El Problema de Asignación de Espacio en la Mochila. Un efoque desde los juegos cooperativo y otro axiomático.

R. Pablo Arribillaga and G. Bergantiños

UMA-2016 - Bahía Blanca

El problema de la mochila

- Tenemos un conjunto de agentes (N) que quieren incluir ciertos bienes (M) en una mochila de tamaño W.

El problema de la mochila

- Tenemos un conjunto de agentes (N) que quieren incluir ciertos bienes (M) en una mochila de tamaño W.

El problema de la mochila

- Tenemos un conjunto de agentes (N) que quieren incluir ciertos bienes (M) en una mochila de tamaño W.
- Un **Problema de la Mochila** esta definido por una 5-tuple $P = (N, M, W, w, p)$ donde;

$N = \{1, ..., n\}$ denota el conjunto de agentes.

$M = \{g_1, ..., g_m\}$ denota el conjunto de bienes.

$W \in \mathbb{R}_+$ es el tamaño de la mochila.

$w = \{w_j\}_{j \in M}$ donde para cada $j \in M$, w_j denota el tamaño del bien j.

$p = \left\{p_j^i\right\}_{i \in N, j \in M}$ donde para cada $i \in N$, $j \in M$, $p_j^i \in \mathbb{R}_+$ denota la utilidad que el bien j producen al agente i

- Diremos que $x = (x_j)_{j\in M} \in \mathbb{R}^M$ es una **solución factible** para P si $x_j \in [0,1]$ para cada $j \in M$ and

$$\sum_{j\in M} w_j x_j = W$$

- Diremos que $x = (x_j)_{j \in M} \in \mathbb{R}^M$ es una **solución factible** para P si $x_j \in [0, 1]$ para cada $j \in M$ and

$$\sum_{j \in M} w_j x_j = W$$

- Para cada $j \in M$, $w_j x_j$ es el espacio ocupado por el bien j en la mochila bajo x.

- Cada posible solución x induce un vector de utilidades $u(x) = (u_i(x))_{i \in N}$ que asigna a cada agente la utilidad recibida por el modo de llenar la mochila bajo x, i.e., para cada $i \in N$,

$$u_i(x) = \sum_{j \in M} p_j^i x_j.$$

- Cada posible solución x induce un vector de utilidades $u(x) = (u_i(x))_{i \in N}$ que asigna a cada agente la utilidad recibida por el modo de llenar la mochila bajo x, i.e., para cada $i \in N$,

$$u_i(x) = \sum_{j \in M} p_j^i x_j.$$

- La primera pregunta que surge (principalmente en Investigación Operativa) es cómo seleccionar x tal que maximice la utilidad agregada de los agentes. Formalmente,

$$\max_{x \in FS(P)} \sum_{i \in N} u_i(x). \tag{1}$$

El problema de la mochila

Factibilidad

- Podemos suponer sin pérdida de generalidad que;

$$\frac{p_1}{w_1} \geq \ldots \geq \frac{p_m}{w_m}.$$

El problema de la mochila
Factibilidad

- Podemos suponer sin pérdida de generalidad que;

$$\frac{p_1}{w_1} \geq \ldots \geq \frac{p_m}{w_m}.$$

- Este problema tiene al menos una solución optima dada por $x^*(P) = \left\{x_j^*(P)\right\}_{j \in M}$, donde

$$x_j^*(P) := \begin{cases} 1 \text{ si } j = 1, \ldots, s-1 \\ \dfrac{1}{w_s}\left(W - \sum_{k=1}^{s-1} w_k\right) \text{ si } j = s \\ 0 \text{ si } j = s+1, \ldots m \end{cases}$$

donde s es definido por

$$\sum_{k=1}^{s-1} w_k < W \leq \sum_{k=1}^{s} w_k.$$

Nuestras contribuciones

- Asumamos que los agentes deciden incorporar en la mochila los objetos de manera tal que la utilidad agregada sea máxiama. Luego deberán decidir con dicha utilidad será repartida entre los agente que participan en el problema

Para cada problema P el conjunto de *posibles distribuciones de utilidad* es

$$FA\left(P\right)=\left\{\left(y_i\right)_{i\in N}\in\mathbb{R}_+^N:\sum_{i\in N}y_i=\sum_{i\in N}u_i\left(x\right)\text{ para algún }x\in FS\left(P\right)\right\}.$$

Aproximación desde los juegos cooperativos

Un **Juegos Cooperativo con Utilidad Transferible** (un juego TU) es un par (N, v) donde $v : 2^N \to \mathbb{R}$ satisface que $v(\varnothing) = 0$.

