Sobre *p*-particiones convexas y *p*-cubrimientos convexos

Lucía González [1], Luciano Grippo [1], Martín Safe [1,2],
Vinicius F. Dos Santos[3].

[1] Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina. [2] Universidad Nacional del Sur, Argentina. [3] Universidade Federal de Minas Gerais, Brazil.

LXV Reunión de Comunicaciones Científicas- UMA
Septiembre 2016

Dado un grafo G y una familia $\mathcal{C}$ de subconjuntos de $V(G)$, el par $(G, \mathcal{C})$ es una convexidad en G si:

- $\emptyset \in \mathcal{C}$,
- $V(G) \in \mathcal{C}$,
- $\mathcal{C}$ es cerrado bajo interseciones.

Un conjunto que pertenece a $\mathcal{C}$ es un conjunto $\mathcal{C}$-convexo.

Convexidad

Dado un grafo G y una familia $\mathcal{C}$ de subconjuntos de $V(G)$, el par $(G, \mathcal{C})$ es una convexidad en G si:

- $\emptyset \in \mathcal{C}$,
- $V(G) \in \mathcal{C}$,
- $\mathcal{C}$ es cerrado bajo interseciones.

Un conjunto que pertenece a $\mathcal{C}$ es un conjunto $\mathcal{C}$-convexo.

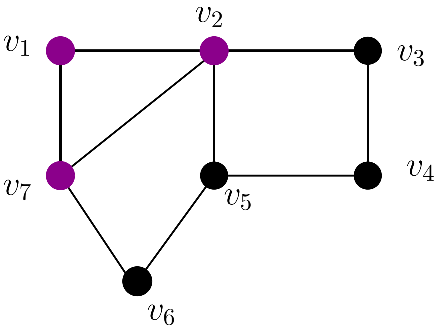
Convexidad Geodética

$S \subset V(G)$ es un conjunto g-convexo si para cada camino P de longitud mínima de G cuyos vértices extremos pertenecen a S, entonces cada vértice de P pertenece a S

Convexidad Geodética

$S \subset V(G)$ es un conjunto g-convexo si para cada camino P de longitud mínima de G cuyos vértices extremos pertenecen a S, entonces cada vértice de P pertenece a S

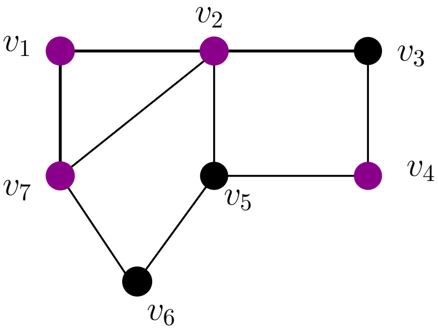
g-convexo



Convexidad Geodética

$S \subset V(G)$ es un conjunto g-convexo si para cada camino P de longitud mínima de G cuyos vértices extremos pertenecen a S, entonces cada vértice de P pertenece a S

no g-convexo



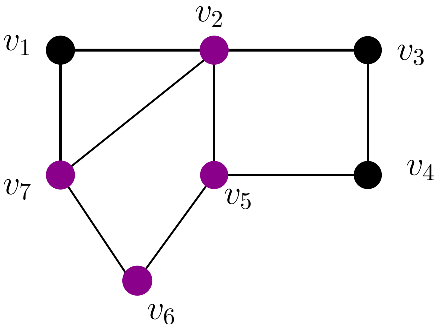
Convexidad Monofónica

$S \subset V(G)$ es un conjunto m-convexo si para cada camino inducido P de G cuyos vértices extremos pertenecen a S, entonces cada vértice de P pertenece a S

Convexidad Monofónica

$S \subset V(G)$ es un conjunto *m*-convexo si para cada camino inducido P de G cuyos vértices extremos pertenecen a S, entonces cada vértice de P pertenece a S

