

Problemas de dominación en grafos definidos por subgrafos prohibidos de a lo sumo cuatro vértices

G. Argiroffo¹

L. Fernández¹

P. Torres^{1,2}

¹ FCEIA, Universidad Nacional de Rosario

² CONICET- Argentina

UMA 2016, Bahía Blanca

Problema de conjunto dominante

Hallar un subconjunto D de vértices de G de cardinal mínimo tal que todo vértice de $V - D$ sea adyacente a un vértice de D .

Problema de conjunto dominante

Hallar un subconjunto D de vértices de G de cardinal mínimo tal que todo vértice de $V - D$ sea adyacente a un vértice de D .

$\gamma(G)$: Mínimo cardinal de un conjunto dominante.

Problema de conjunto dominante

Hallar un subconjunto D de vértices de G de cardinal mínimo tal que todo vértice de $V - D$ sea adyacente a un vértice de D .

$\gamma(G)$: Mínimo cardinal de un conjunto dominante.

Problema de función dominante

Hallar una función

$f : V \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $\sum_{i \in V} f(i)$ sea mínima y para todo $i \in V$ se satisfaga

$$\sum_{j \in N[i]} f(j) \geq 1.$$

Problema de k -upla dominante

Dado $k \in \mathbb{N}$ se pretende hallar una función $f : V \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $\sum_{i \in V} f(i)$ sea mínima y para todo $i \in V$ se satisfaga

$$\sum_{j \in N[i]} f(j) \geq k.$$

Problema de k -upla dominante

Dado $k \in \mathbb{N}$ se pretende hallar una función $f : V \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $\sum_{i \in V} f(i)$ sea mínima y para todo $i \in V$ se satisfaga

$$\sum_{j \in N[i]} f(j) \geq k.$$

$\gamma_{\times k}(G)$: Mínimo de la suma de los valores que puede asumir en los vértices una función.

Problema de k -upla dominante

Dado $k \in \mathbb{N}$ se pretende hallar una función $f : V \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $\sum_{i \in V} f(i)$ sea mínima y para todo $i \in V$ se satisfaga

$$\sum_{j \in N[i]} f(j) \geq k.$$

$\gamma_{\times k}(G)$: Mínimo de la suma de los valores que puede asumir en los vértices una función.

Problema de decisión asociado (k -DOM)

Instancia: $G = (V, E)$, $\ell \in \mathbb{N}$

Pregunta: Admite G una función de k -upla dominante de peso a lo sumo ℓ ?

Problema de $\{k\}$ -dominación

Dado $k \in \mathbb{N}$ se pretende hallar una función $f : V \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$ tal que $\sum_{i \in V} f(i)$ sea mínima y para todo $i \in V$ se satisfaga

$$\sum_{j \in N[i]} f(j) \geq k.$$

Problema de $\{k\}$ -dominación

Dado $k \in \mathbb{N}$ se pretende hallar una función $f : V \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$ tal que $\sum_{i \in V} f(i)$ sea mínima y para todo $i \in V$ se satisfaga

$$\sum_{j \in N[i]} f(j) \geq k.$$

$\gamma_{\{k\}}(G)$: Mínimo de la suma de los valores que puede asumir en los vértices una función.

Problema de $\{k\}$ -dominación

Dado $k \in \mathbb{N}$ se pretende hallar una función $f : V \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$ tal que $\sum_{i \in V} f(i)$ sea mínima y para todo $i \in V$ se satisfaga

$$\sum_{j \in N[i]} f(j) \geq k.$$

$\gamma_{\{k\}}(G)$: Mínimo de la suma de los valores que puede asumir en los vértices una función.

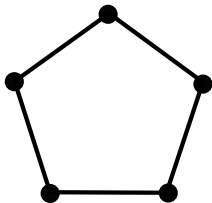
Problema de decisión asociado ($\{k\}$ -DOM)

Instancia: $G = (V, E)$, $\ell \in \mathbb{N}$

Pregunta: Hay una función de $\{k\}$ -dominación de G de peso a lo sumo ℓ ?

