El problema de dominación Grundy para grafos block

Expositor: Carolina Lucía González
Autores: Gabriela Argiroffo, Carolina Lucía González

Universidad Nacional de Rosario

22 de septiembre de 2016

Definiciones

Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo y $v \in V(G)$.

Definiciones

Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo y $v \in V(G)$.

La vecindad cerrada de v es $N[v] = \{u : vu \in E(G)\} \cup \{v\}$

Definiciones

Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo y $v \in V(G)$.

La vecindad cerrada de v es $N[v] = \{u : vu \in E(G)\} \cup \{v\}$

$D \subseteq V(G)$ es un conjunto dominante si $D \cap N[v] \neq \emptyset \; \forall v \in V(G)$.

Definiciones

Sea $S = (v_1, \ldots, v_k)$ una sucesión de vértices distintos de G.

Definiciones

Sea $S = (v_1, \ldots, v_k)$ una sucesión de vértices distintos de G.

S es una sucesión legal si

$$N[v_i] - \bigcup_{j=1}^{i-1} N[v_j] \neq \emptyset \quad \forall i \in \{2, \ldots, k\}$$

Definiciones

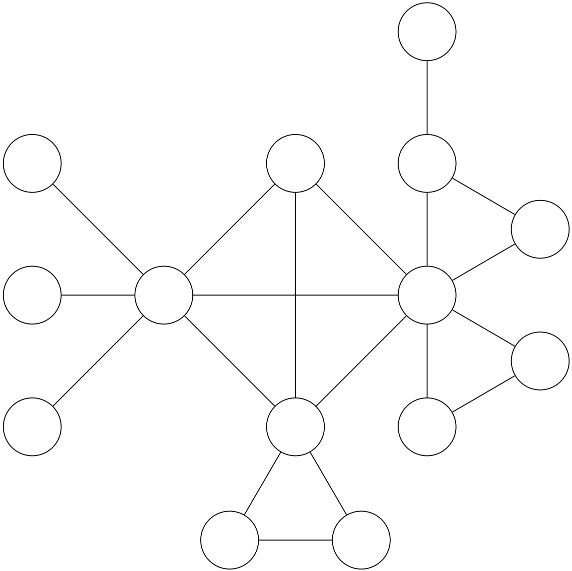
Sea $S = (v_1, \ldots, v_k)$ una sucesión de vértices distintos de G.

S es una sucesión legal si

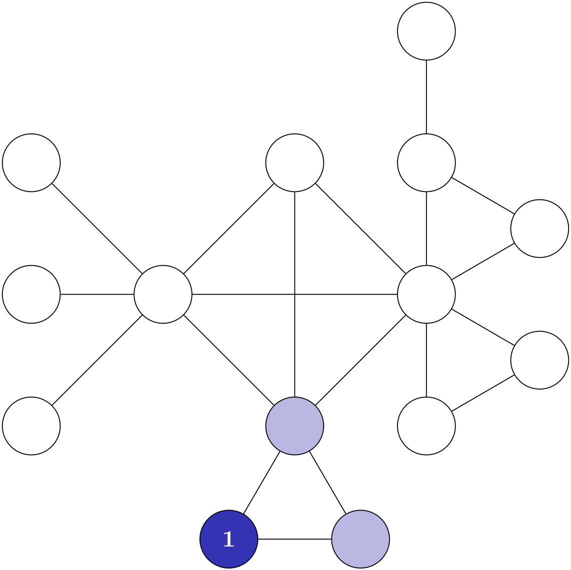
$$N[v_i] - \bigcup_{j=1}^{i-1} N[v_j] \neq \emptyset \quad \forall i \in \{2, \ldots, k\}$$

S es una sucesión legal dominante si S es legal y $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es un conjunto dominante.

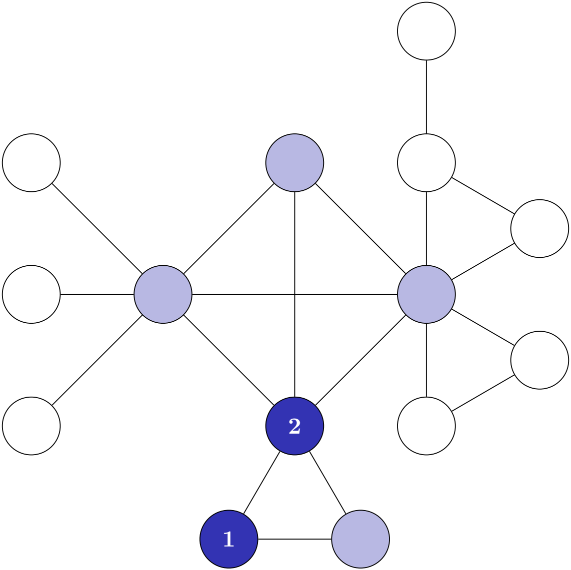
Ejemplo de una sucesión legal dominante



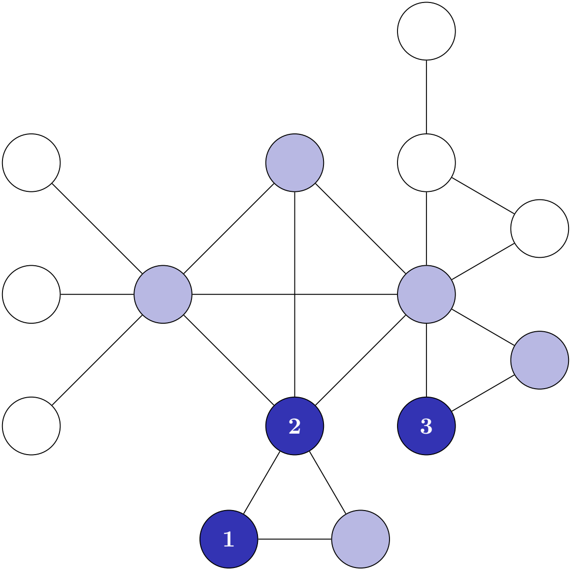
Ejemplo de una sucesión legal dominante



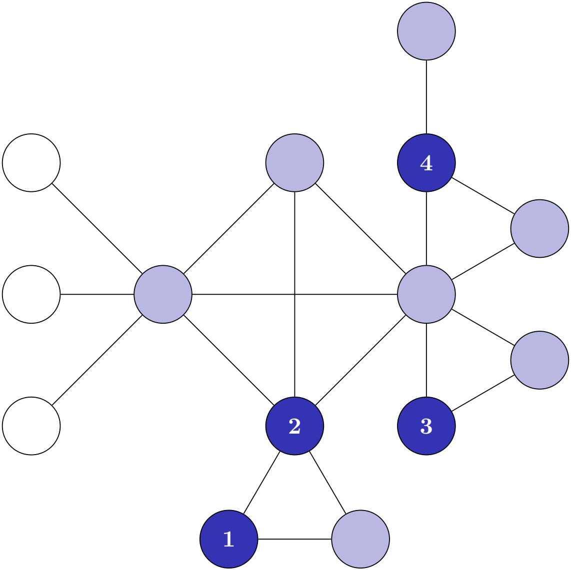
Ejemplo de una sucesión legal dominante



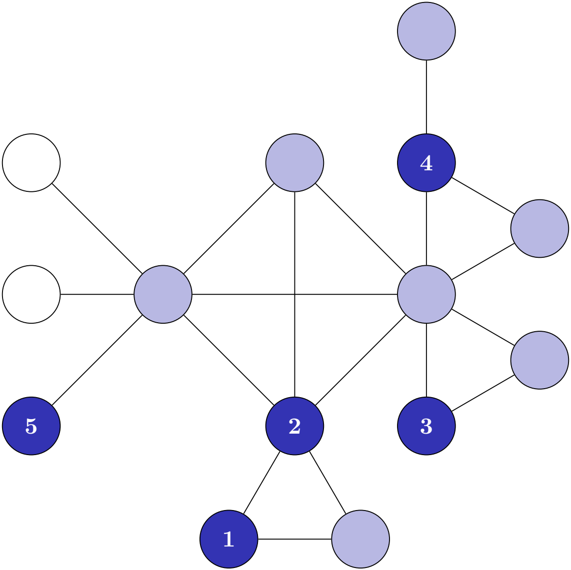
Ejemplo de una sucesión legal dominante



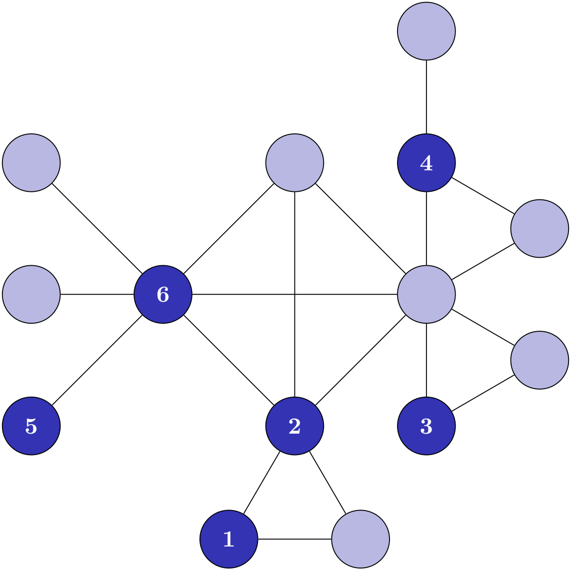
Ejemplo de una sucesión legal dominante



Ejemplo de una sucesión legal dominante



Ejemplo de una sucesión legal dominante



El problema de dominación Grundy

El número de dominación Grundy de G ($\gamma_{gr}(G)$) es la máxima longitud de una sucesión legal dominante.

El problema de dominación Grundy

El número de dominación Grundy de G ($\gamma_{gr}(G)$) es la máxima longitud de una sucesión legal dominante.
S es una sucesión dominante de Grundy si es legal dominante y de longitud máxima.

El problema de dominación Grundy

El número de dominación Grundy de G ($\gamma_{gr}(G)$) es la máxima longitud de una sucesión legal dominante.
S es una sucesión dominante de Grundy si es legal dominante y de longitud máxima.

De manera natural, se puede formular el siguiente problema de decisión asociado:

Número de dominación Grundy (Gr-DOM)	
Instancia:	$G = (V, E)$, $j \in \mathbb{N}$.
Pregunta:	¿$\gamma_{gr}(G) \geq j$?

Resultados preliminares

Brešar et al. (2014, 2016):

Resultados preliminares

Brešar et al. (2014, 2016):

- $(\textsc{Gr}\text{-}\mathrm{DOM})$ es NP-completo incluso para grafos cordales [2].