Aproximación desde los juegos cooperativos

Un **Juegos Cooperativo con Utilidad Transferible** (un juego TU) es un par (N, v) donde $v : 2^N \to \mathbb{R}$ satisface que $v(\varnothing) = 0$.
Uno de los conceptos solución más estudiado y difundido de un juego (N, v) es el **core**

$$c(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} x_i = v(N) \text{ y para cada } S \subset N, \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \right\}.$$

Aproximación desde los juegos cooperativos

Un **Juegos Cooperativo con Utilidad Transferible** (un juego TU) es un par (N, v) donde $v : 2^N \to \mathbb{R}$ satisface que $v(\varnothing) = 0$.
Uno de los conceptos solución más estudiado y difundido de un juego (N, v) es el **core**

$$c(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} x_i = v(N) \text{ y para cada } S \subset N, \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \right\}.$$

El **Valor de Shapley** de un juego (N, v) (Shapley, 1953) es una manera de distribuir el valor $v(N)$ entre los agentes de N. Para cada $i \in N$ es definido por

$$Sh_i(v) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!\,(n - |S| - 1)!}{n!} \left(v(S \cup \{i\}) - v(S) \right) \text{ para cada } i \in N$$

Aproximación desde los juegos cooperativos

Un **Juegos Cooperativo con Utilidad Transferible** (un juego TU) es un par (N, v) donde $v : 2^N \to \mathbb{R}$ satisface que $v(\varnothing) = 0$.
Uno de los conceptos solución más estudiado y difundido de un juego (N, v) es el **core**

$$c(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} x_i = v(N) \text{ y para cada } S \subset N, \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \right\}.$$

El **Valor de Shapley** de un juego (N, v) (Shapley, 1953) es una manera de distribuir el valor $v(N)$ entre los agentes de N. Para cada $i \in N$ es definido por

$$Sh_i(v) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!\,(n - |S| - 1)!}{n!} \left(v(S \cup \{i\}) - v(S) \right) \text{ para cada } i \in N$$

En lo que sigue estudiaremos tres juegos cooperativos (distintos) asociados a un problema de la mochila P y en estudiaremos sus cores y el valor de Shapley de uno de ellos.

Aproximación desde los juegos cooperativos

En una aproximación **pesimista** asumimos que la mochila es llenada de la peor manera para cada coalición S. Dado un problema P definimos el juego cooperativo (N, v_P^p) donde para cada $S \subset N$,

$$v_P^p(S) = \min_{x \in FS(P)} \sum_{i \in S} u_i(x).$$

Aproximación desde los juegos cooperativos

En una aproximación **pesimista** asumimos que la mochila es llenada de la peor manera para cada coalición S. Dado un problema P definimos el juego cooperativo (N, v_P^p) donde para cada $S \subset N$,

$$v_P^p(S) = \min_{x \in FS(P)} \sum_{i \in S} u_i(x).$$

En una aproximación **optimista** asumimos que los agentes en cada coalición S pueden llenar la mochila del modo que ellos quieran. Para cada problema P definimos el juego (N, v_P^o) donde para cada $S \subset N$,

$$v_P^o(S) = \max_{x \in FS(P)} \sum_{i \in S} u_i(x).$$

Aproximación desde los juegos cooperativos

En una aproximación **realista** asumimos que los agentes en $N \backslash S$ llenarán la mochila de la mejor manera para ellos y luego la coalición S podrá completar maximizando sobre el espacio que queda. Sea $X^{*N \backslash S}$ el conjunto de soluciones optimas del problema $P^{N \backslash S}$. Para cada problema P definimos el juego (N, v_P^r) donde para cada $S \subset N$,

