Reducción de Sistemas Hamiltonianos Generalizados

Sergio Grillo [1,3], Leandro Salomone[2], Marcela Zuccalli[2]

[1]Instituto Balseiro, UNCu-CNEA
[2]Dto. de Matemática, UNLP
[3]CONICET

Reunión anual de la UMA
Septiembre 2016

- **Lagrangian reduction by stages**
  Memoirs of the American Mathematical Society (2000)
  H. Cendra, J. E. Marsden, T.S. Ratiu
- **Geometric mechanics, Lagrangian reduction and non-holonomic systems**
  Mathematics Unlimited-2001 and Beyond, (B. Enguist and W. Schmid, eds.), Springer-Verlag, New York, 2001
  H. Cendra, J. E. Marsden, T.S. Ratiu
- **Lagrangian reduction of generalized nonholonomic systems**
  Journal of Geometry and Physics **58** 1271–1290 (2008)
  H. Cendra, S. Ferraro, S. Grillo

- **Variational reduction of Lagrangian systems with general constraints**
  Journal of Geometric Mechanics **4** (1) (**2012**), 49-88.
  S. Grillo, M. Zuccalli

- ***Variation principles for Lie-Poisson and Hamilton-Poincaré equations***
  Moscow Mathematical Journal **3** (2003), 833-867.
  H. Cendra, J.E. Marsden, S. Pekarsky, T.S. Ratiu

- Q una variedad suave, **espacio de configuraciones**
- $H : T^*Q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función suave, el **Hamiltoniano**
- Una curva $\Gamma(t) \subset T^*Q$ es **trayectoria** del sistema si y sólo si es un extremo de la acción

$$\mathcal{S}(\Gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\theta(\Gamma(t)) - H(\Gamma(t))\right) dt$$

$\omega = -d\,\theta$ es la estructura simpléctica canónica en T^*Q
O sea, $\Gamma(t) \subset T^*Q$ es **trayectoria** del sistema si y sólo si

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big(\omega(\Gamma'(t), \delta\Gamma(t)) - < dH(\Gamma(t), \delta\Gamma(t)) > \Big)\; dt = 0$$

para toda variación $\delta\Gamma(t)$ de la curva $\Gamma(t)$ y $\forall\, t\ \in [t_1, t_2]$

Un **sistema Hamiltoniano noholónomo generalizado** es una terna $(H, \mathcal{D}, \mathcal{V})$ donde

- $H : T^*Q \longrightarrow \mathbb{R}$ es el **Hamiltoniano**
- $\mathcal{D} \subset T^*Q$ es la **subvariedad de vínculos cinemáticos**
- $\mathcal{V} \subset TT^*Q$ es la **distribución de vínculos variacionales**
- Una curva $\Gamma(t) \subset \mathcal{D}$ es **trayectoria** de $(H, \mathcal{D}, \mathcal{V})$ si y sólo si es un extremo de la acción

$$\mathcal{S}(\Gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\theta(\Gamma(t)) - H(\Gamma(t))\right) dt$$

para toda variación $\delta\Gamma(t) \in \mathcal{V}$ de la curva $\Gamma(t)$ para todo $t \in [t_1, t_2]$

O sea, $\Gamma(t) \subset \mathcal{D}$ es una **trayectoria** de $(H, \mathcal{D}, \mathcal{V})$ si y sólo si

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\omega(\Gamma'(t), \delta\Gamma(t)) - < dH(\Gamma(t), \delta\Gamma(t)) >\right) dt = 0$$

para toda variación $\delta\Gamma(t) \in \mathcal{V}$ de la curva $\Gamma(t)$ para todo $t \in [t_1, t_2]$

Se asume que

1. $\mathcal{V}^{\perp}$, el **espacio de fuerzas de vínculo**, es una distribución vertical

$$\mathcal{V}^{\perp} \subset \ker\left(\pi_{Q*}\right) \quad \text{si} \quad \pi_Q : T^*Q \to Q$$

   Esta condición implica que
   - $\mathcal{V}^{\perp} \subset \mathcal{V}$
   - $v \in \mathcal{V} \quad$ si y sólo si $\quad \pi_{Q*}\left(v\right) \in \pi_{Q*}\left(\mathcal{V}\right)$

2. $C_V := \pi_{Q*}\left(\mathcal{V}\right) \subset TQ$ es una distribución sobre Q

- Sea $\gamma(t) = \pi_Q(\Gamma(t))$
- $\delta\gamma(t) = \pi_{Q*}(\delta\Gamma(t))$ es una variación infinitesimal de γ
- Si se verifican estas condiciones sobre los vínculos $\mathcal{V}$

$$\delta\Gamma(t) \in \mathcal{V}(\Gamma(t)) \quad \Leftrightarrow \quad \delta\gamma(t) \in C_V(\gamma(t))$$