Resultados preliminares

Brešar et al. (2014, 2016):

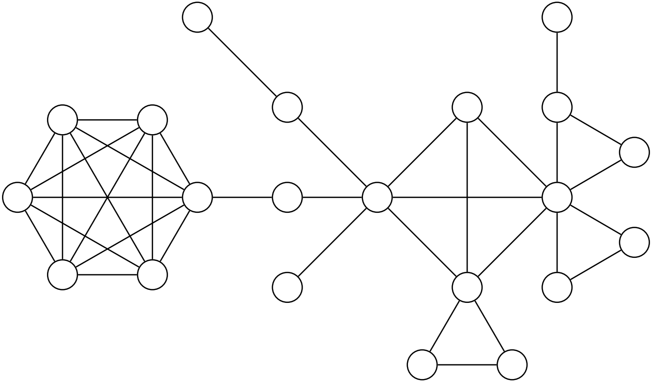
- (Gr-DOM) es NP-completo incluso para grafos cordales [2].
- Existen algoritmos lineales para grafos split, cografos, árboles [2] y grafos de intervalo [1].

Grafos block

Un grafo block es un grafo en cual todas sus componentes biconexas son cliques.

Grafos block

Un grafo block es un grafo en cual todas sus componentes biconexas son cliques. Por ejemplo:



Parámetros

Definición

Dados $G = (V, E)$, $v \in V$ y $S = (v_1, \ldots, v_k)$ sucesión legal, decimos que S satisface la propiedad

Parámetros

Definición

Dados $G = (V, E)$, $v \in V$ y $S = (v_1, \ldots, v_k)$ sucesión legal, decimos que S satisface la propiedad

- AS si $v \in S$

Parámetros

Definición

Dados $G = (V, E)$, $v \in V$ y $S = (v_1, \ldots, v_k)$ sucesión legal, decimos que S satisface la propiedad

- AS si $v \in S$
- FI si $\exists i \;/\; v = v_i \wedge v_i \in N[v_i] - \displaystyle\bigcup_{j=1}^{i-1} N[v_j]$

Parámetros

Definición

Dados $G = (V, E)$, $v \in V$ y $S = (v_1, \ldots, v_k)$ sucesión legal, decimos que S satisface la propiedad

- AS si $v \in S$
- FI si $\exists i \;/\; v = v_i \wedge v_i \in N[v_i] - \bigcup_{j=1}^{i-1} N[v_j]$
- FA si $\exists i \;/\; \{v\} = N[v_i] - \bigcup_{j=1}^{i-1} N[v_j]$

Parámetros

Definición

Dados $G = (V, E)$, $v \in V$ y $S = (v_1, \ldots, v_k)$ sucesión legal, decimos que S satisface la propiedad

- AS si $v \in S$
- FI si $\exists i \ / \ v = v_i \wedge v_i \in N[v_i] - \displaystyle\bigcup_{j=1}^{i-1} N[v_j]$
- FA si $\exists i \ / \ \{v\} = N[v_i] - \displaystyle\bigcup_{j=1}^{i-1} N[v_j]$
- $\overline{P}$ si no satisface la propiedad P

Parámetros

Definición

Dadas $P_1, \ldots, P_r$ propiedades que puede satisfacer una sucesión legal, notamos

$$\gamma_{gr}^{P_1,\ldots,P_r}(G, v)$$

al máximo cardinal de una sucesión legal que satisface las propiedades $P_1, \ldots, P_r$ para el grafo G y el vértice v.

Parámetros

En este caso, los parámetros que nos interesan son:

$$\gamma_{gr}^{AS} \qquad \gamma_{gr}^{\overline{AS}}$$

$$\gamma_{gr}^{FI} \qquad \gamma_{gr}^{\overline{FI}}$$

$$\gamma_{gr}^{FI,\overline{FA}} \qquad \gamma_{gr}^{\overline{FI,FA}}$$

$$\gamma_{gr}^{AS,\overline{FI}} \qquad \gamma_{gr}^{\overline{FA}}$$

$$\gamma_{gr}^{AS,\overline{FA}} \qquad \gamma_{gr}^{\overline{AS},\overline{FA}}$$

Relaciones entre los parámetros

Teorema

Para todo grafo G y vértice $v \in V(G)$:

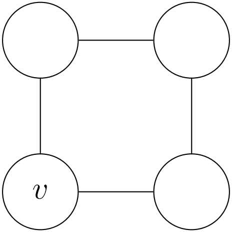
$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & \boxed{\gamma_{gr}(G) = \gamma_{gr}^{AS}(G,v)} \arrow[dll] \arrow[dr] & & \\
 & \gamma_{gr}^{\overline{FI,FA}}(G,v) \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \gamma_{gr}^{FI}(G,v) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\gamma_{gr}^{\overline{FA}}(G,v) = \gamma_{gr}^{AS,\overline{FA}}(G,v) \arrow[dd] \arrow[dr] & & \gamma_{gr}^{\overline{FI}}(G,v) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \gamma_{gr}^{FI,\overline{FA}}(G,v) \arrow[d] & 1 \\
 & \gamma_{gr}^{\overline{AS}}(G,v) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \gamma_{gr}^{AS,\overline{FI}}(G,v) & \gamma_{gr}^{FI}(G,v) - 1 & \\
\gamma_{gr}^{\overline{AS},\overline{FA}}(G,v) \arrow[d] \arrow[drr] & & \boxed{\gamma_{gr}(G) - 1} \arrow[dll] \arrow[d] & & & \\
\gamma_{gr}^{\overline{FA}}(G,v) - 1 \arrow[dr] & & \gamma_{gr}^{\overline{AS}}(G,v) - 1 \arrow[dl] & & & \\
 & \boxed{\gamma_{gr}(G) - 2} & & & &
\end{tikzcd}
$$

Parámetros

Observación: Si bien varios de los parámetros se encuentran acotados entre $\gamma_{gr}(G)$ y $\gamma_{gr}(G) - 2$, se pueden dar diversas combinaciones de estos valores.

Parámetros

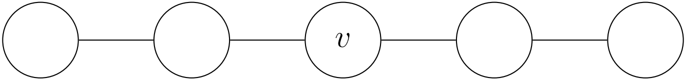
Observación: Si bien varios de los parámetros se encuentran acotados entre $\gamma_{gr}(G)$ y $\gamma_{gr}(G)-2$, se pueden dar diversas combinaciones de estos valores. Por ejemplo:



$$
\begin{aligned}
4 &= \gamma_{gr}(G) = \gamma_{gr}^{\overline{FI},\overline{FA}}(G,v) = \gamma_{gr}^{\overline{FI}}(G,v) = \gamma_{gr}^{\overline{FA}}(G,v) = \gamma_{gr}^{\overline{AS}}(G,v) \\
&= \gamma_{gr}^{AS,\overline{FI}}(G,v) = \gamma_{gr}^{\overline{AS},\overline{FA}}(G,v) = \gamma_{gr}^{FI}(G,v) = \gamma_{gr}^{FI,\overline{FA}}(G,v)
\end{aligned}
$$

Parámetros

Observación: Si bien varios de los parámetros se encuentran acotados entre $\gamma_{gr}(G)$ y $\gamma_{gr}(G)-2$, se pueden dar diversas combinaciones de estos valores. Por ejemplo:



$$
\begin{aligned}
&4=\gamma_{gr}(G)=\gamma_{gr}^{\overline{FI},\overline{FA}}(G,v)=\gamma_{gr}^{\overline{FI}}(G,v)=\gamma_{gr}^{AS,\overline{FI}}(G,v)\\
&3=\gamma_{gr}^{\overline{FA}}(G,v)=\gamma_{gr}^{\overline{AS}}(G,v)=\gamma_{gr}^{FI}(G,v)=\gamma_{gr}^{FI,\overline{FA}}(G,v)\\
&2=\gamma_{gr}^{\overline{AS},\overline{FA}}(G,v)
\end{aligned}
$$

El algoritmo

Dado un grafo G con componentes biconexas $C_1, \ldots, C_k$, construimos el grafo T_G de la siguiente manera:

El algoritmo

Dado un grafo G con componentes biconexas $C_1, \ldots, C_k$, construimos el grafo T_G de la siguiente manera:

- $V(T_G) = V(G) \cup \{c_1, \ldots, c_k\}$

El algoritmo

Dado un grafo G con componentes biconexas $C_1, \ldots, C_k$, construimos el grafo T_G de la siguiente manera:

- $V(T_G) = V(G) \cup \{c_1, \ldots, c_k\}$
- $E(T_G) = \bigcup_{i=0}^{k} \{vc_i \mid v \in C_i\}$

El algoritmo

Dado un grafo G con componentes biconexas $C_1, \ldots, C_k$, construimos el grafo T_G de la siguiente manera:

- $V(T_G) = V(G) \cup \{c_1, \ldots, c_k\}$
- $E(T_G) = \bigcup_{i=0}^{k} \{vc_i \mid v \in C_i\}$

Se puede demostrar que T_G es un árbol y puede ser obtenido en tiempo lineal.[3]

El algoritmo

Marcamos como raíz de T_G a un vértice cualquiera $r \in V(G)$.

El algoritmo

Marcamos como raíz de T_G a un vértice cualquiera $r \in V(G)$.

Notamos con G_x al subgrafo de G correspondiente al subárbol de T_G con raíz en x.

El algoritmo

Marcamos como raíz de T_G a un vértice cualquiera $r \in V(G)$.

Notamos con G_x al subgrafo de G correspondiente al subárbol de T_G con raíz en x.

Definimos dos funciones mutuamente recursivas f_V y f_C:

El algoritmo

Marcamos como raíz de T_G a un vértice cualquiera $r \in V(G)$.

Notamos con G_x al subgrafo de G correspondiente al subárbol de T_G con raíz en x.

Definimos dos funciones mutuamente recursivas f_V y f_C:

- Si $v \in V(G)$, $f_V(v)$ calcula $\gamma_{gr}^{AS}(G_v, v)$, $\gamma_{gr}^{\overline{AS}}(G_v, v)$, $\gamma_{gr}^{FI}(G_v, v)$, $\gamma_{gr}^{\overline{FI}}(G_v, v)$, $\gamma_{gr}^{FI,\overline{FA}}(G_v, v)$, $\gamma_{gr}^{\overline{FI,FA}}(G_v, v)$, $\gamma_{gr}^{AS,\overline{FI}}(G_v, v)$, $\gamma_{gr}^{\overline{FA}}(G_v, v)$ y $\gamma_{gr}^{\overline{AS},\overline{FA}}(G_v, v)$.