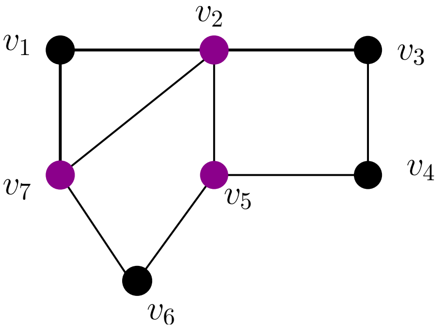
m-convexo



Convexidad Monofónica

$S \subset V(G)$ es un conjunto *m*-convexo si para cada camino inducido P de G cuyos vértices extremos pertenecen a S, entonces cada vértice de P pertenece a S

no *m*-convexo



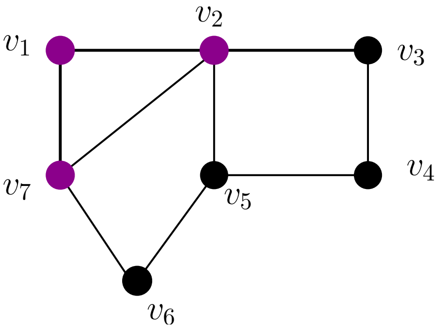
P_3-Convexidad

$S \subset V(G)$ es un conjunto P_3-convexo si para cada camino P de longitud 2 de G cuyos vértices extremos pertenecen a S, entonces cada vértice de P pertenece a S

P_3-Convexidad

$S \subset V(G)$ es un conjunto P_3-convexo si para cada camino P de longitud 2 de G cuyos vértices extremos pertenecen a S, entonces cada vértice de P pertenece a S

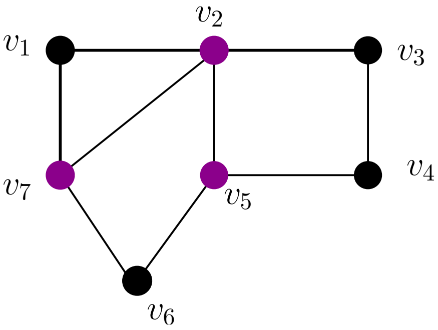
P_3-convexo



P_3-Convexidad

$S \subset V(G)$ es un conjunto P_3-convexo si para cada camino P de longitud 2 de G cuyos vértices extremos pertenecen a S, entonces cada vértice de P pertenece a S

no P_3-convexo



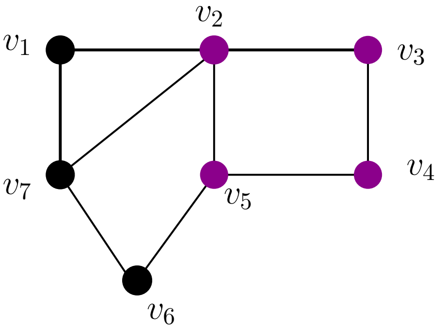
P_3^*-Convexidad

$S \subset V(G)$ es un conjunto P_3^*-convexo si para cada camino inducido P de longitud 2 de G cuyos vértices extremos pertenecen a S, entonces cada vértice de P pertenece a S

P_3^*-Convexidad

$S \subset V(G)$ es un conjunto P_3^*-convexo si para cada camino inducido P de longitud 2 de G cuyos vértices extremos pertenecen a S, entonces cada vértice de P pertenece a S

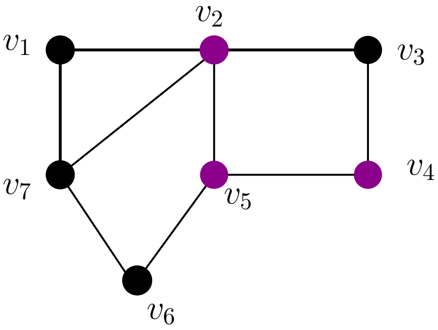
P_3^*-convexo



P_3^*-Convexidad

$S \subset V(G)$ es un conjunto P_3^*-convexo si para cada camino inducido P de longitud 2 de G cuyos vértices extremos pertenecen a S, entonces cada vértice de P pertenece a S