- $(H, \mathcal{D}, \mathcal{V})$ puede definirse por $(H, \mathcal{D}, C_V)$

- G un grupo de Lie que actúa a izquierda sobre Q por $\rho : G \times Q \to Q$ tal que $\pi : Q \longrightarrow \mathcal{X} = Q/G$ es un fibrado principal
- ρ se levanta a TQ y T^*Q

$$\rho' : G \times TQ \to TQ \quad \text{y} \quad \tilde{\rho} : G \times T^*Q \to T^*Q$$

si $\rho_g : Q \to Q \qquad q \dashrightarrow \rho(g, q)$

$$\rho'(g, v_q) = (\rho_g)_*(v_q) \quad \text{y} \quad \tilde{\rho}(g, \alpha_q) = (\rho_{g^{-1}})^*(\alpha_q)$$

$(\rho_g)_*$ y $(\rho_g)^*$ son el diferencial y el pullback de ρ_g

G es **una simetría** de $(H, \mathcal{D}, \mathcal{V})$ si H, $\mathcal{D}$ y $\mathcal{V}$ son G-invariantes

1. $H \circ (\widetilde{\rho}_g) = H \quad \forall\, g \in G$

2. $(\widetilde{\rho}_g)\,(\mathcal{D}) = \mathcal{D} \quad \forall\, g \in G$

3. $(\widetilde{\rho}_g)_*\,(\mathcal{V}) = \mathcal{V} \quad \forall\, g \in G$

La condición 3 implica que $(\rho_g)_*\,(C_V) = C_V \quad \forall\, g \in G$

G es **una simetría** de $(H, \mathcal{D}, C_V)$ si H, $\mathcal{D}$ y C_V son G-invariantes

- $A : TQ \to \mathfrak{g}$, conexión principal en $\pi : Q \longrightarrow \mathcal{X}$
- $\alpha_A : TQ/G \to T\mathcal{X} \oplus \widetilde{\mathfrak{g}}$ con $\widetilde{\mathfrak{g}} = Q \times_G \mathfrak{g}$
- $\alpha_A \circ p\,(v) = \pi_*\,(v) \oplus [q, A\,(v)]_G = \pi_*\,(v) \oplus a\,(v)\,\forall\, v \in T_q Q$

$$a : TQ \to \widetilde{\mathfrak{g}} \;:\; v \mapsto [q, A\,(v)]_G \quad \text{y} \quad p : TQ \to TQ/G$$

- $\mathbb{V} = \ker\,(\pi_*) \subset TQ$ la distribución vertical

$$\alpha_A \circ p\,(\mathbb{V}_q) = a\,(\mathbb{V}_q) = \widetilde{\mathfrak{g}}_{\pi(q)}$$

- $\mathbb{H}$ la distribución horizontal definida por A

$$\alpha_A \circ p\,(\mathbb{H}_q) = \pi_*\,(\mathbb{H}_q) = T_{\pi(q)}\mathcal{X}$$

- Vía α_A, los vínculos variacionales reducidos $\mathfrak{C}_V \subset TQ/G$

$$\mathfrak{C}_V = p(C_V) \simeq (\alpha_A \circ p)(C_V) = \alpha_A(\mathfrak{C}_V) \subset T\mathcal{X} \oplus \mathfrak{g}$$

- Por dualidad, $(TQ/G)^* \simeq T^*Q/G \simeq T^*\mathcal{X} \oplus \widetilde{\mathfrak{g}}^*$ vía el isomorfimso

$$\widetilde{\alpha}_A = \left(\alpha_A^{-1}\right)^* : T^*Q/G \to T^*\mathcal{X} \oplus \widetilde{\mathfrak{g}}^*$$

- $h : T^*Q/G \to \mathbb{R}$ se identifica con $h \circ (\tilde{\alpha_A})^{-1} : T^*\mathcal{X} \oplus \widetilde{\mathfrak{g}}^* \to \mathbb{R}$
- Los vínculos cinemáticos reducidos $\mathfrak{D} \subset T^*Q/G$

$$\mathfrak{D} = \tilde{p}(\mathcal{D}) \simeq (\tilde{\alpha_A} \circ \tilde{p})(\mathcal{D}) = \tilde{\alpha_A}(\mathfrak{D}) \subset T^*\mathcal{X} \oplus \widetilde{\mathfrak{g}}^*$$

- Sea una métrica G-invariante sobre Q
- Sea la intersección $\mathcal{S} = C_V \cap \mathbb{V}$
- $\mathcal{T}$ y $\mathcal{U}$ son los complementos ortogonales de $\mathcal{S}$ en C_V y $\mathbb{V}$

$$C_V = \mathcal{T} \oplus \mathcal{S} \quad \text{y} \quad \mathbb{V} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{U}$$