El algoritmo

Marcamos como raíz de T_G a un vértice cualquiera $r \in V(G)$.

Notamos con G_x al subgrafo de G correspondiente al subárbol de T_G con raíz en x.

Definimos dos funciones mutuamente recursivas f_V y f_C:

- Si $v \in V(G)$, $f_V(v)$ calcula $\gamma_{gr}^{AS}(G_v, v)$, $\gamma_{gr}^{\overline{AS}}(G_v, v)$, $\gamma_{gr}^{FI}(G_v, v)$, $\gamma_{gr}^{\overline{FI}}(G_v, v)$, $\gamma_{gr}^{FI,\overline{FA}}(G_v, v)$, $\gamma_{gr}^{\overline{FI,FA}}(G_v, v)$, $\gamma_{gr}^{AS,\overline{FI}}(G_v, v)$, $\gamma_{gr}^{\overline{FA}}(G_v, v)$ y $\gamma_{gr}^{\overline{AS},\overline{FA}}(G_v, v)$.
- Si $c \in \{c_1, \ldots, c_k\}$ y v es el padre de c en T_G, $f_C(c)$ calcula $\gamma_{gr}^{AS}(G_c, v)$, $\gamma_{gr}^{\overline{AS}}(G_c, v)$, $\gamma_{gr}^{FI}(G_c, v)$, $\gamma_{gr}^{\overline{FI}}(G_c, v)$, $\gamma_{gr}^{FI,\overline{FA}}(G_c, v)$, $\gamma_{gr}^{\overline{FI,FA}}(G_c, v)$, $\gamma_{gr}^{AS,\overline{FI}}(G_c, v)$, $\gamma_{gr}^{\overline{FA}}(G_c, v)$ y $\gamma_{gr}^{\overline{AS},\overline{FA}}(G_c, v)$.

El algoritmo

Algoritmo 1: f_V

Entrada: G, T_G, $v \in V(G)$

Salida: $\left(\gamma_{gr}^{AS}(G_v, v), \gamma_{gr}^{\overline{AS}}(G_v, v), \ldots, \gamma_{gr}^{\overline{AS},\overline{FA}}(G_v, v)\right)$

$C \leftarrow \{c_i \mid v \in C_i \wedge c_i$ es hijo de $v\}$

si $C = \emptyset$ **entonces**

  devolver $(1, 0, \ldots, 0)$

si no, si $C = \{c_i\}$ **entonces**

  devolver $f_C(c_i)$

en otro caso

  para todo $c \in C$ **hacer**

    $\left(\gamma_{gr}^{AS}(G_c, v), \gamma_{gr}^{\overline{AS}}(G_c, v), \ldots, \gamma_{gr}^{\overline{AS},\overline{FA}}(G_c, v)\right) \leftarrow f_C(c)$

  …

  $$\gamma_{gr}^{FI,\overline{FA}}(G_v, v) \leftarrow \max_{a \in C} \left\{ \gamma_{gr}^{FI,\overline{FA}}(G_a, v) + \sum_{c \in C - \{a\}} \left(\gamma_{gr}^{FI}(G_c, v) - 1 \right) \right\}$$

  …

  devolver $\left(\gamma_{gr}^{AS}(G_v, v), \gamma_{gr}^{\overline{AS}}(G_v, v), \ldots, \gamma_{gr}^{\overline{AS},\overline{FA}}(G_v, v)\right)$

El algoritmo

Algoritmo 2: f_C

Entrada: G, T_G, $c_i \in \{c_1, \dots, c_k\}$
Salida: $\left(\gamma_{gr}^{AS}(G_{c_i}, p), \gamma_{gr}^{\overline{AS}}(G_{c_i}, p), \dots, \gamma_{gr}^{\overline{AS}, \overline{FA}}(G_{c_i}, p)\right)$, siendo p el padre de c_i

$p \leftarrow$ padre de c_i
$V \leftarrow \{v \mid v \in C_i \wedge v$ es hijo de $c_i\}$
si C_i *es una clique* **entonces**
  para todo $v \in V$ **hacer**
    $\left(\gamma_{gr}^{AS}(G_v, v), \gamma_{gr}^{\overline{AS}}(G_v, v), \dots, \gamma_{gr}^{\overline{AS}, \overline{FA}}(G_v, v)\right) \leftarrow f_V(v)$
  ...
  $\gamma_{gr}^{FI, \overline{FA}}(G_{c_i}, p) \leftarrow \max_{a \in V} \left\{ 1 + \sum_{v \in V - \{a\}} \gamma_{gr}^{\overline{FI, FA}}(G_v, v) + \gamma_{gr}^{\overline{FA}}(G_a, a) \right\}$
  ...
  devolver $\left(\gamma_{gr}^{AS}(G_{c_i}, p), \gamma_{gr}^{\overline{AS}}(G_{c_i}, p), \dots, \gamma_{gr}^{\overline{AS}, \overline{FA}}(G_{c_i}, p)\right)$
en otro caso
  ...

El algoritmo

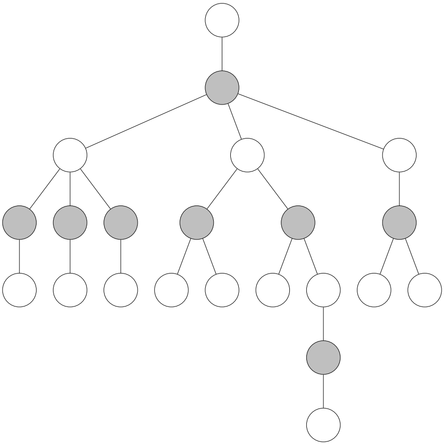
Algoritmo 3: Número de dominación Grundy

Entrada: Grafo G
Salida: $\gamma_{gr}(G)$

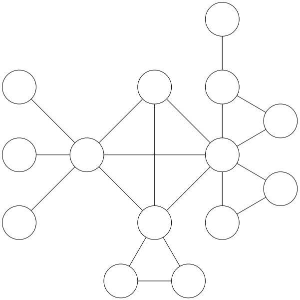
Construir T_G y marcar su raíz r
$\left(\gamma_{gr}^{AS}(G,r), \gamma_{gr}^{\overline{AS}}(G,r), \ldots, \gamma_{gr}^{\overline{AS},\overline{FA}}(G,r)\right) \leftarrow f_V(r)$
devolver $\gamma_{gr}^{AS}(G,r)$