$$v_P^r(S) = \max_{x \in X^{*N \backslash S}} \sum_{i \in S} u_i(x).$$

Aproximación desde los juegos cooperativos

- Es claro que para cada P y cada $S \subset N$,

$$v^p(S) \leq v^r(S) \leq v^o(S) \text{ y } v^p(N) = v^r(N) = v^o(N).$$

Por lo tanto,

$$c(N, v^o) \subset c(N, v^r) \subset c(N, v^p)$$

Aproximación desde los juegos cooperativos

- Es claro que para cada P y cada $S \subset N$,

$$v^p(S) \leq v^r(S) \leq v^o(S) \text{ y } v^p(N) = v^r(N) = v^o(N).$$

  Por lo tanto,

$$c(N, v^o) \subset c(N, v^r) \subset c(N, v^p)$$

- El core del juego pesimista es no vacío y contiene a $u(x^*)$ (ver, Kellerer *et al*. (2004)).

Aproximación desde los juegos cooperativos

- Es claro que para cada P y cada $S \subset N$,

$$v^p(S) \leq v^r(S) \leq v^o(S) \text{ y } v^p(N) = v^r(N) = v^o(N).$$

  Por lo tanto,

$$c(N, v^o) \subset c(N, v^r) \subset c(N, v^p)$$

- El core del juego pesimista es no vacío y contiene a $u(x^*)$ (ver, Kellerer *et al*. (2004)).

- El core del juego optimista puede ser vacío como muestra el siguiente ejemplo.

Aproximación desde los juegos cooperativos

Ejemplo

Sea P tal que $N = \{1, 2\}$, $M = \{a, b\}$, $W = 1$, $w_a = w_b = 1$, $p_a^1 = 1$, $p_b^2 = 0.9$ *y* $p_b^1 = p_a^2 = 0$. *Tenemos que* $v^o(1) = 1$, $v^o(2) = 0.9$, *y* $v^o(1, 2) = 1$. *Por tanto,* $c(v^o) = \varnothing$.

Aproximación desde los juegos cooperativos

Teorema

Para cada problema de la mochila P, $u(x^*) \in c(v^r)$.

- Una **regla** es una función f que asigna a cada problema P un par

$$f(P) = \left(f^1(P), f^2(P)\right)$$

donde

$$f^1(P) \in FS(P) \text{ y}$$

$$\sum_{i \in N} f_i^2(P) = \sum_{i \in N} u_i\left(f^1(P)\right).$$

- Una **regla** es una función f que asigna a cada problema P un par

$$f(P) = \left(f^1(P), f^2(P)\right)$$

donde

$$f^1(P) \in FS(P) \text{ y}$$

$$\sum_{i \in N} f_i^2(P) = \sum_{i \in N} u_i\left(f^1(P)\right).$$

- Observemos que $f^1(P)$ identifica los bienes que serán incluidos en la mochila y $f^2(P)$ denota el modo en que se distribuirá la utilidad generada por $f^1(P)$.

Axiomas

- **Eficiencia** (ef). Para cada problema P,
$\sum_{i \in N} f_i^2(P) = \max_{x \in FS(P)} \sum_{i \in N} u_i(x)$

Axiomas

- **Eficiencia** (ef). Para cada problema P,
$\sum_{i \in N} f_i^2(P) = \max_{x \in FS(P)} \sum_{i \in N} u_i(x)$
- **Simetría** (sim). Para cada problema P y cada $i, i' \in N$ tal que $p^i = p^{i'}$, tenemos que $f_i^2(P) = f_{i'}^2(P)$.