- Sea $\mathcal{R}$ el complemento ortogonal de $C_V + \mathbb{V}$ en TQ

Si $\mathcal{T}$ y $\mathcal{R}$ son distribuciones sobre Q se define **conexión no holónoma generalizada** $A^\bullet$ cuyo espacio horizontal es la distribución $\mathbb{H}^\bullet = \mathcal{R} \oplus \mathcal{T}$
Entonces,

$$TQ = \mathbb{V} \oplus \mathbb{H}^\bullet = \mathcal{U} \oplus \mathcal{S} \oplus \mathcal{T} \oplus \mathcal{R}$$

Vía $\alpha_{A^\bullet}$

- se identifican los espacios T^*Q/G y $T^*\mathcal{X} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}$
- hamiltoniano reducido $h \simeq h^\bullet = h \circ \tilde{\alpha_{A^\bullet}}^{-1}$
- vinculos cinematicos reducidos $\mathfrak{D} \simeq \mathfrak{D}^\bullet = \widetilde{\alpha}_{A^\bullet} \circ \widetilde{p}\,(\mathcal{D})$
- vinculos variacionales reducidos $\mathcal{C}_\mathcal{V} \simeq \mathfrak{C}_V^\bullet = \alpha_{A^\bullet} \circ p\,(C_V)$

se descomponen como $\mathfrak{C}_V^\bullet = \mathfrak{C}_V^{\text{hor}} \oplus \mathfrak{C}_V^{\text{ver}}$ siendo

$$\mathfrak{C}_V^{\text{hor}} = \pi_*(C_V) = T\mathcal{X} \cap \mathfrak{C}_V^\bullet$$

$$\mathfrak{C}_V^{\text{ver}} = a^\bullet\,(C_V) = \tilde{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{C}_V^\bullet$$

Dada una curva $\Gamma(t) \subset T^*Q$

- $\gamma(t) = \pi_Q(\Gamma(t))$
- $x\,(t) := \pi\,(\gamma\,(t))$
- $\dot{x}\,(t) \oplus \overline{v}\,(t) := \pi_*\,(\gamma'\,(t)) \oplus a^\bullet\,(\gamma'\,(t)) = \alpha_{A^\bullet} \circ p\,(\gamma'\,(t))$
- $\varsigma\,(t) := y\,(t) \oplus \overline{\mu}\,(t) := \widetilde{\alpha}_{A^\bullet} \circ \widetilde{p}\,(\Gamma\,(t))$

La acción puede escribirse en términos de las variables reducidas

$$\mathcal{S}(\Gamma) = \int_{t_1}^{t_2} (< y(t), \dot{x}(t) > + < \bar{\mu}(t), \bar{v}(t) > - h(\varsigma(t)))\; dt$$

Teorema de Reducción
Sean $(H, D, \mathcal{V})$ y G un grupo de simetría.
Si $A^{\bullet} : TQ \to \mathfrak{g}$ es la conexión noholónoma generealizada,
$\Gamma : [t_1, t_2] \to T^*Q$ es trayectoria de $(H, D, \mathcal{V})$ si y sólo si la curva

$$\varsigma : [t_1, t_2] \to T^*\mathcal{X} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}^* \quad \text{con base} \quad x : [t_1, t_2] \to \mathcal{X}$$

dada por

$$\varsigma\,(t) = y\,(t) \oplus \overline{\mu}\,(t) = \widetilde{\alpha}_{A^{\bullet}} \circ \widetilde{p}\,(\Gamma\,(t))\,,$$

verifica

$$\varsigma\,(t) \in \mathfrak{D}^{\bullet},$$

y las **Ecuaciones de Hamilton-Poincaré Generalizadas**

Ecuación Horizontal

$$\left\langle \frac{D}{Dt} y\left(t\right) + \frac{\partial h}{\partial x}\left(\varsigma\left(t\right)\right) + \left\langle \overline{\mu}\left(t\right), \widetilde{B^{\bullet}}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\left(\varsigma\left(t\right)\right), \cdot\right)\right\rangle, \delta x^{\bullet}\left(t\right)\right\rangle = 0 \tag{1}$$

Ecuación Vertical

$$\left\langle \frac{D}{Dt}\overline{\mu}\left(t\right) + ad^{*}_{\frac{\partial h}{\partial \overline{\mu}}\left(\varsigma\left(t\right)\right)}\overline{\mu}\left(t\right), \overline{\eta}^{\bullet}\left(t\right)\right\rangle = 0 \tag{2}$$

para todas las curvas

$$\delta x^{\bullet} : [t_1, t_2] \to T\mathcal{X} \quad \text{y} \quad \bar{\eta}^{\bullet} : [t_1, t_2] \to \tilde{\mathfrak{g}}$$

tales que

$$\delta x^{\bullet}(t) \in \left.\mathfrak{C}_V^{\text{hor}}\right|_{x(t)} \quad \text{y} \quad \bar{\eta}^{\bullet}(t) \in \left.\mathfrak{C}_V^{\text{ver}}\right|_{x(t)},$$

y la curva base x que satisface que

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{\partial h}{\partial y}(\varsigma(t)).$$