no P_3^*-convexo



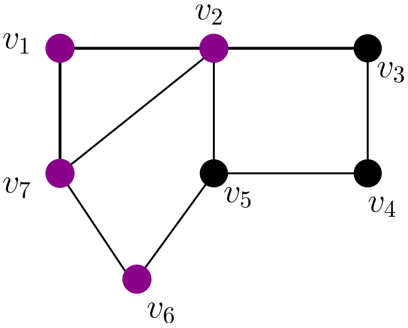
Convexidad Digital

$S \subset V(G)$ es un conjunto d-convexo si para todo $v \in V(G)$: $N_G[v] \subseteq N_G[S]$ entonces $v \in S$.

Convexidad Digital

$S \subset V(G)$ es un conjunto *d*-convexo si para todo $v \in V(G)$: $N_G[v] \subseteq N_G[S]$ entonces $v \in S$.

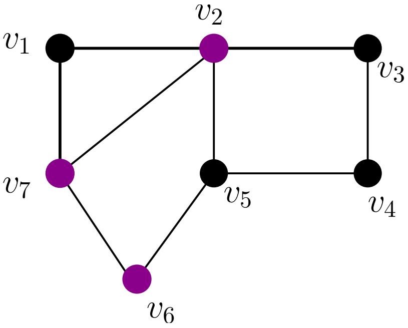
d-convexo



Convexidad Digital

$S \subset V(G)$ es un conjunto d-convexo si para todo $v \in V(G)$: $N_G[v] \subseteq N_G[S]$ entonces $v \in S$.

no d-convexo



* Dado un grafo G y una convexidad $\mathcal{C}$, se dice que G tiene un p-cubrimiento convexo si $V(G)$ admite un cubrimiento en p conjuntos $\mathcal{C}$-convexos no vacíos.
* Dado un grafo G y una convexidad $\mathcal{C}$, se dice que G tiene una p-partición convexa si $V(G)$ admite una partición en p conjuntos $\mathcal{C}$-convexos no vacíos.

Problemas de cubrimientos y particiones

* Dado un grafo G y una convexidad $\mathcal{C}$, se dice que G tiene un *p-cubrimiento convexo* si $V(G)$ admite un cubrimiento en p conjuntos $\mathcal{C}$-convexos no vacíos.
* Dado un grafo G y una convexidad $\mathcal{C}$, se dice que G tiene una *p-partición convexa* si $V(G)$ admite una partición en p conjuntos $\mathcal{C}$-convexos no vacíos.

Problemas estudiados

Dado un grafo G, en esta charla hablaremos de los problemas de decidir si existe un p-cubrimiento convexo de $V(G)$ y si existe una p-partición convexa de $V(G)$ en las siguientes convexidades:

- Monofónica,
- P_3,
- P_3^*,
- Digital.

Problemas que ya estaban estudiados:

	p-cubrimiento, *p* fijo	*p*-cubrimiento, *p* variable	*p*-partición, *p* fijo	*p*-partición, *p* variable
Geodética	NP-Completo (Buzatu + Cataranciuc)	NP-Completo	NP-Completo (Artigas 2011)	NP-Completo
Monofónica	???	???	???	???
Digital	???	???	???	???
P_3	???	???	???	NP-Completo (Centeno 2010)
P_3^*	???	???	???	???

Convexidad Monofónica: cubrimiento

Teorema

El problema de decidir, dado un grafo G, si existe un cubrimiento de $V(G)$ por 2 conjuntos m-convexos se resuelve en tiempo polinomial.

Convexidad Monofónica: partición

Teorema

El problema de decidir, dado un grafo G, si existe una partición de $V(G)$ en 2 conjuntos m-convexos se puede resolver en tiempo polinomial.