Axiomas

- **Eficiencia** (ef)**.** Para cada problema P,
$\sum_{i\in N} f_i^2(P) = \max_{x\in FS(P)} \sum_{i\in N} u_i(x)$
- **Simetría** (sim)**.** Para cada problema P y cada $i, i' \in N$ tal que $p^i = p^{i'}$, tenemos que $f_i^2(P) = f_{i'}^2(P)$.
- **Dummy** (dum)**.** Para cada problema P i cada $i \in N$ tal que $p_j^i = 0$ para cada $j \in M$, entonces $f_i^2(P) = 0$.

Axiomas

- **Eficiencia** (ef). Para cada problema P,
$\sum_{i \in N} f_i^2(P) = \max_{x \in FS(P)} \sum_{i \in N} u_i(x)$
- **Simetría** (sim). Para cada problema P y cada $i, i' \in N$ tal que $p^i = p^{i'}$, tenemos que $f_i^2(P) = f_{i'}^2(P)$.
- **Dummy** (dum). Para cada problema P i cada $i \in N$ tal que $p_j^i = 0$ para cada $j \in M$, entonces $f_i^2(P) = 0$.
- **Selección en el core** (sc). Para cada problema P, $f^2(P) \in c(v^r)$.

Axiomas

- **Independencia de bienes irrelevantes** (ibi)**.** Dado un problema P y $j \in M$ satisfaciendo que $x_j = 0$ para cualquier solución optimal x. Tenemos que, $f(P) = f\left(P^{M\setminus\{j\}}\right)$.

Axiomas

- **Independencia de bienes irrelevantes** (ibi)**.** Dado un problema P y $j \in M$ satisfaciendo que $x_j = 0$ para cualquier solución optimal x. Tenemos que, $f(P) = f\left(P^{M\setminus\{j\}}\right)$.

- **Llenado por etapas (*le*).** Establece que podemos llenar la mochila en uno sólo paso o bien llenar primero una parte de la mochila y luego la parte restante.

Axiomas

- **Independencia de bienes irrelevantes** (ibi)**.** Dado un problema P y $j \in M$ satisfaciendo que $x_j = 0$ para cualquier solución optimal x. Tenemos que, $f(P) = f\left(P^{M \setminus \{j\}}\right)$.

- **Llenado por etapas (*le*).** Establece que podemos llenar la mochila en uno sólo paso o bien llenar primero una parte de la mochila y luego la parte restante.

- **Contribución igualitaria** (ci). Para cada problema P y cada $i, k \in N$,

$$f_i^2(P) - f_i^2\left(P^{N \setminus \{k\}}\right) = f_k^2(P) - f_k^2\left(P^{N \setminus \{i\}}\right).$$

Axiomas

Para cada problema P y cada $i \in N$ definimos la **distribución de seguridad** del agente i como

$$SE_i(P) = \frac{1}{n} \max_{x \in FS(P)} u_i(x).$$

- **Seguridad** (se). Para cada problema P y cada $i \in N$, $f_i^2(P) \geq SE_i(P)$.

Axiomas

Para cada problema P y cada $i \in N$ definimos la **distribución de seguridad** del agente i como

$$SE_i(P) = \frac{1}{n} \max_{x \in FS(P)} u_i(x).$$

- **Seguridad** (se). Para cada problema P y cada $i \in N$, $f_i^2(P) \geq SE_i(P)$.

Axiomas

Para cada problema P y cada $i \in N$ definimos la **distribución de seguridad** del agente i como

$$SE_i\left(P\right) = \frac{1}{n} \max_{x \in FS(P)} u_i\left(x\right).$$

- **Seguridad** $\left(se\right)$. Para cada problema P y cada $i \in N$, $f_i^2\left(P\right) \geq SE_i\left(P\right)$.

Para cada problema P y cada $i \in N$ definimos la **aspiración máxima** del agente i como

$$MA_i\left(P\right) = \max_{x \in FS(P)} u_i\left(x\right)$$

- **Aspiración Máxima** $\left(am\right)$. Para cada problema P y cada $i \in N$, $f_i^2\left(P\right) \leq MA_i\left(P\right)$.