- A, conexión arbitraria
- $A^{\bullet}$, conexión noholónoma generalizada
- $\alpha_A, \alpha_{A^{\bullet}} : TQ/G \to T\mathcal{X} \oplus \widetilde{\mathfrak{g}}$
- $\alpha_A \circ p(v) = \pi_*(v) \oplus a(v)$ y $\alpha_{A^{\bullet}} \circ p(v) = \pi_*(v) \oplus a^{\bullet}(v)$
- Si $\delta\gamma \in TQ$,

$$\alpha_A \circ p(\delta\gamma(t)) = \pi_*(\delta\gamma(t)) \oplus a(\delta\gamma(t)) = \delta x(t) \oplus \bar{\eta}(t)$$

$$\alpha_{A^{\bullet}} \circ p(\delta\gamma(t)) = \pi_*(\delta\gamma(t)) \oplus a^{\bullet}(\delta\gamma(t)) = \delta x^{\bullet}(t) \oplus \bar{\eta}^{\bullet}(t).$$

- Si $\delta\gamma$ is inside C_V,

$$\delta x(t) \oplus \bar{\eta}(t) \in \mathfrak{C}_V \quad \text{y} \quad \delta x^{\bullet}(t) \in \mathfrak{C}_V^{\mathrm{hor}}, \ \bar{\eta}^{\bullet}(t) \in \mathfrak{C}_V^{\mathrm{ver}}$$

Se ve que

$$\delta x\,(t) = \delta x^{\bullet}\,(t) \quad \text{y} \quad \bar{\eta}\,(t) = \varphi\,(\delta x^{\bullet}\,(t)) + \bar{\eta}^{\bullet}\,(t)$$

con

$$\varphi = P_{\widetilde{\mathfrak{g}}} \circ \alpha_A \circ (\alpha_{A^{\bullet}})^{-1} \circ I_{T\mathcal{X}} : T\mathcal{X} \to \widetilde{\mathfrak{g}},$$

$P_{\widetilde{\mathfrak{g}}} : T\mathcal{X} \oplus \widetilde{\mathfrak{g}} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$ y $I_{T\mathcal{X}} : T\mathcal{X} \to T\mathcal{X} \oplus \widetilde{\mathfrak{g}}$

la proyección y la inclusión canónicas

Si $A = A^{\bullet}$ entonces $\varphi = 0$

Teorema de Reducción Alternativa
Sean $(H, D, \mathcal{V})$ y G un grupo de simetría.
Si $A^{\bullet} : TQ \to \mathfrak{g}$ es la conexión noholónoma generealizada y A una conexión arbitraria, $\Gamma : [t_1, t_2] \to T^*Q$ es trayectoria de $(H, D, \mathcal{V})$ si y sólo si la curva

$$\varsigma : [t_1, t_2] \to T^*\mathcal{X} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}^* \quad \text{con base} \quad x : [t_1, t_2] \to \mathcal{X},$$

dada por

$$\varsigma(t) = y(t) \oplus \overline{\mu}(t) = \widetilde{\alpha}_A \circ \widetilde{p}(\Gamma(t))$$

verifica

$$\varsigma(t) \in \mathfrak{D}$$

y las **Ecuaciones de Hamilton-Poincaré Generalizadas**

Ecuación Horizontal

$$\left\langle \frac{D}{Dt}y\left(t\right)+\frac{\partial h}{\partial x}\left(\varsigma\left(t\right)\right)+\left\langle \overline{\mu}\left(t\right),\widetilde{B}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\left(\varsigma\left(t\right)\right),\cdot\right)\right\rangle ,\delta x^{\bullet}\left(t\right)\right\rangle$$

$$+\left\langle \varphi^{*}\left(\tfrac{D}{Dt}\overline{\mu}\left(t\right)+ad^{*}_{\frac{\partial h}{\partial\overline{\mu}}\left(\varsigma\left(t\right)\right)}\overline{\mu}\left(t\right),\overline{\eta}\left(t\right)\right),\delta x^{\bullet}(t)\right\rangle =0(3)$$

Ecuación Vertical

$$\left\langle \frac{D}{Dt}\overline{\mu}\left(t\right)+ad^{*}_{\frac{\partial h}{\partial\overline{\mu}}\left(\varsigma\left(t\right)\right)}\overline{\mu}\left(t\right),\overline{\eta}^{\bullet}\left(t\right)\right\rangle =0 \tag{4}$$

para todas las curvas

$$\delta x^{\bullet} : [t_1, t_2] \to T\mathcal{X} \quad \text{y} \quad \bar{\eta}^{\bullet} : [t_1, t_2] \to \tilde{\mathfrak{g}}$$

tales que

$$\delta x^{\bullet}(t) \in \left.\mathfrak{C}_V^{\text{hor}}\right|_{x(t)} \quad \text{y} \quad \bar{\eta}^{\bullet}(t) \in \left.\mathfrak{C}_V^{\text{ver}}\right|_{x(t)},$$