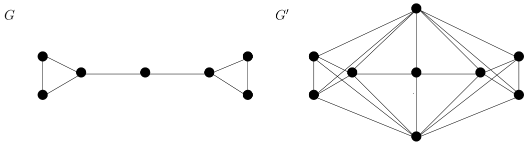
Teorema

El problema de decidir, dado un grafo G, si existe un cubrimiento (una partición) de $V(G)$ por p conjuntos m-convexos es NP-completo para todo $p \geq 3$.

Idea de la demostración
Adaptamos una técnica de Artigas, Dantas, Dourado y Szwarcfiter (2010) para probar la NP completitud del problema de p-partición convexa bajo la convexidad geodetica.

Idea de la demostración
Adaptamos una técnica de Artigas, Dantas, Dourado y Szwarcfiter (2010) para probar la NP completitud del problema de p-partición convexa bajo la convexidad geodetica.

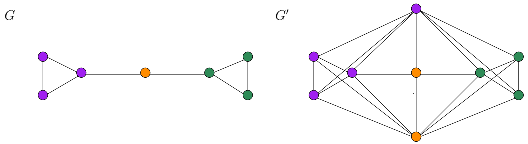
Sea G un grafo con $|V(G)| \geq 2$ que no es una clique. Tomamos una instancia general del problema p-CUBRIMIENTO CLIQUE (p-PARTICIÓN CLIQUE) que es NP- completo y construimos G' a partir de G de la siguiente manera



Probamos que existe un p-CUBRIMIENTO CLIQUE (p-PARTICIÓN CLIQUE) de $V(G)$ si y sólo si existe un p-cubrimiento (p-partición) m-convexo de $V(G')$.

Idea de la demostración
Adaptamos una técnica de Artigas, Dantas, Dourado y Szwarcfiter (2010) para probar la NP completitud del problema de p-cubrimiento convexo bajo la convexidad geodetica.

Sea G un grafo con $|V(G)| \geq 2$ que no es una clique. Tomamos una instancia general del problema p-CUBRIMIENTO CLIQUE (p-PARTICIÓN CLIQUE) que es NP- completo y construimos G' a partir de G de la siguiente manera



Probamos que existe un p-CUBRIMIENTO CLIQUE (p-PARTICIÓN CLIQUE) de $V(G)$ si y sólo si existe un p-cubrimiento (p-partición) m-convexo de $V(G')$.

Definiciones:
$S \subset V(G)$ es un conjunto d-convexo si para todo $v \in V(G)$ tal que $N_G[v] \subseteq N_G[S]$ entonces $v \in S$.

$S \subset V(G)$ es un conjunto totalmente dominante si para todo $v \in V(G)$, v es vecino al menos a un vértice de S.

Convexidad Digital: partición

Teorema

Dado un grafo bipartito G. Existe una partición en 2 conjuntos d-convexos si y sólo si G tiene diámetro al menos 3. Además, la partición se puede encontrar en tiempo lineal.

Convexidad Digital: cubrimiento

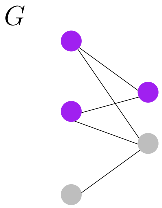
Teorema

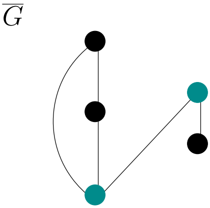
El problema de decidir, dado un grafo G, si existe un cubrimiento d-convexo de $V(G)$ de tamaño al menos p es NP-hard.

Teorema

El problema de decidir, dado un grafo G, si existe un cubrimiento d-convexo de $V(G)$ de tamaño al menos p es NP-hard.

Idea de la demostración: Probamos que decidir si un grafo tiene un cubrimiento por a lo sumo p conjuntos d-convexos es equivalente a decidir si hay un conjunto totalmente dominante de cardinal a lo sumo p en $\overline{G}$, que es un problema NP-hard (Paff, Laskar y Hedetniemi; 1983).





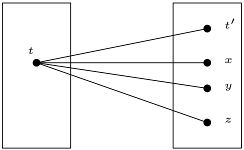
Convexidad Digital: partición

Teorema

El problema de decidir, dado un grafo G y $p \geq 2$, si existe una p-partición en p conjuntos d-convexos es NP-hard, incluso para grafos planares bipartitos.