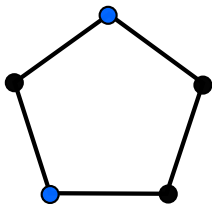
$$\gamma_{\{k\}}(G) \leq k \cdot \gamma(G)$$

$$\gamma_{\{k\}}(G) \leq k \cdot \gamma(G)$$



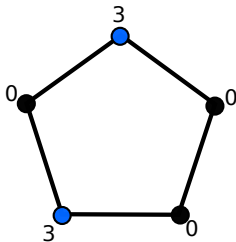
C_5

$$\gamma_{\{k\}}(G) \leq k \cdot \gamma(G)$$



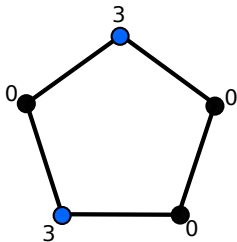
$$\gamma(C_5) = 2$$

$$\gamma_{\{k\}}(G) \leq k \cdot \gamma(G)$$

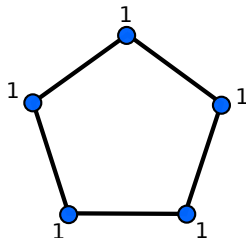


$$3 \cdot \gamma(C_5) = 6$$

$$\gamma_{\{k\}}(G) \leq k \cdot \gamma(G)$$



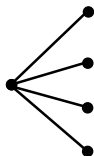
$$3 \cdot \gamma(C_5) = 6$$



$$\gamma_{\{3\}}(C_5) = 5$$

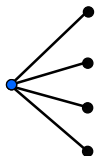
$$\gamma_{\times k}(G) \neq k \cdot \gamma(G)$$