y la curva base x que satisface que

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{\partial h}{\partial y}(\varsigma(t)).$$

$$Q = \mathcal{X} \times G \quad \text{con} \quad \mathcal{X} = Q/G$$

- $G \times Q \to Q \qquad (g, (x, h)) \mapsto (x, L_g h) = (x, g\,h)$
- $\pi : Q \to \mathcal{X} : (x, h) \mapsto x$
- $G \times TQ \to TQ \qquad \left(g, \left(x, h, \dot{x}, \dot{h}\right)\right) \mapsto \left(x, g\,h, \dot{x}, g\,\dot{h}\right)$
- A, conexión sobre $\pi : Q \to \mathcal{X}$ se puede escribir como

$$A\left(x, h, \dot{x}, \dot{h}\right) = Ad_h\left(\mathcal{A}(x)\ \dot{x}\right) + \dot{h}\,h^{-1}$$

donde $\mathcal{A}$ es la 1-forma $\mathfrak{g}$-valuada sobre $\mathcal{X}$

$$\mathcal{A} : T\mathcal{X} \to \mathfrak{g}$$

dada por $\mathcal{A}(x)\ \dot{x} = A(x, e, \dot{x}, 0)$

- La conexión A es trivial si $\mathcal{A}(x) = 0 \quad \forall x$
- La curvatura reducida $\widetilde{B}$ puede escribirse como

$$\widetilde{B}\left(\left(x,\dot{x}\right),\left(x,\delta x\right)\right) = \left(x, d\mathcal{A}\left(\left(x,\dot{x}\right),\left(x,\delta x\right)\right) - \left[\mathcal{A}\left(x\right)\,\dot{x}, \mathcal{A}\left(x\right)\,\delta x\right]\right)$$

- $\tilde{\mathfrak{g}} \simeq \mathcal{X} \times \mathfrak{g}$
  - $\widetilde{\mathfrak{g}} \to \mathcal{X} \times \mathfrak{g} \quad \left[\left(x,h\right),\xi\right] \longmapsto \left(x, Ad_{h^{-1}}\xi\right)$
  - $\mathcal{X} \times \mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}} \quad \left(x,\xi\right) \longmapsto \left[\left(x,h\right),\xi\right]$
- $\tilde{\mathfrak{g}}^* \simeq \mathcal{X} \times \mathfrak{g}^*$
  - $\widetilde{\mathfrak{g}^*} \to \mathcal{X} \times \mathfrak{g}^* \quad \left[\left(x,h\right),\mu\right] \longmapsto \left(x, Ad^*_{h^{-1}}\mu\right)$
  - $\mathcal{X} \times \mathfrak{g}^* \to \widetilde{\mathfrak{g}^*} \quad \left(x,\mu\right) \longmapsto \left[\left(x,e\right),\mu\right]$

- $\alpha_A \circ p(x, h, \dot{x}, \dot{h}) = (x, \dot{x}) \oplus (x, \mathcal{A}(x)\dot{x} + h^{-1}\dot{h})$
- las derivadas involucradas en las ecuaciones horizontales y verticales se simplifican
- $\varphi(x, \dot{x}) = (x, -\mathcal{A}^{\bullet}(x)\dot{x})$

Si A es la conexión trivial, las ecuaciones reducidas de Hamilton-Poincaré se escriben como

$$\left\langle \frac{D}{Dt}y + \frac{\partial h}{\partial x}(\varsigma), \delta x^{\bullet} \right\rangle - \left\langle \frac{D}{Dt}\mu + ad^{*}_{\frac{\partial h}{\partial \mu}(\varsigma)}\mu, \mathcal{A}^{\bullet}(x)\delta x^{\bullet} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \frac{D}{Dt}\mu + ad^{*}_{\frac{\partial h}{\partial \mu}(\varsigma)}\mu, \eta^{\bullet} \right\rangle = 0$$

Un sistema Hamiltoniano HoHolónomo Generalizado de orden superior es una terna $(H, \mathcal{P}, \mathcal{V})$ donde

- $H : T^*Q \longrightarrow \mathbb{R}$ es el **Hamiltoniano**

  Si $k, l \geq 1$ y $T^{(j)}Q$ el fibrado tangente de orden j sobre Q para todo $j \in \mathbb{N}$

- $\mathcal{P} \subset T^{(k-1)}T^*Q$ es la **subvariedad de vínculos cinemáticos**

- $\mathcal{V} \subset T^{(l-1)}T^*Q \times_{T^*Q} TT^*Q$
  es la **subvariedad vínculos variacionales** y verifica que $\forall\, \sigma \in T^*Q$ y $\forall\, \zeta \in T_\sigma^{(l-1)}T^*Q$, el espacio

$$\mathcal{V}\,(\zeta) \equiv (\{\zeta\} \times T_\sigma T^*Q) \cap \mathcal{V},$$

  se identifica naturalmente con un subconjuntos de $T_\sigma T^*Q$ que es vacío o un subespacio lineal.

