (1992).

¡MUCHAS GRACIAS!