$$\gamma_{\times k}(G) \neq k \cdot \gamma(G)$$



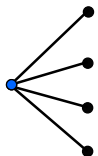
$K_{1,4}$

$$\gamma_{\times k}(G) \neq k \cdot \gamma(G)$$

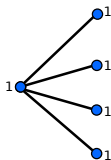


$$\gamma(K_{1,4}) = 1$$

$$\gamma_{\times k}(G) \neq k \cdot \gamma(G)$$

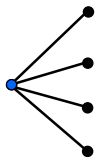


$$\gamma(K_{1,4}) = 1$$

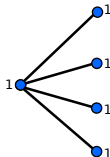


$$\gamma_{\times 2}(K_{1,4}) = 5$$

$$\gamma_{\times k}(G) \neq k \cdot \gamma(G)$$



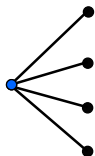
$$\gamma(K_{1,4}) = 1$$



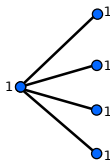
$$\gamma_{\times 2}(K_{1,4}) = 5$$

$$2 \cdot \gamma(K_{1,4}) \leq \gamma_{\times 2}(K_{1,4})$$

$$\gamma_{\times k}(G) \neq k \cdot \gamma(G)$$

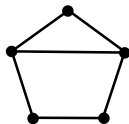


$$\gamma(K_{1,4}) = 1$$



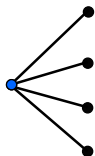
$$\gamma_{\times 2}(K_{1,4}) = 5$$

$$2 \cdot \gamma(K_{1,4}) \leq \gamma_{\times 2}(K_{1,4})$$

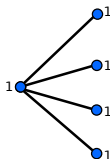


$$co-P_5$$

$$\gamma_{\times k}(G) \neq k \cdot \gamma(G)$$

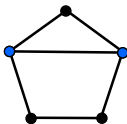


$$\gamma(K_{1,4}) = 1$$



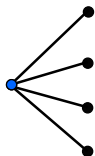
$$\gamma_{\times 2}(K_{1,4}) = 5$$

$$2 \cdot \gamma(K_{1,4}) \leq \gamma_{\times 2}(K_{1,4})$$

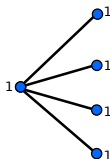


$$\gamma(co-P_5) = 2$$

$$\gamma_{\times k}(G) \neq k \cdot \gamma(G)$$

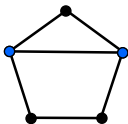


$$\gamma(K_{1,4}) = 1$$

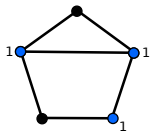


$$\gamma_{\times 2}(K_{1,4}) = 5$$

$$2 \cdot \gamma(K_{1,4}) \leq \gamma_{\times 2}(K_{1,4})$$

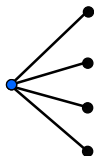


$$\gamma(co-P_5) = 2$$

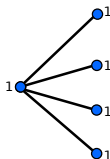


$$\gamma_{\times 2}(co-P_5) = 3$$

$$\gamma_{\times k}(G) \neq k \cdot \gamma(G)$$

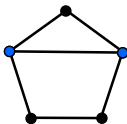


$$\gamma(K_{1,4}) = 1$$

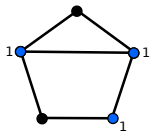


$$\gamma_{\times 2}(K_{1,4}) = 5$$

$$2 \cdot \gamma(K_{1,4}) \leq \gamma_{\times 2}(K_{1,4})$$



$$\gamma(co-P_5) = 2$$



$$\gamma_{\times 2}(co-P_5) = 3$$

$$2 \cdot \gamma(co-P_5) \geq \gamma_{\times 2}(co-P_5)$$

Grafos de 4 vértices



$$P_4 = \text{co} - P_4$$



K_4



diamond



C_4



paw



claw



$\text{co} - K_4 = 4K_1$



$\text{co} - \text{diamond}$



$\text{co} - C_4 = 2K_2$



$\text{co} - \text{paw}$



$\text{co} - \text{claw}$

Resultados para DOM

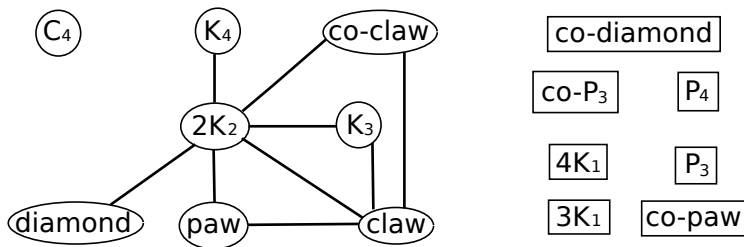


Figura: Complejidad en clases de grafos para el problema de conjunto dominante

Resultados directos para k -DOM y $\{k\}$ -DOM

Observación

Los problemas k -DOM y $\{k\}$ -DOM pueden resolverse en tiempo polinomial para clases con clique-width acotado.

Resultados directos para k -DOM y $\{k\}$ -DOM

Observación

Los problemas k -DOM y $\{k\}$ -DOM pueden resolverse en tiempo polinomial para clases con clique-width acotado.

Observación

*Las siguientes clases tienen clique-width acotado
 P_3 -free, $(\text{co-}P_3)$ -free, $(\text{paw}, 2K_2)$ -free, $(2K_2, \text{diamond})$ -free,
 P_4 -free, $(\text{claw}, \text{paw})$ -free, $(\text{claw}, \text{co-claw})$ -free,
 $(K_2 \cup \text{claw}, K_3)$ -free.*

Resultados directos para k -DOM y $\{k\}$ -DOM

Observación

k -DOM y $\{k\}$ -DOM *pueden resolverse en tiempo polinomial para las clases*

P_3 -free, $(co-P_3)$ -free, $(paw, 2K_2)$ -free, $(2K_2, diamond)$ -free,
 P_4 -free, $(claw, paw)$ -free, $(claw, co-claw)$ -free,
 $(K_2 \cup claw, K_3)$ -free.