Sea el conjunto $\mathcal{W} \subset T^{(l-1)}T^*Q \times_{T^*Q} TT^*Q$ tal que $\forall\, \sigma \in T^*Q$ y $\zeta \in T_\sigma^{(l-1)}T^*Q$ se tiene que

$$\mathcal{W}(\zeta) \equiv (\{\zeta\} \times T_\sigma T^*Q) \cap \mathcal{W} = \begin{cases} \mathcal{V}^\perp(\zeta) & si \quad \mathcal{V}(\zeta) \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{cc} \end{cases}$$

$\mathcal{W}$ es el espacio de **fuerzas de vínculo**.

Supongamos que

- $\forall\, \sigma \in T^*Q$ y $\zeta \in T_\sigma^{(l-1)} T^*Q$ para los cuales $\mathcal{V}(\zeta) \neq \emptyset$,

$$\mathcal{W}(\zeta) = \mathcal{V}^\perp(\zeta) \subset \ker(\pi_{*,\sigma})$$

  O sea, $\mathcal{W}(\zeta)$ es un subespacio vertical de $T_\sigma T^*Q$
- dado el isomorfismo

$$\beta : TT^*Q \to T^*Q \oplus TQ \oplus T^*Q,$$

  - $\beta(\mathcal{V}(\zeta)) = \sigma \oplus C_V(\zeta) \oplus T^*_{\pi(\sigma)}Q$
  - $\beta(\mathcal{W}(\zeta)) = \sigma \oplus 0 \oplus F_V(\zeta)$

  $C_V(\zeta) \subset T_{\pi(\sigma)}Q$ es un subespacio lineal y $F_V(\zeta) = C_V^0(\zeta)$

Una trayectoria de of $(H, \mathcal{P}, \mathcal{V})$ es una curva $\Gamma : [t_1, t_2] \to T^*Q$ tal que

- $\Gamma^{(k-1)}(t) \in \mathcal{P}$, $\forall t \in (t_1, t_2)$
- el conjunto de las variaciones $\delta\Gamma$ de Γ tales que

$$\left(\Gamma^{(l-1)}(t), \delta\Gamma(t)\right) \in \mathcal{V}, \qquad \forall t \in (t_1, t_2),$$

  es no vacío
- para tales variaciones

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\langle \omega^\flat\left(\Gamma'(t)\right) - dH\left(\Gamma(t)\right), \delta\Gamma(t) \right\rangle \, dt = 0$$

- Sea $\gamma(t) = \pi_Q(\Gamma(t))$

- $\delta\gamma(t) = \pi_{Q*}(\delta\Gamma(t))$ es una variación infinitesimal de γ

- Si se verifican las condiciones sobre los vínculos $\mathcal{V}$

$$\delta\Gamma(t) \in \mathcal{V}\left(\Gamma^{(l-1)}(t)\right) \quad \Leftrightarrow \quad \delta\gamma(t) \in C_V\left(\Gamma^{(l-1)}(t)\right)$$

- $(H, \mathcal{P}, \mathcal{V})$ se define como $(H, \mathcal{P}, C_V(\zeta))$ con $\zeta \in T^{(l-1)}T^*Q$

- G un grupo de Lie que actúa a izquierda sobre Q por $\rho : G \times Q \to Q$ tal que $\pi : Q \longrightarrow \mathcal{X} = Q/G$ es un fibrado principal
- ρ se levanta a $T^{(k-1)}Q$ y T^*Q

$$\rho^{(k-1)} : G \times T^{(k-1)}Q \to T^{(k-1)}Q \quad \text{y} \quad \tilde{\rho} : G \times T^*Q \to T^*Q$$

si $\rho_g : Q \to Q \qquad q \dashrightarrow \rho(g, q)$

$$\rho_g^{(k-1)}(\gamma^{(k-1)}) = (\rho_g \circ \gamma)^{(k-1)} \quad \text{y} \quad \tilde{\rho}_g(\alpha_q) = (\rho_{g^{-1}})^*(\alpha_q)$$

G es **una simetría** de $(H, \mathcal{P}, \mathcal{V})$ si H, $\mathcal{P}$ y $\mathcal{V}$ son G-invariantes

1. $H \circ (\widetilde{\rho}_g) = H \quad \forall\, g \in G$

2. $\left(\widetilde{\rho}_g^{(k-1)}\right)(\mathcal{P}) = \mathcal{P} \quad \forall\, g \in G$

3. para cada $\sigma \in T^*Q$ y cada $\zeta \in T_\sigma^{(k-1)}T^*Q$

$$(\widetilde{\rho}_g)_* (\mathcal{V}(\eta)) = \mathcal{V}(\widetilde{\rho}_g^{(l-1)}(\eta)) \quad \forall\, g \in G$$