Ejemplo

T_G

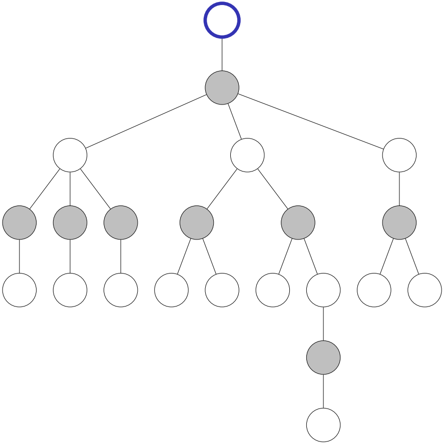


G

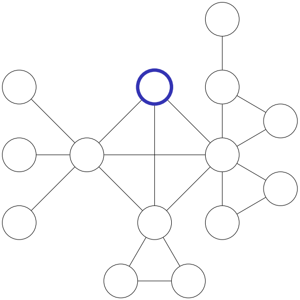


Ejemplo

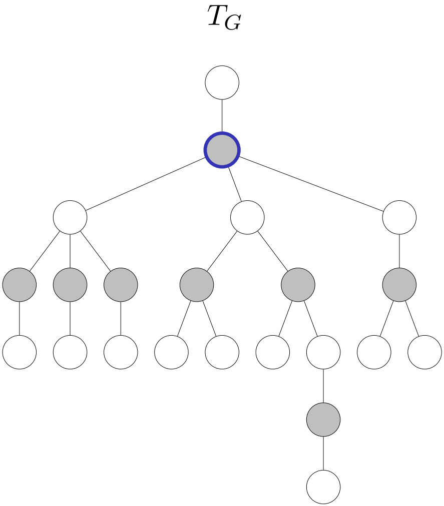
T_G

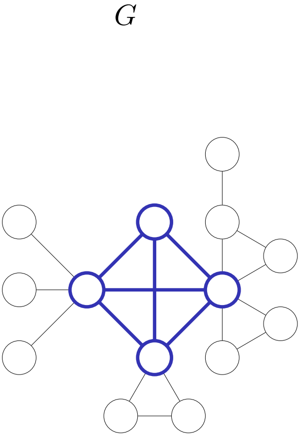


G



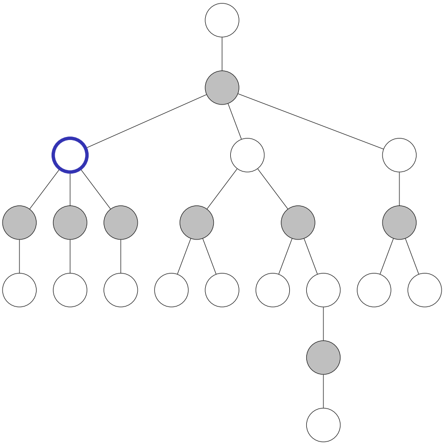
Ejemplo



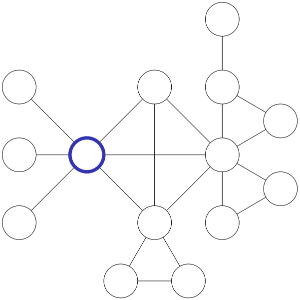


Ejemplo

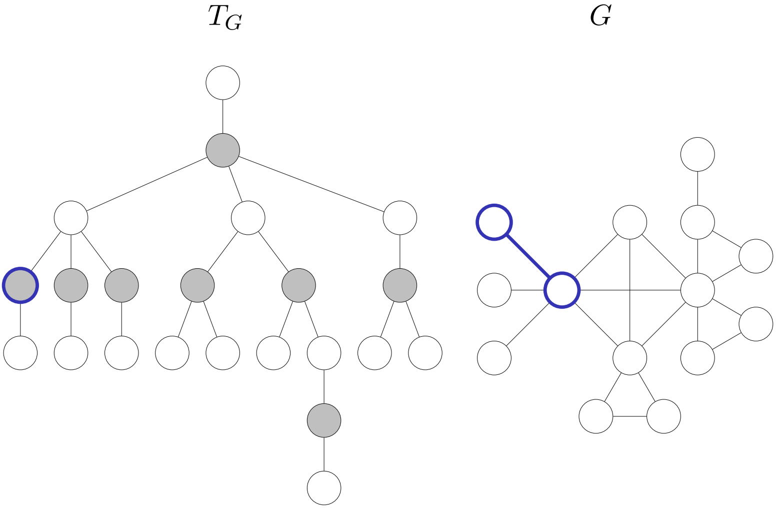
T_G



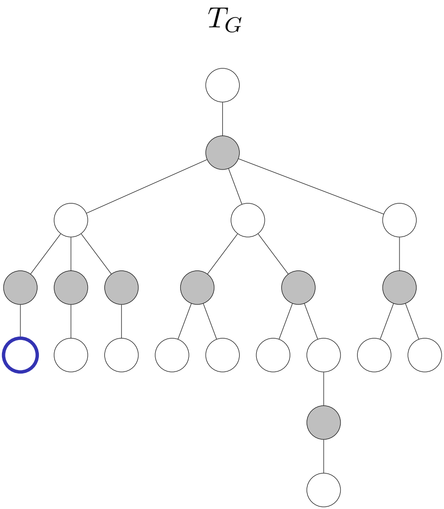
G

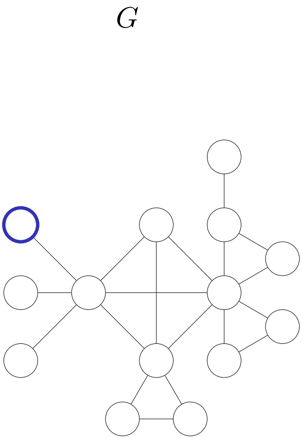


Ejemplo

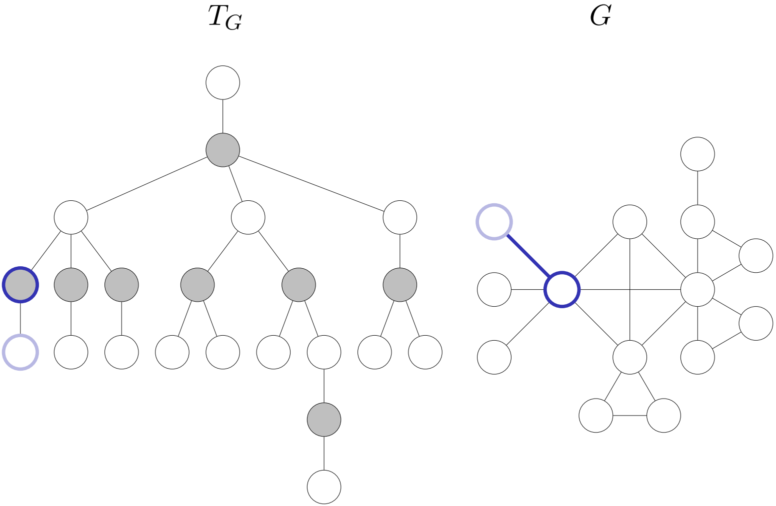


Ejemplo

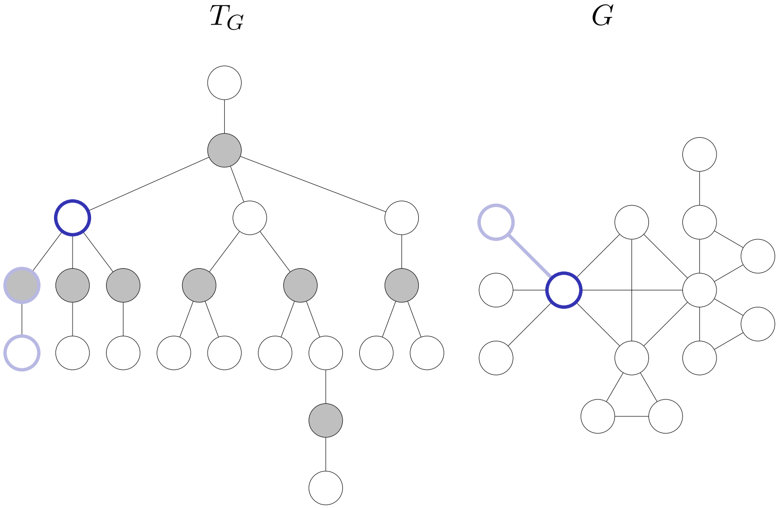




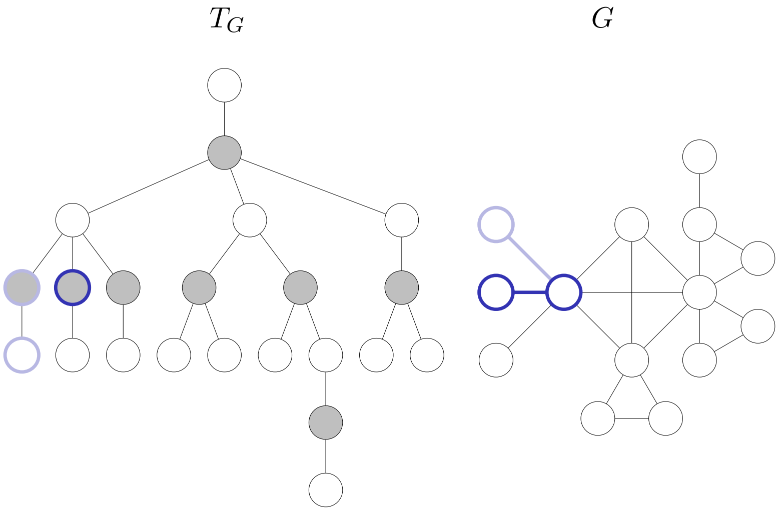
Ejemplo



Ejemplo

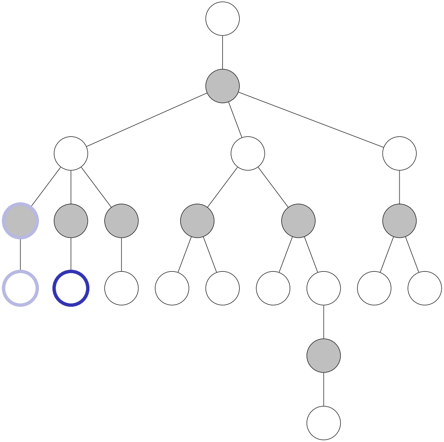


Ejemplo

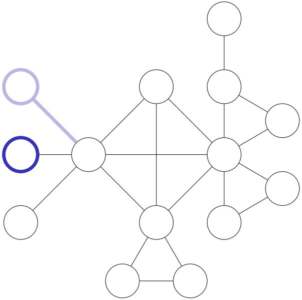


Ejemplo

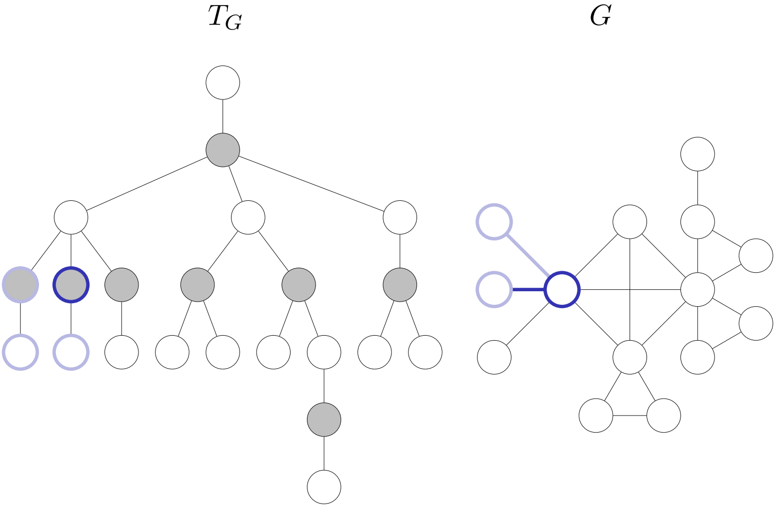
T_G



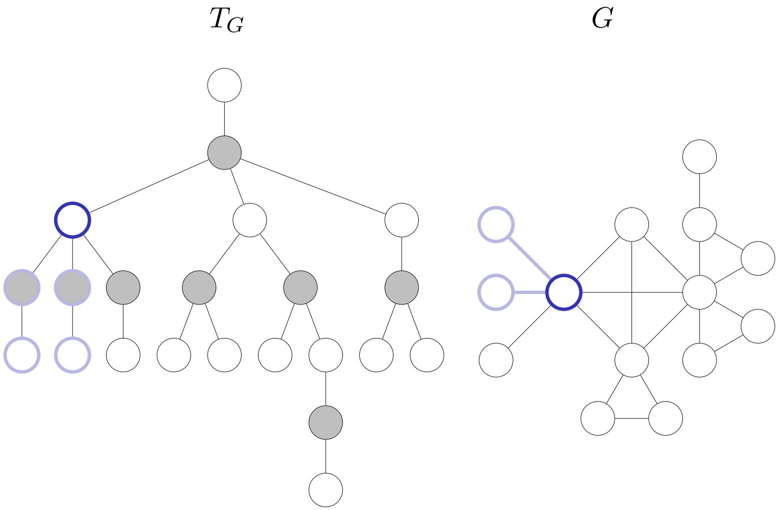
G



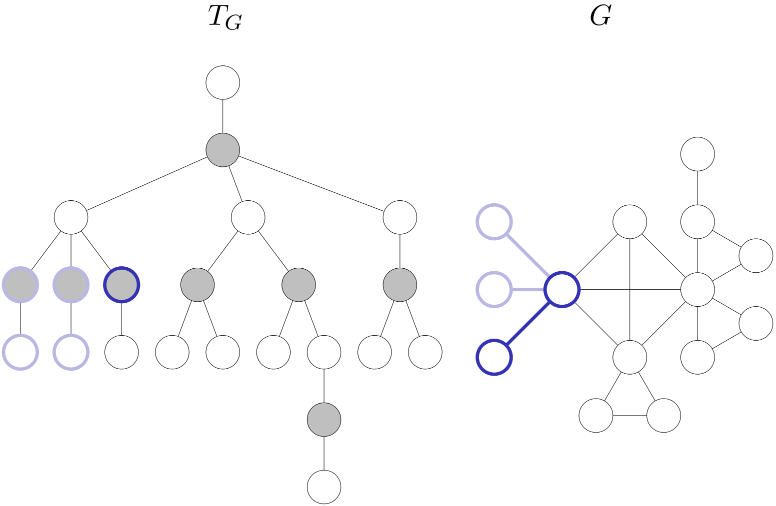