Axiomas

- **No hay ventajas por agruparse** (nva). Para cada problema $P = (N, M, W, w, p)$ y $P' = (N', M, W, w, p')$ donde $N \subset N'$ y existe $i \in N$ tal que $p^i = p'^i + \sum_{k \in N \setminus N'} p'^k$ y $p^k = p'^k$ para todo $k \in N' \setminus N$,
$$f_i^2(P') + \sum_{k \in N' \setminus N} f_k^2(P') \geq f_i^2(P).$$

Axiomas

- **No hay ventajas por agruparse** (nva). Para cada problema $P = (N, M, W, w, p)$ y $P' = (N', M, W, w, p')$ donde $N \subset N'$ y existe $i \in N$ tal que $p^i = p'^i + \sum_{k \in N \setminus N'} p'^k$ y $p^k = p'^k$ para todo $k \in N' \setminus N$,
$$f_i^2(P') + \sum_{k \in N' \setminus N} f_k^2(P') \geq f_i^2(P).$$
- **No hay ventajas por dividirse** (nvd). Para cada problema $P = (N, M, W, w, p)$ y $P' = (N', M, W, w, p')$ donde $N \subset N'$ y existe $i \in N$, $p^i = p'^i + \sum_{k \in N \setminus N'} p'^k$ y $p^k = p'^k$ para todo $t \in N' \setminus N$,
$$f_i^2(P') + \sum_{k \in N' \setminus N} f_k^2(P') \leq f_i^2(P).$$

Resultado de Imposibilidad

Proposición

(1) *No existe una regla que satisfaga selección en el core y seguridad.*

2) Sea f una regla que satisface dummy y eficiencia. Entonces, f no satisface independencia de bienes irrelevantes y seguridad.

La regla inducida por la solución óptima

Dado $P \in \mathcal{P}^*$, denotemos por $x^*(P)$ (o x^*) la única solución óptima de P. Ahora consideremos la regla $\left(x^{*1}(P), x^{*2}(P)\right)$ definida por:

$$x^{*1}(P) = x^* \text{ y } x_i^{*2}(P) = u_i(x^*) \text{ para todo } i \in N.$$

La regla inducida por la solución óptima

Proposición

(1) *La regla* x^* *satisface eficiencia, simetría, dummy, selección en el core, independencia de bienes irrelevantes, aspiración máxima, llenado por etapas, no hay ventajas por agruparse y dividirse.*

(2) *La regla* x^* *no satisface seguridad y contribución igualitaria.*

La regla inducida por la solución óptima

Teorema

(1) x^* *es la única solución que satisface selección en el core y no hay ventaja por dividirse.*

(2) x^* *es la única solución que satisface eficiencia, aspiración máxima, independencia de bienes irrelevantes y llenado por etapa.*

(3) x^* *es la única solución que satisface eficiencia, aspiración máxima y no hay ventajas por dividirse.*

La regla inducida por el valor de Shapley del juego optimista

- Definimos la **regla de Shapley optimista,** denotada por Sh^o, como

$$Sh^{o1}(P) = x^* \text{ y } Sh^{o2}(P) = Sh\left(v_P^o\right).$$

La regla inducida por el valor de Shapley del juego optimista

Proposición

(1) *La regla de Shapley optimista satisface eficiencia, simetría, dummy, aspiración máxima, seguridad, y contribución igualitarias*

(2) *La regla de Shapley optimista no satisface independencia de bienes irrelevantes, llenado por partes, selección en el core, no hay ventajas por agruparse y dividirse.*

La regla inducida por el valor de Shapley del juego optimista

Teorema

La regla de Shapley optimista es la única regla que satisface eficiencia y contribución igualitaria.

(1) Sea f^{γ} tal que $f^{\gamma 1}(P) = x^*$ para cada problema P. Además, la utilidad total dada por cada bien j es proporcional a la utilidad total que cada agente le da a los bienes en x^*. Esto es, para cada $i \in N$ y $j \in M$ definimos:

$$\begin{aligned} y_j^i &= \frac{\sum_{x_k^*>0} p_k^i}{\sum_{i \in N} \sum_{x_k^*>0} p_k^i} p_j x_j^* \\ f_i^{\gamma 2}(P) &= \sum_{j \in M} y_j^i. \end{aligned}$$

Esta regla satisface no hay ventajas por dividirse (eficiencia) pero falla selección en el core (y aspiración máxima).