La condición 3 implica que

$$(\widetilde{\rho}_g)_* (C_V(\eta)) = C_V(\widetilde{\rho}_g^{(l-1)}(\eta)) \quad \forall\, g \in G$$

Si G es un grupo de **simetría** de $(H, \mathcal{P}, \mathcal{V})$ y

$$p : TQ \to TQ/G \;\text{ y }\; \tilde{p}_n : T^{(n-1)}T^*Q \to T^{(n-1)}T^*Q/G$$

son las proyecciones canónicas $(\widetilde{p}_1 = \widetilde{p})$

- $h : T^*Q/G \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $H = h \circ \tilde{p}$ es el **Hamiltoniano reducido**
- $\mathfrak{P} := \widetilde{p}^{(k-1)}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}/G \subset T^{(k-1)}T^*Q/G$ son los **vínculos cinemáticos reducidos**

- $\mathfrak{C}_V \subset T^{(l-1)}T^*Q/G \times_{T^*Q/G} TT^*Q/G$ dado por

$$\mathfrak{C}_V(\widetilde{p}_l(\zeta)) = p\,(C_V(\zeta)) = C_V(\zeta)/G$$

son los **vínculos variacionales reducidos**

h, $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{C}_V(\zeta)$ son los **datos reducidos** del sistema $(H, \mathcal{P}, C_V(\eta))$

l-conexiones

Dado $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, una $\mathbf{l}-$ conexión sobre el fibrado $\pi : Q \twoheadrightarrow \mathcal{X}$ es una aplicación

$$A : T^{(l)}T^{*}Q \times_{Q} TQ \to \mathfrak{g}$$

tal que $\forall\, \sigma \in T_{q}^{*}Q$ y $\forall\, \zeta \in T_{\sigma}^{(l)}T^{*}Q$, es una transformación lineal cuando se restringe a $\{\zeta\} \times T_{q}Q$, y para todos $v \in T_{q}Q$, $g \in G$ y $\eta \in \mathfrak{g}$ se tiene que

- $A\left(\zeta, X_{\eta}\left(q\right)\right) = \eta$
- $A\left(\rho_{g}^{(l)}\left(\zeta\right), \rho_{g*}\left(v\right)\right) = Ad_{g}\left[A\left(\zeta, v\right)\right]$

Tener una l-conexión es equivalente a tener una asignación de subespacios vectoriales $\mathcal{H}(\zeta) \subset T_q Q$
tales que, para cada $q \in Q$, $\sigma \in T_q^* Q$ y $\zeta \in T_\sigma^{(l)} T^* Q$ se tiene

- $T_q Q = \mathcal{H}(\zeta) \oplus \mathcal{V}(\zeta)$
  donde $\mathcal{V}(\zeta) = \mathcal{V}_q$ es el subespacio vertical en q
- $\mathcal{H}\left(\rho_g^{(l)}(\zeta)\right) = (\rho_g)_* (\mathcal{H}(\zeta))$, $\forall\, g \in G$
- $\mathcal{H}(\zeta)$, **los subespacios horizontales**, dependen diferenciablemente de q y ζ

- Dada A, $\mathcal{H}(\zeta)$ se define como

$$\mathcal{H}(\zeta) = \{v \in T_q Q : A(\zeta, v) = 0\}$$

- Dados los subespacios $\mathcal{H}(\zeta)$, A se define como

$$A(\zeta, v) = \eta,$$

donde $v - X_\eta(q) \in \mathcal{H}(\zeta)$

- Dada una l-conexión A se define la aplicación

$$\alpha_A : T^{(l)}T^*Q\big/G \times_{\mathcal{X}} TQ/G \to T\mathcal{X} \oplus \widetilde{\mathfrak{g}}$$

dada por $\alpha_A([\zeta], [v]) = \pi_*(v) \oplus [q, A(\zeta, v)]$

Para cada $\zeta \in T^{(l)}T^*Q$,

- la aplicación

$$\alpha_A^{[\zeta]} : (TQ/G)_{\pi(q)} \to T_{\pi(q)}\mathcal{X} \times \tilde{\mathbf{g}}_{\pi(q)}$$

  es un isomorfismo lineal

- la aplicación

$$\alpha_A^{[\zeta]} \circ p : T_qQ \to T_{\pi(q)}\mathcal{X} \times \tilde{\mathbf{g}}_{\pi(q)}$$

  es un isomorfismo lineal

Se busca descomponer los vínculos $C_V(\zeta) \subset T_qQ$ en desplazamientos reducidos horizontales y verticales