Ejemplo



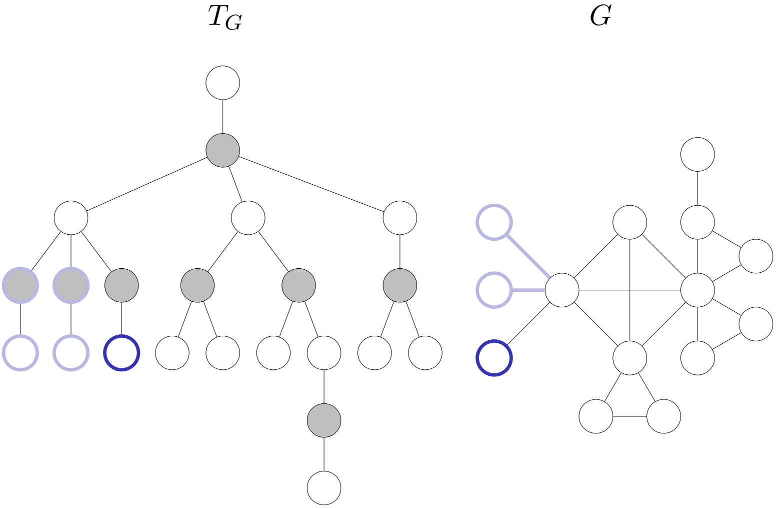
Ejemplo



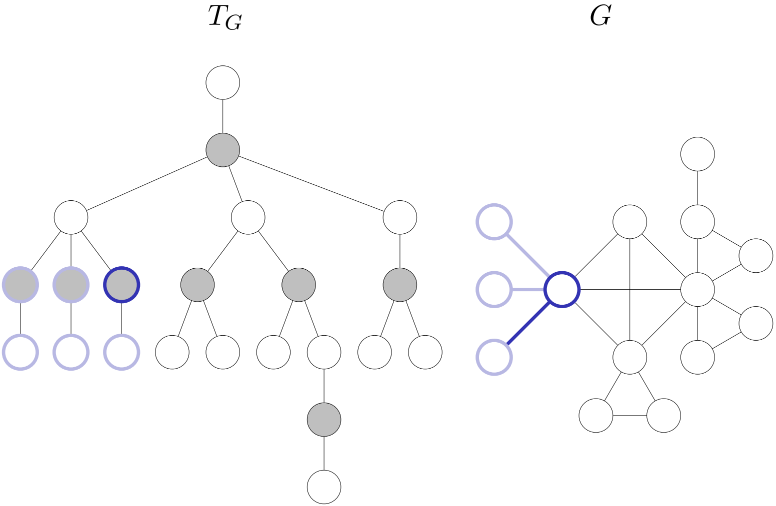
Ejemplo



Ejemplo

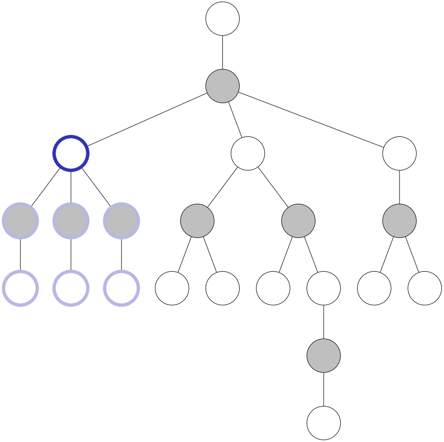


Ejemplo

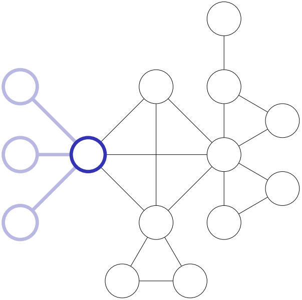


Ejemplo

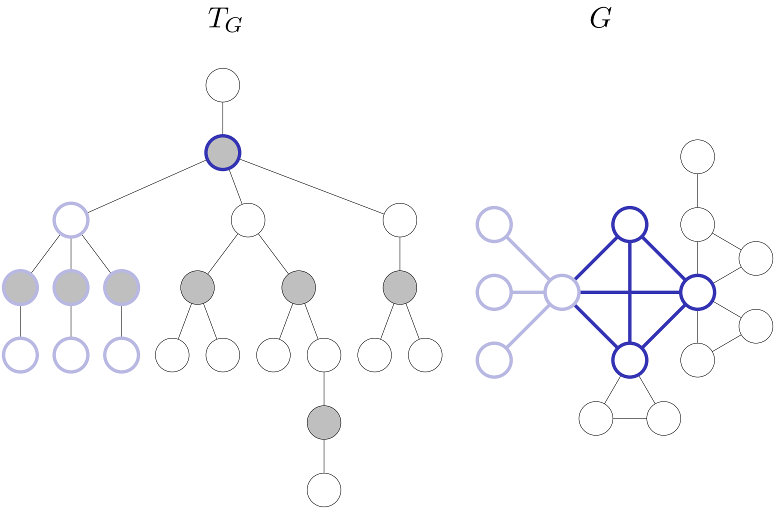
T_G



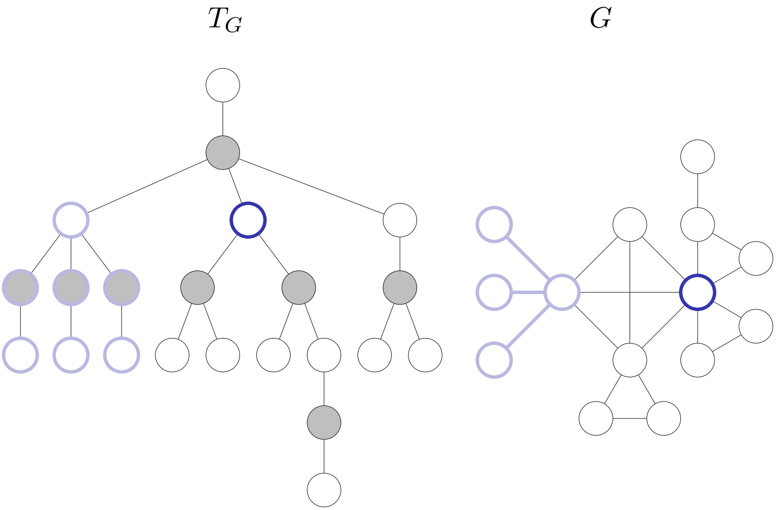
G



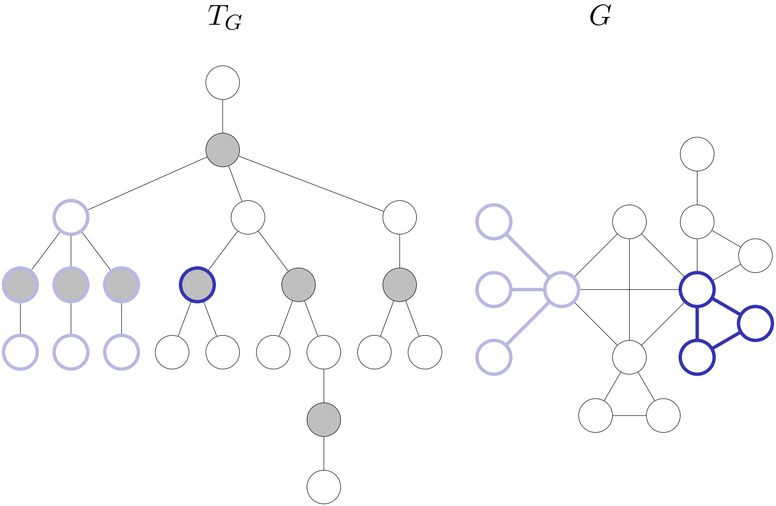
Ejemplo



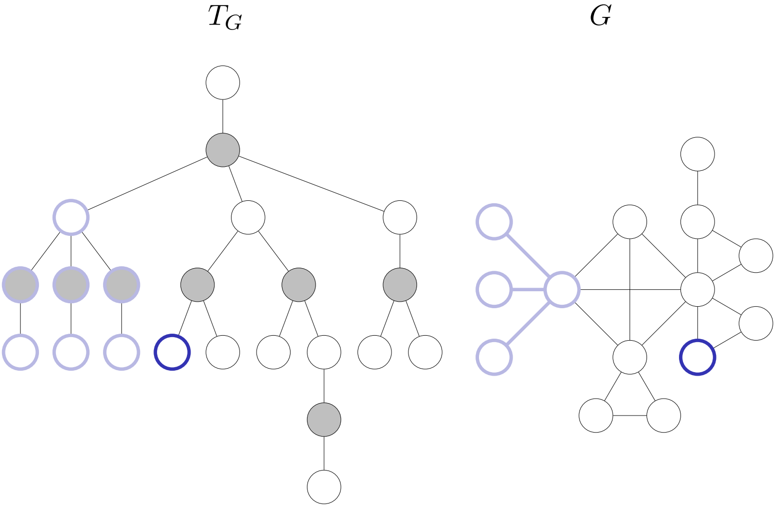
Ejemplo



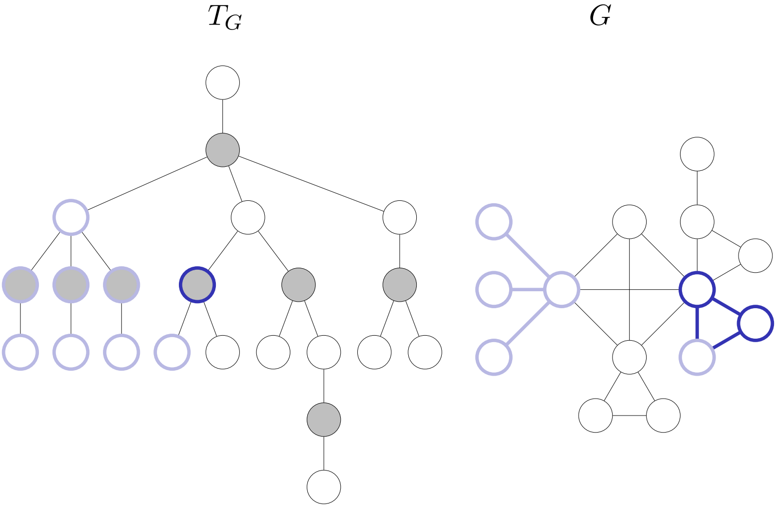
Ejemplo



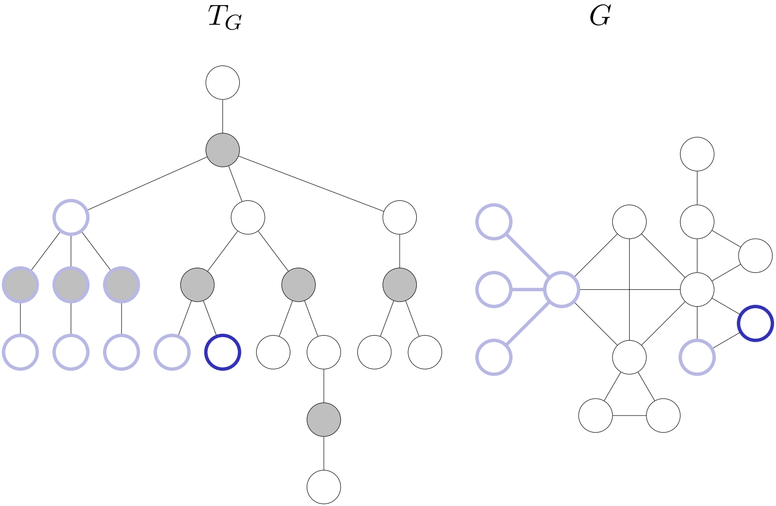
Ejemplo



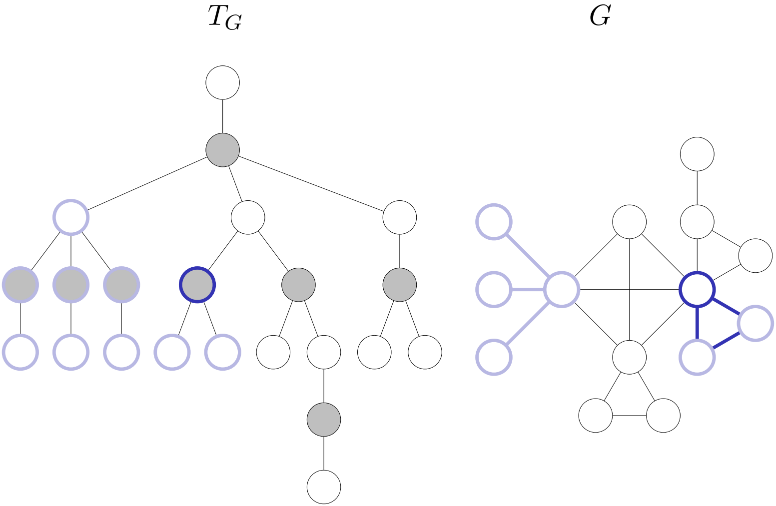
Ejemplo



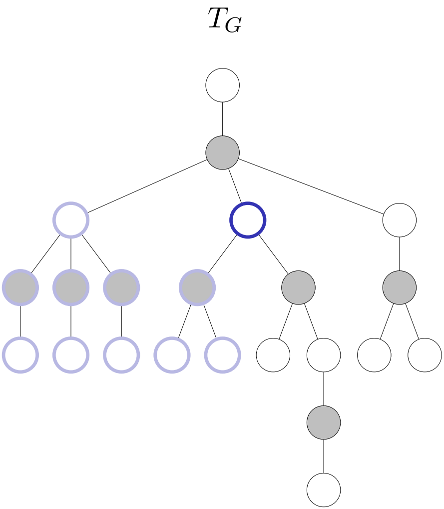
Ejemplo

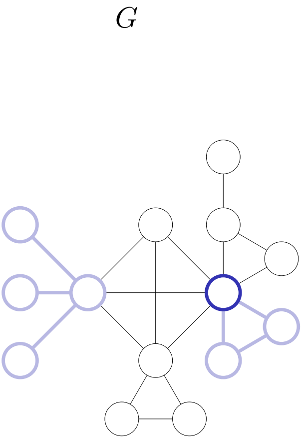


Ejemplo

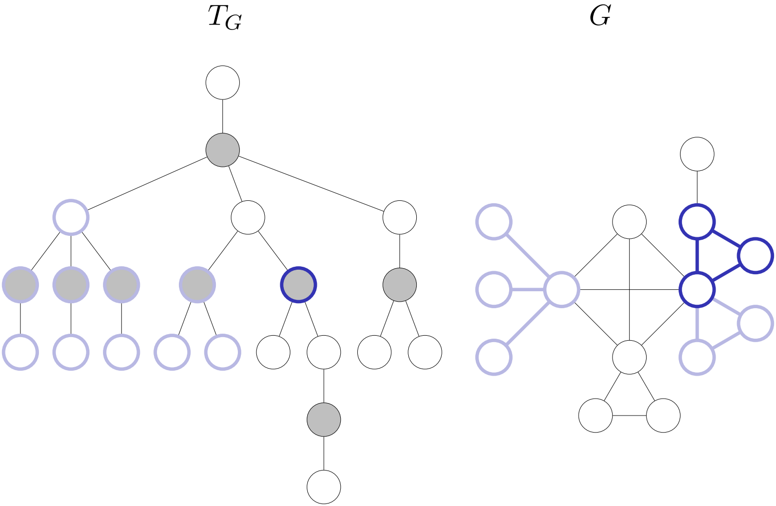


Ejemplo

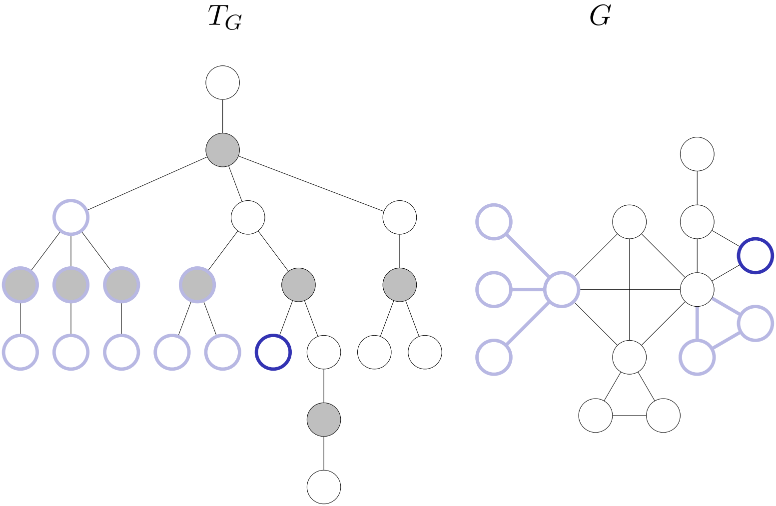




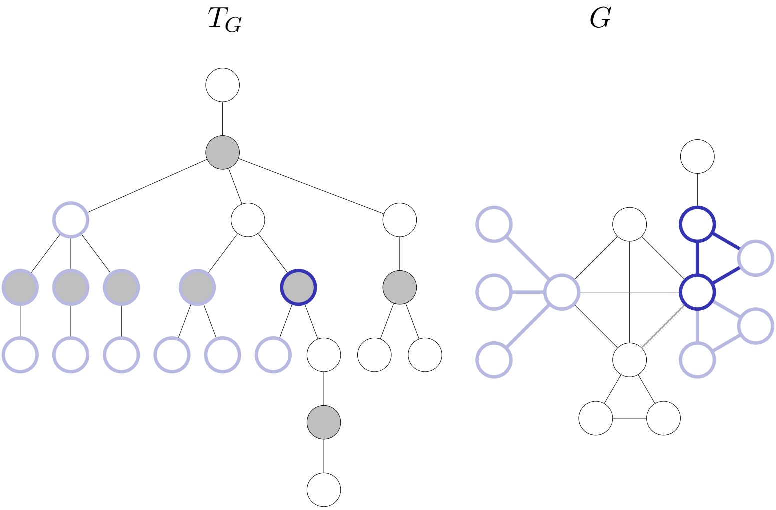