Idea de la demostración:
Dada una instancia del problema MATCHING 3-DIMENSIONAL $T \subseteq X \times Y \times Z$. Sea G, con $V(G) = \{t, t' : t \in T\} \cup X \cup Y \cup Z$ y $E(G) = \{tt' : t \in T\} \cup \{(t, u) : t \in T \wedge u \in t\}$. G resulta un grafo planar bipartito con bipartición $\{T, V(G) \setminus T\}$. Sea $m = |T|$. Probamos que T es una instancia SI del problema MATCHING 3-DIMENSIONAL (que es NP-hard) si y sólo si G tiene una partición en m conjuntos d-convexos.

$T \subseteq X \times Y \times Z$ $\qquad$ $X \times Y \times Z \times T'$



$t = (x, y, z)$

P_3-Convexidad: Cubrimientos

Teorema

El problema de decidir, dado un grafo G y un $p \geq 2$, si existe un cubrimiento de $V(G)$ por p conjuntos P_3-convexos es NP-completo.

Teorema

El problema de decidir, dado un grafo G y un $p \geq 2$, si existe un cubrimiento de $V(G)$ por p conjuntos P_3-convexos es NP-completo.

Idea de la demostración:
Adaptamos la demostración de Centeno para probar que el problema de decidir, G y un $p \geq 2$, si existe una partición de $V(G)$ por p conjuntos P_3-convexos es NP-completo.

P_3-Convexidad: partición

Teorema

El problema de decidir, dado un grafo bipartito G, si existe una partición de $V(G)$ por p conjuntos P_3-convexos es NP-completo para todo $p \geq 2$.

P_3-Convexidad: partición

Teorema

El problema de decidir, dado un grafo bipartito G, si existe una partición de $V(G)$ por p conjuntos P_3-convexos es NP-completo para todo $p \geq 2$.

Idea de la demostración:
Probamos que el problema de decidir si existe una 2-partición bajo la P_3-convexidad en un grafo bipartito G es equivalente al problema de decidir si existe un matching cut set en G, que es NP-completo (Le and Randerath, 2001). Entonces el problema de 2-partición en grafos bipartitos es NP-completo.
Luego probamos que si el problema es NP- completo para p entonces lo es para $(p+1)$. Entonces como para $p = 2$ es NP-completo, también lo es para todo $p \geqslant 2$.

Teorema

El problema de decidir, dado un grafo bipartito G, si existe una partición de $V(G)$ por p conjuntos P_3^*-convexos es NP-completo para todo $p \geq 2$.

P_3^*-Convexidad: partición

Teorema

El problema de decidir, dado un grafo bipartito G, si existe una partición de $V(G)$ por p conjuntos P_3^*-convexos es NP-completo para todo $p \geq 2$.

Vale la misma demostración que para P_3 convexidad, pues en grafos bipartitos los conjuntos P_3-convexos coinciden con los conjuntos P_3^*-convexos.

P_3^*-Convexidad: Cubrimiento

Teorema

El problema de decidir, dado un grafo bipartito conexo G y un $p \geq 2$, si existe un cubrimiento de $V(G)$ por p conjuntos P_3^*-convexos es NP-completo.

Hasta ahora tenemos:

	p-cubrimiento, p fijo	**p-cubrimiento, p variable**	**p-partición, p fijo**	**p-partición, p variable**
Geodética	NP-Completo	NP-Completo	NP-Completo	NP-Completo
Monofónica	$p = 2$ Polinomial y $p \geqslant 3$ NP-completo	NP-completo	$p = 2$ Polinomial y $p \geqslant 3$ NP-completo	NP-completo
Digital	???	NP-Hard	???	NP-Hard
P_3	???	NP-completo	NP-completo en grafos bipartitos	NP-Completo
P_3^*	???	NP-completo en grafos bipartitos conexos	NP-completo en grafos bipartitos	NP-completo

Gracias por su atención!!!