Resultados directos para k -DOM y $\{k\}$ -DOM

Observación

k -DOM y $\{k\}$ -DOM *pueden resolverse en tiempo polinomial para las clases*

P_3 -free, $(co-P_3)$ -free, $(paw, 2K_2)$ -free, $(2K_2, diamond)$ -free,
 P_4 -free, $(claw, paw)$ -free, $(claw, co-claw)$ -free,
 $(K_2 \cup claw, K_3)$ -free.

Observación

k -DOM y $\{k\}$ -DOM *están en P para $(claw, K_3)$ -free.*

Resultados directos para k -DOM y $\{k\}$ -DOM

Observación

Los problemas k -DOM y $\{k\}$ -DOM están en NP-c para superclases de grafos split o bipartito.

Resultados directos para k -DOM y $\{k\}$ -DOM

Observación

Los problemas k -DOM y $\{k\}$ -DOM están en NP-c para superclases de grafos split o bipartito.

Observación

Las clases K_3 -free, paw-free, co-claw-free y diamond-free son superclases de bipartito.

Resultados directos para k -DOM y $\{k\}$ -DOM

Observación

Los problemas k -DOM y $\{k\}$ -DOM están en NP-c para superclases de grafos split o bipartito.

Observación

Las clases K_3 -free, paw-free, co-claw-free y diamond-free son superclases de bipartito.

Observación

Los grafos split son $(2K_2, C_4)$ -free.

Resultados directos para k -DOM y $\{k\}$ -DOM

Observación

Los problemas k -DOM y $\{k\}$ -DOM están en NP-c para superclases de grafos split o bipartito.

Observación

Las clases K_3 -free, paw-free, co-claw-free y diamond-free son superclases de bipartito.

Observación

Los grafos split son $(2K_2, C_4)$ -free.

Observación

Los problemas k -DOM y $\{k\}$ -DOM están en NP-c para K_3 -free, paw-free, co-claw-free, diamond-free y $(2K_2, C_4)$.

Resultados para $\{k\}$ -DOM

Observación

Si $\mathcal{F}$ es una clase de grafos y $\gamma(G) \leq c, \forall G \in \mathcal{F}$, entonces $\{k\}$ -DOM está en P para todos los grafos en $\mathcal{F}$.

Resultados para $\{k\}$ -DOM

Observación

Si $\mathcal{F}$ es una clase de grafos y $\gamma(G) \leq c, \forall G \in \mathcal{F}$, entonces $\{k\}$ -DOM está en P para todos los grafos en $\mathcal{F}$.

Observación

$\{k\}$ -DOM puede resolverse en tiempo polinomial para grafos $3K_1$ -free y $4K_1$ -free.

Resultados para $\{k\}$ -DOM

Observación

Si $\mathcal{F}$ es una clase de grafos y $\gamma(G) \leq c, \forall G \in \mathcal{F}$, entonces $\{k\}$ -DOM está en P para todos los grafos en $\mathcal{F}$.

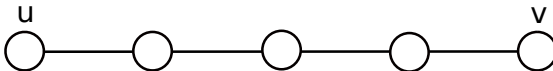
Observación

$\{k\}$ -DOM puede resolverse en tiempo polinomial para grafos $3K_1$ -free y $4K_1$ -free.

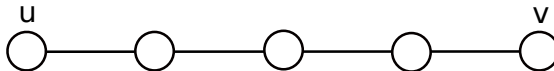
Observación

$\{k\}$ -DOM puede resolverse en tiempo polinomial para grafos co-paw-free y co-diamond-free.