Ejemplo



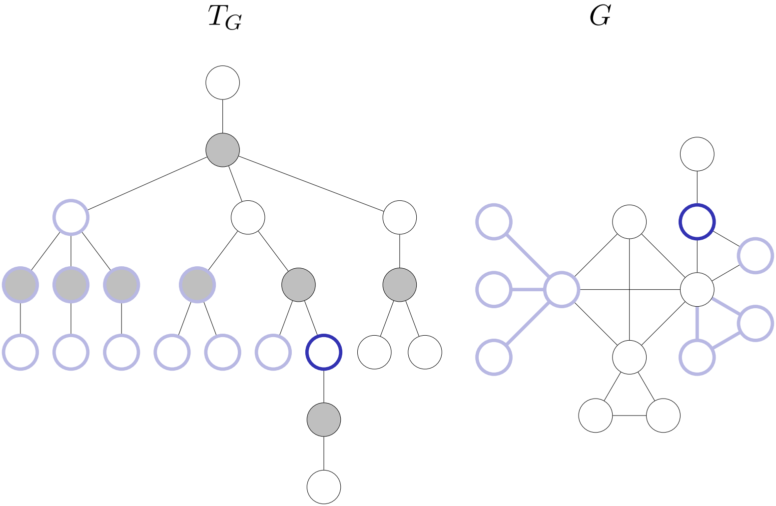
Ejemplo



Ejemplo

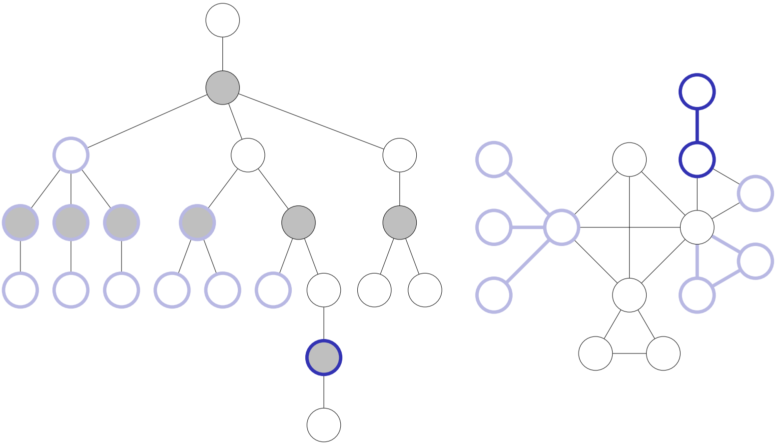


Ejemplo

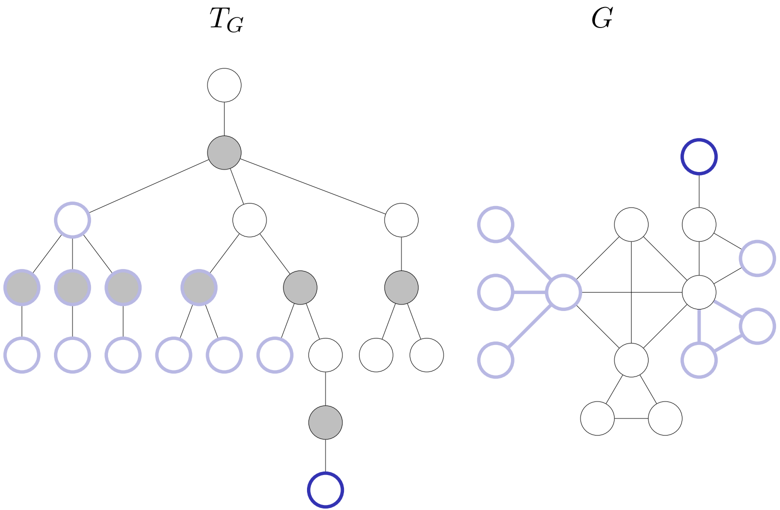


Ejemplo

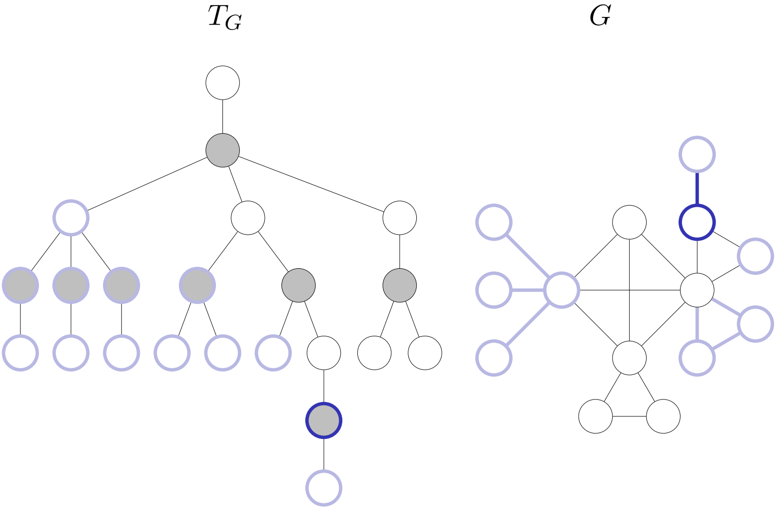
T_G $\qquad$ G



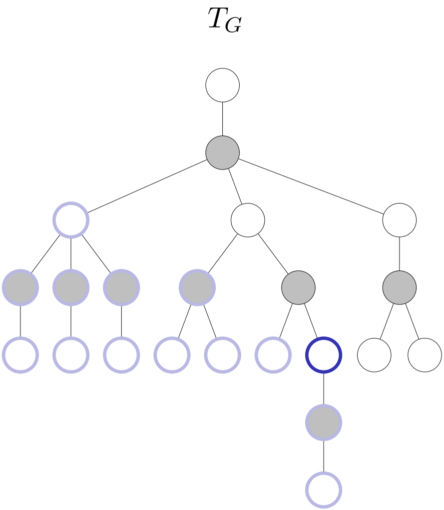
Ejemplo

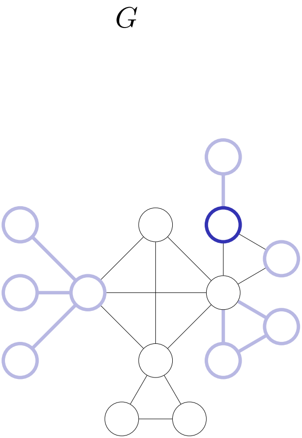


Ejemplo

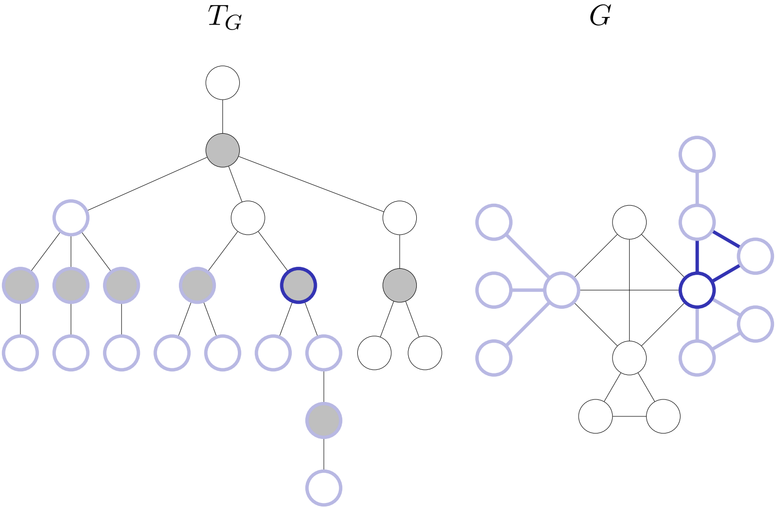


Ejemplo

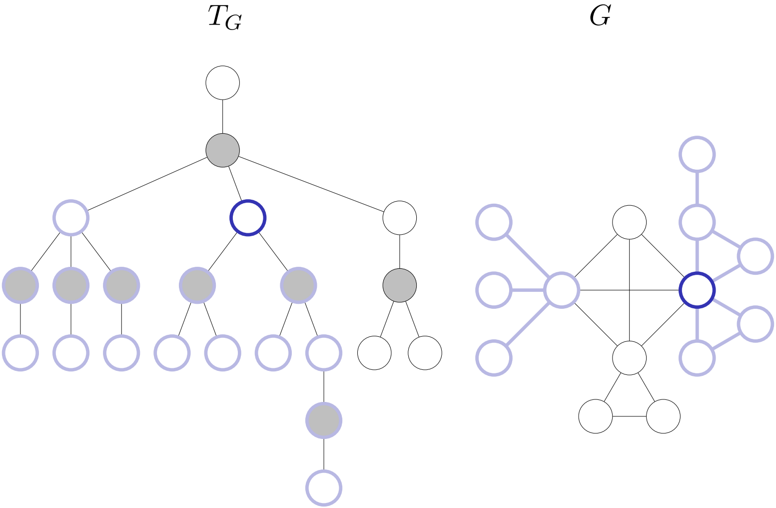




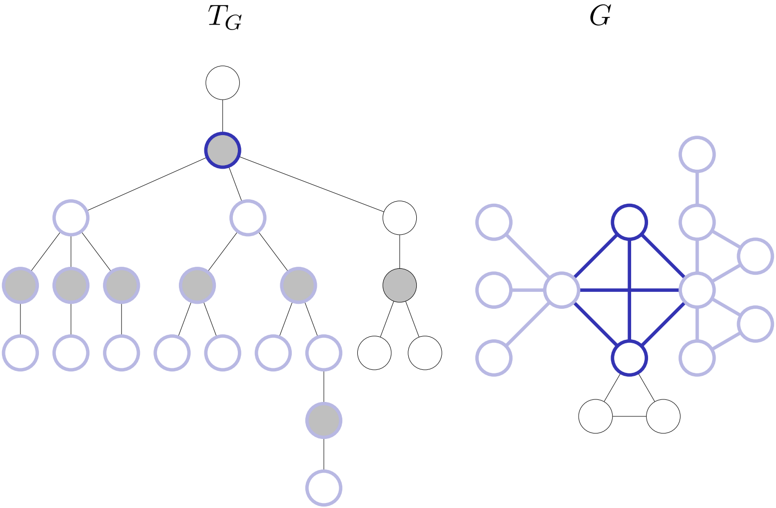
Ejemplo



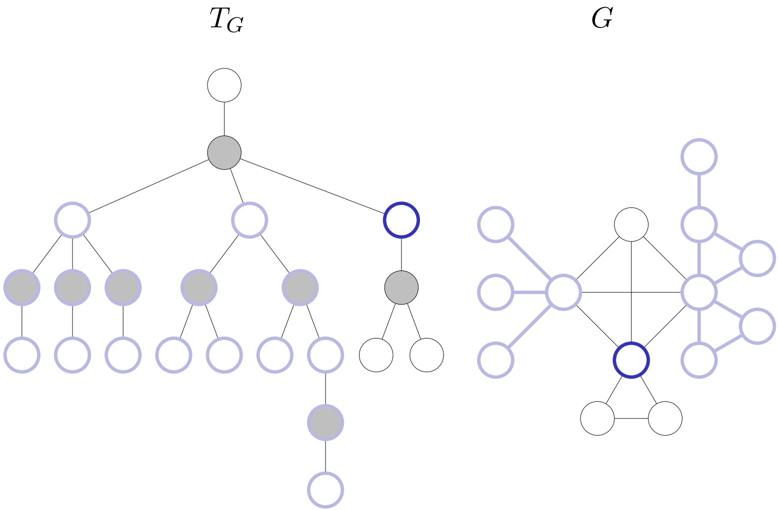
Ejemplo



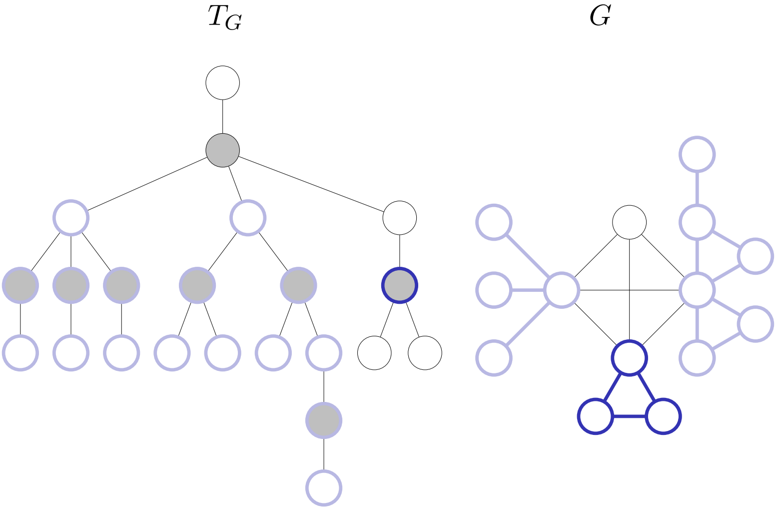
Ejemplo



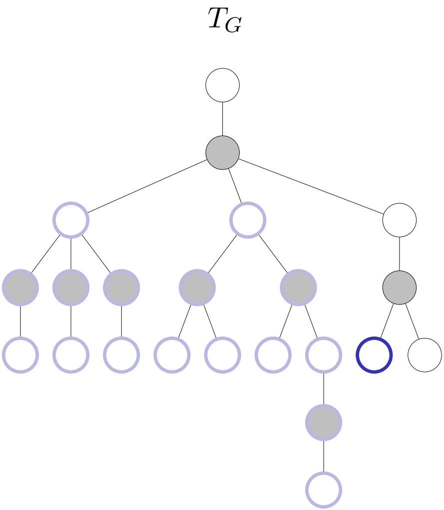
Ejemplo

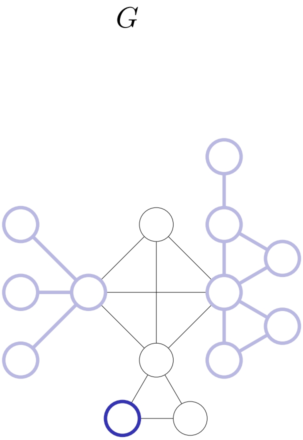


Ejemplo

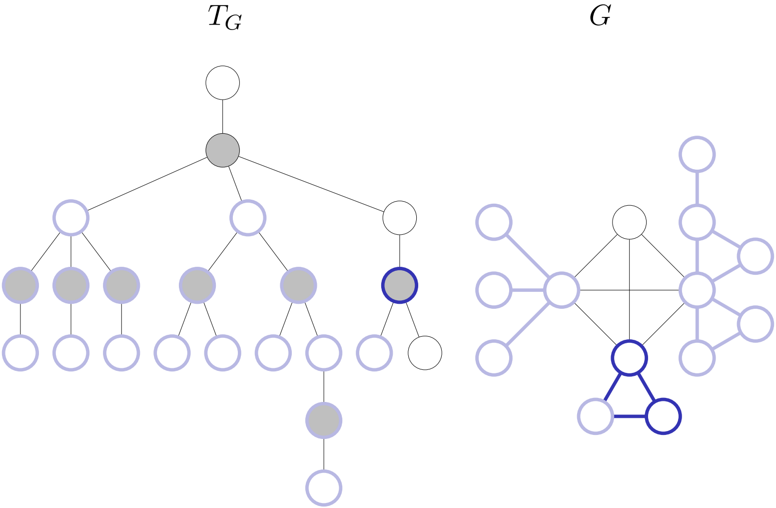


Ejemplo



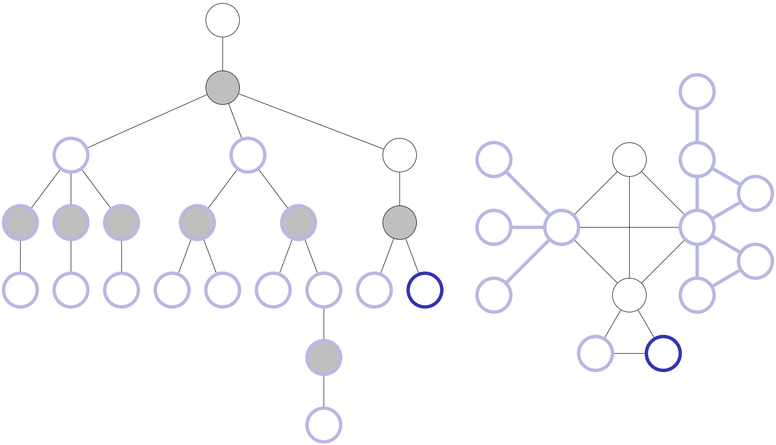


Ejemplo

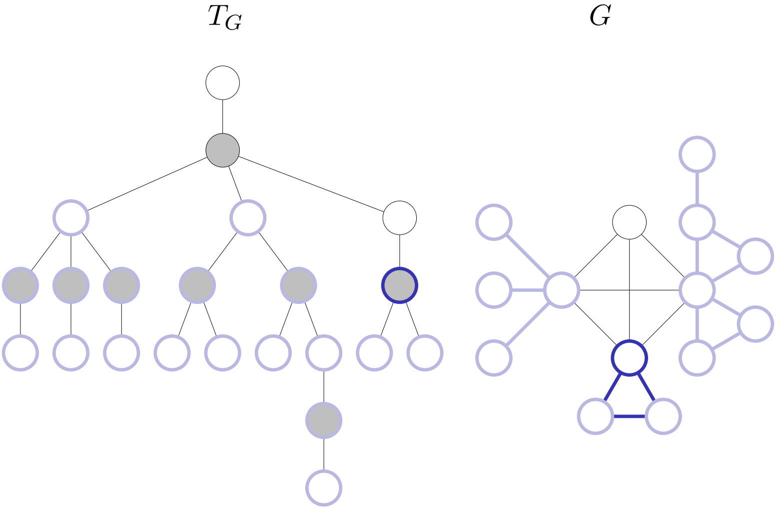