Independencia de los axiomas

Sea f^0 que no selecciona ningún objeto para llevar en la mochila y asigna 0 a cada agente. Esta regla satisface aspiración máxima, independencia de bienes irrelevantes y llenado por etapas pero falla eficiencia.

Independencia de los axiomas

Sea f^0 que no selecciona ningún objeto para llevar en la mochila y asigna 0 a cada agente. Esta regla satisface aspiración máxima, independencia de bienes irrelevantes y llenado por etapas pero falla eficiencia.

Independencia de los axiomas

Sea f^{α} tal que $f^{\alpha 1}(P) = x^*$ para cada problema P. Además, la utilidad total dada por cada bien es dividida de forma igualitaria entre los agentes que le dan utilidad positiva a dicho bien. Esto es, para cada $i \in N$ y $j \in M$ definimos:

$$
\begin{aligned}
N_j &= \left\{ i \in N : p_j^i > 0 \right\}. \\
y_j^i &= \begin{cases} \frac{1}{|N_j|} p_j x_j^* & \text{si } i \in N_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
f_i^{\alpha 2}(P) &= \sum_{j \in M} y_j^i.
\end{aligned}
$$

Esta regla satisface eficiencia, independencia de bienes irrelevantes y llenado por etapas pero falla aspiración máxima.

Independencia de los axiomas

Sea f^{β} tal que $f^{\beta 1}(P) = x^*$ para cada problema P. Además, la utilidad agregada es dividida lo más igualitariamente entre los agentes de tal modo que ningún agente obtengan más que su máxima aspiración. Esto es, dado un problema P y $i \in N$,

$$f_i^{\beta 2}(P) = \min\{MA_i(P), \alpha\} \text{ donde } \sum_{i \in N} f_i^2(P) = \sum_{i \in N} u_i(x^*).$$

Esta regla satisface eficiencia, aspiración máxima y llenado por etapas pero falla independencia de bienes irrelevantes (y no hay ventajas por dividirse).

Sea f^{π} tal que $f^{\pi 1}(P) = x^*$ para cada problema P. Dado $i \in N$ y $j \in M$ definimos:

$$\begin{aligned}
M^{\pi} &= \left\{ j \in M : x_j^* > 0 \right\}, \\
FS^{\pi}(P) &= \left\{ x : \sum_{j \in M} w_j x_j \leq W \text{ and } x_j = 0 \text{ if } j \notin M^{\pi} \right\} \\
y^i &= \max_{x \in FS^{\pi}(P)} u_i(x)
\end{aligned}$$

Independencia de los axiomas

Supongamos ahora que $N = \{i_1, ...i_n\}$ tal que $y^{i_1} \geq y^{i_2} ... \geq y^{i_n}$. Observemos que $u_i(x^*) \leq y_i \leq MA_i(P)$ para todo $i \in N$. Definimos

$$
\begin{aligned}
f_{i_1}^{\pi 2}(P) &= \min\{y_j^{i_1}, \sum_{i \in N} u_i(x^*)\}. \\
f_{i_2}^{\pi 2}(P) &= \min\{y_j^{i_2}, \sum_{i \in N} u_i(x^*) - f_{i_1}^{\pi 2}(P)\}. \\
&\vdots \\
f_{i_h}^{\pi 2}(P) &= \min\{y_j^{i_h}, \sum_{i \in N} u_i(x^*) - \sum_{r=1}^{h-1} f_{i_r}^{\pi 2}(P)\}. \\
&\vdots \\
f_{i_n}^{\pi 2}(P) &= \sum_{i \in N} u_i(x^*) - \sum_{r=1}^{n-1} f_{i_r}^{\pi 2}(P).
\end{aligned}
$$

Esta regla satisface eficiencia, aspiración máxima y independencia de bienes irrelevantes pero falla llenado por etapas.