Triple subdivisión

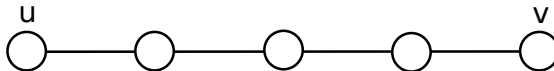


Triple subdivisión



$$\gamma_{\{k\}}(G') = \gamma_{\{k\}}(G) + k \cdot |E(G)|$$

Triple subdivisión



$$\gamma_{\{k\}}(G') = \gamma_{\{k\}}(G) + k \cdot |E(G)|$$

Lema

Para todo grafo G , G' es $(K_4, C_4, paw, diamond, co-claw)$ -free.

Resultados para $\{k\}$ -DOM

Lema

Para todo grafo G , G' es $(K_4, C_4, paw, diamond, co-claw)$ -free.

Teorema

$\{k\}$ -DOM es NP-c para $(K_4, C_4, paw, diamond, co-claw)$ -free.

Resultados para $\{k\}$ -DOM

Lema

Para todo grafo G , G' es $(K_4, C_4, paw, diamond, co-claw)$ -free.

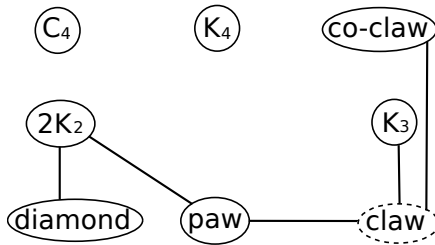
Teorema

$\{k\}$ -DOM es NP-c para $(K_4, C_4, paw, diamond, co-claw)$ -free.

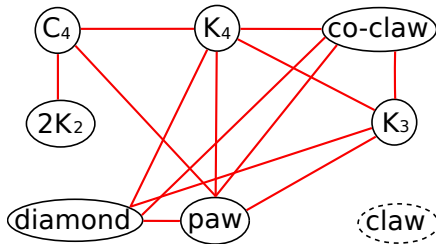
Corolario

$\{k\}$ -DOM es NP-c para $(K_4, diamond)$ -free, (K_4, C_4) -free y (C_4, paw) -free

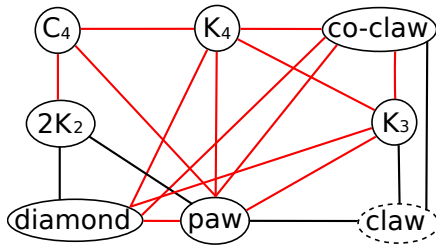
Resumen para $\{k\}$ -DOM



Resumen para $\{k\}$ -DOM



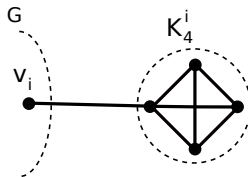
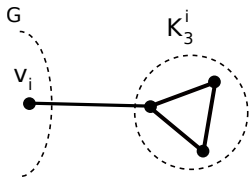
Resumen para $\{k\}$ -DOM



Transformación: Dado G un grafo y un entero $k \geq 2$, definimos $H(G)$ de la siguiente forma: agregamos a cada vértice v_i un completo K_k^i de vértices $\{w_1^i, \dots, w_k^i\}$, y la arista $v_i w_1^i$.

Resultados para k -DOM

Transformación: Dado G un grafo y un entero $k \geq 2$, definimos $H(G)$ de la siguiente forma: agregamos a cada vértice v_i un completo K_k^i de vértices $\{w_1^i, \dots, w_k^i\}$, y la arista $v_i w_1^i$.



Lema

Para todo grafo G es :

$$\gamma_{\times k}(H(G)) = \gamma_{\times(k-1)}(G) + k|V(G)|.$$

Lema

Para todo grafo G es :

$$\gamma_{\times k}(H(G)) = \gamma_{\times(k-1)}(G) + k|V(G)|.$$

Teorema

Si G es un grafo $(C_4, \text{diamond})$ -free, $H(G)$ también lo es.

Lema

Para todo grafo G es :

$$\gamma_{\times k}(H(G)) = \gamma_{\times(k-1)}(G) + k|V(G)|.$$

Teorema

Si G es un grafo $(C_4, \text{diamond})$ -free, $H(G)$ también lo es.