Ejemplo

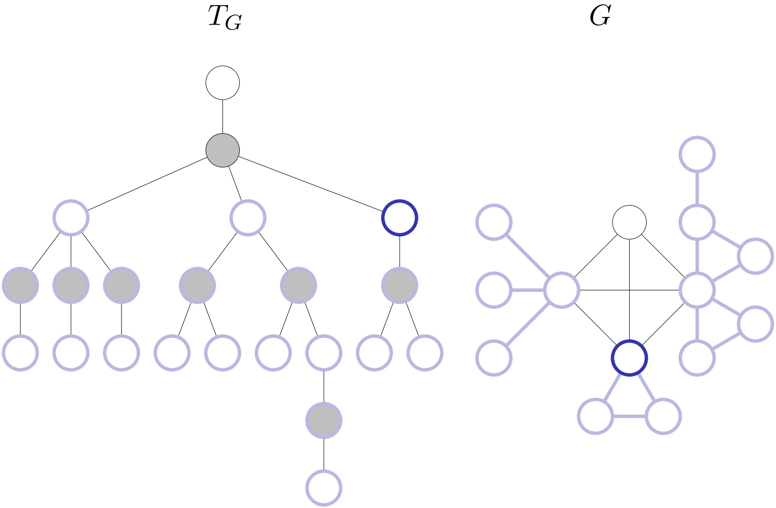
T_G $\qquad$ G



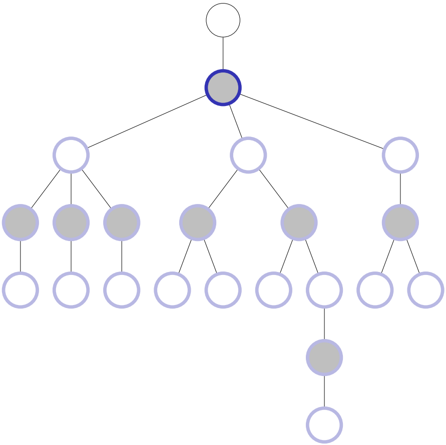
Ejemplo

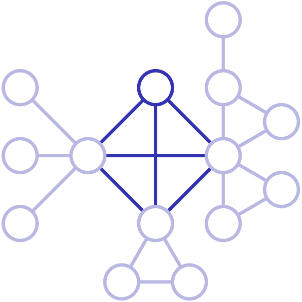


Ejemplo



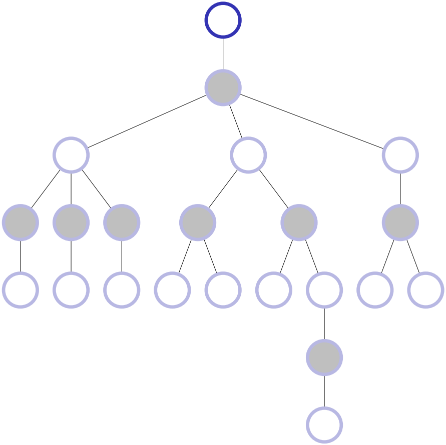
Ejemplo



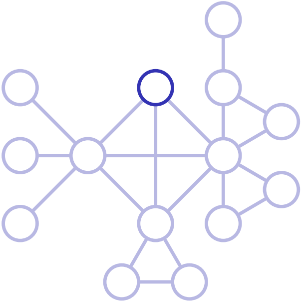


Ejemplo

T_G

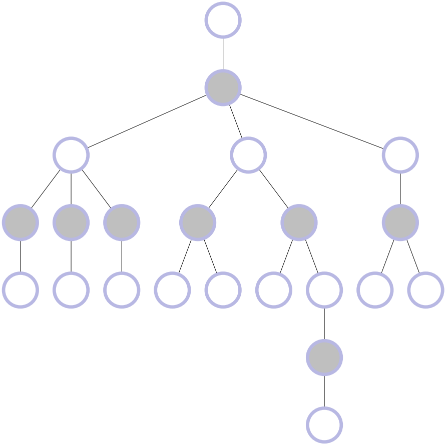


G

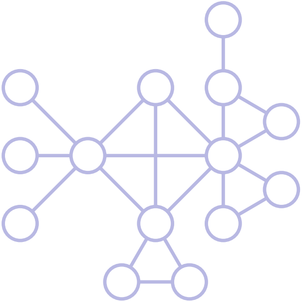


Ejemplo

T_G



G



Resultados

Teorema

Si G es un grafo block, el algoritmo calcula $\gamma_{gr}(G)$ en $O(|V(G)|)$.

Resultados

Teorema

Si G es un grafo block, el algoritmo calcula $\gamma_{gr}(G)$ en $O(|V(G)|)$.

Corolario

El problema $(\textsc{Gr}\text{-DOM})$ es lineal en grafos block.

Resultados

Teorema

Si G es un grafo block, el algoritmo calcula $\gamma_{gr}(G)$ en $O(|V(G)|)$.

Corolario

El problema $(\textsc{Gr}\text{-}\mathrm{DOM})$ es lineal en grafos block.

Observación

El algoritmo se puede modificar de manera de obtener una sucesión dominante de Grundy en tiempo polinomial.

Trabajo futuro

- Determinar si es posible modificar el algoritmo de modo de obtener una sucesión dominante de Grundy en tiempo lineal.

- Extender el algoritmo a otros grafos donde las componentes biconexas sean, por ejemplo, bipartitos completos, ciclos u otra estructura.

Bibliografía

[1] B. Bresar, T. Gologranc, and T. Kos.
Dominating sequences under atomic changes with applications in Sierpinski and interval graphs.
ArXiv e-prints, March 2016.

[2] Boštjan Brešar, Tanja Gologranc, Martin Milanič, Douglas F. Rall, and Romeo Rizzi.
Dominating sequences in graphs.
Discrete Math., 336(C):22–36, December 2014.

[3] D. West.
Introduction to Graph Theory.
Prentice Hall, 2008.

¡Muchas gracias!