Corolario

k -DOM está en NP-c para $(C_4, \text{diamond})$ -free.

Transformación: Dado ahora un grafo G , agregamos un vértice universal, es decir un vértice que está conectado con todos los vértices del grafo, y lo notamos $G \cup v$.

Transformación: Dado ahora un grafo G , agregamos un vértice universal, es decir un vértice que está conectado con todos los vértices del grafo, y lo notamos $G \cup v$.

Lema

Para todo grafo G se tiene:

$$\gamma_{\times k}(G \cup v) = \gamma_{\times(k-1)}(G) + 1.$$

Transformación: Dado ahora un grafo G , agregamos un vértice universal, es decir un vértice que está conectado con todos los vértices del grafo, y lo notamos $G \cup v$.

Lema

Para todo grafo G se tiene:

$$\gamma_{\times k}(G \cup v) = \gamma_{\times(k-1)}(G) + 1.$$

Teorema

Si G es un grafo $(C_4, \text{co-claw})$ -free, $G \cup v$ también lo es.

Resultados para k -DOM

Transformación: Dado ahora un grafo G , agregamos un vértice universal, es decir un vértice que está conectado con todos los vértices del grafo, y lo notamos $G \cup v$.

Lema

Para todo grafo G se tiene:

$$\gamma_{\times k}(G \cup v) = \gamma_{\times(k-1)}(G) + 1.$$

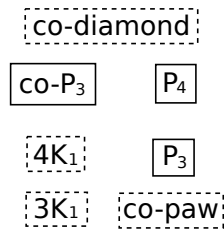
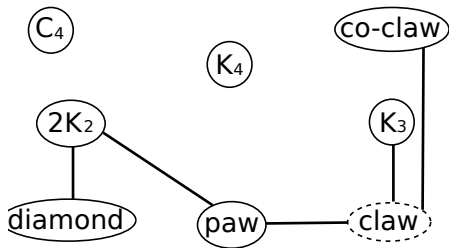
Teorema

Si G es un grafo $(C_4, co - claw)$ -free, $G \cup v$ también lo es.

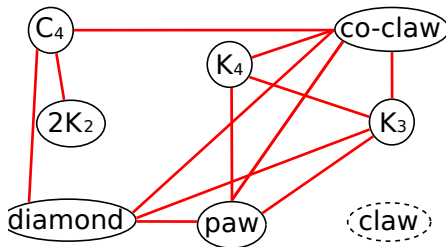
Corolario

k -DOM es NP-completo en $(C_4, co - claw)$ -free.

Resumen para k -DOM



Resumen para k -DOM



co-diamond

co-P_3

P_4

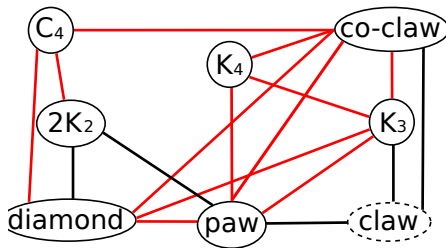
$4K_1$

P_3

$3K_1$

co-paw

Resumen para k -DOM



co-diamond

co-P_3

P_4

$4K_1$

P_3

$3K_1$

co-paw



G. Argiroffo, V. Leoni, P. Torres

On the complexity of k -domination and k -tuple domination in graphs.

Inf. Process. Lett. 115 (2015) 556-561.



A. Brandstädt, J. Engelfriet, H. O. Le, V.V. Lozin

Clique-width for 4-vertex forbidden subgraphs.

Theory Comput. Syst. 39 (2006) 561–590.



M. C. Lin, M. J. Mizrahi

On the complexity of the minimum domination problem restricted by forbidden induced subgraphs of small size.

Discrete Appl. Math. 195 (2015) 53–58.

Muchas gracias