$(l-1)$-conexión noholónoma generalizada

- Sea una métrica G-invariante sobre Q
  Para cada q y cada $\zeta \in T^{(l-1)}T^*Q$ (con $\pi_Q(\sigma) = q$) sean
- $\mathcal{S}(\zeta) = C_V(\zeta) \cap \mathbb{V}(\zeta)$
- $\mathcal{T}(\zeta)$ y $\mathcal{U}(\zeta)$ son los complementos ortogonales de $\mathcal{S}(\zeta)$ en $C_V(\zeta)$ y $\mathbb{V}(\zeta)$

$$C_V(\zeta) = \mathcal{T}(\zeta) \oplus \mathcal{S}(\zeta) \quad \text{y} \quad \mathbb{V}(\zeta) = \mathcal{S}(\zeta) \oplus \mathcal{U}(\zeta)$$

- Sea $\mathcal{R}(\zeta)$ el complemento ortogonal de $C_V(\zeta) + \mathbb{V}(\zeta)$ en TQ

Si $\mathcal{T}(\zeta)$ y $\mathcal{R}(\zeta)$ son distribuciones sobre Q se define la $l-1$**-conexión noholónoma generalizada**

$$A^{\bullet} : T^{(l-1)}T^{*}Q \to \mathbf{g}$$

cuyos espacios horizontales están dados por las distribuciones

$$\mathbb{H}^{\bullet}(\zeta) = \mathcal{R}(\zeta) \oplus \mathcal{T}(\zeta)$$

Entonces,

$$T_qQ = \mathbb{V}(\zeta) \oplus \mathbb{H}^{\bullet}(\zeta) = \mathcal{U}(\zeta) \oplus \mathcal{S}(\zeta) \oplus \mathcal{T}(\zeta) \oplus \mathcal{R}(\zeta)$$

Si $\mathfrak{C}_V^{\bullet}([\zeta]) \simeq \alpha_{A^\bullet}^{[\zeta]} \circ p(C_V(\zeta))$ se tiene que

$$\mathfrak{C}_V^{\bullet}([\zeta]) = \mathfrak{C}_V^{\text{hor}}([\zeta]) \oplus \mathfrak{C}_V^{\text{ver}}([\zeta])$$

con

$$\mathfrak{C}_V^{\text{hor}}([\zeta]) \simeq \pi_*(C_V(\zeta)) = T_{\pi(q)}\mathcal{X} \cap \mathfrak{C}_V^{\bullet}([\zeta])$$

$$\mathfrak{C}_V^{\text{ver}}([\zeta]) \simeq a_\zeta^{\bullet}(C_V(\zeta)) = \tilde{\mathfrak{g}}_{\pi(q)} \cap \mathfrak{C}_V^{\bullet}([\zeta])$$

- A es una conexión arbitraria en $\pi : Q \to \mathcal{X}$
- $A^{\bullet}$ la $(l-1)$-conexión noholónoma generalizada
- $\alpha_A \circ p\left(\delta\gamma\left(t\right)\right) = \pi_*\left(\delta\gamma\left(t\right)\right) \oplus a\left(\delta\gamma\left(t\right)\right) = \delta x\left(t\right) \oplus \bar{\eta}\left(t\right)$
- $\alpha_{A^{\bullet}}^{[\zeta]} \circ p\left(\delta\gamma\left(t\right)\right) = \pi_*\left(\delta\gamma\left(t\right)\right) \oplus a_{\zeta}^{\bullet}\left(\delta\gamma\left(t\right)\right) = \delta x^{\bullet}\left(t\right) \oplus \bar{\eta}^{\bullet}\left(t\right)$
- $\varphi^{[\zeta]} : T_{\pi(q)}\mathcal{X} \to \widetilde{\mathfrak{g}}_{\pi(q)}$ tal que

$$\varphi^{[\zeta]}\left(u\right) = P_{\widetilde{\mathfrak{g}}} \circ \alpha_A\left[\left(\alpha_{A^{\bullet}}^{[\zeta]}\right)^{-1}\left(I_{T\mathcal{X}}\left(u\right)\right)\right]$$

- $\delta x(t) = \delta x^{\bullet}(t)$ y $\bar{\eta}(t) = \varphi^{[\zeta]}(\delta x^{\bullet}(t)) + \bar{\eta}^{\bullet}(t)$

Teorema de reducción en orden superior
Sea G una simetría de $(H, \mathcal{P}, \mathcal{V})$. Si A es una conexión arbitraria en el fibrado $\pi : Q \to \mathcal{X}$ y $A^\bullet$ es la $(l-1)$-conexión noholónoma generalizada, una curva $\Gamma : [t_1, t_2] \to T^*Q$ es una trayectoria de $(H, \mathcal{P}, \mathcal{V})$ si y sólo si la curva

$$\eta : [t_1, t_2] \to T^*\mathcal{X} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}^*$$

dada por

$$\eta(t) = y(t) \oplus \bar{\mu}(t) = \tilde{\alpha}_A \circ \tilde{p}(\Gamma(t)),$$

verifica los vínculos cinemáticos reducidos y las **Ecuaciones de Hamilton-Poincaré Generalizadas de Orden Superior**

Ecuación Horizontal

$$\left\langle \frac{D}{Dt}y(t) + \frac{\partial h}{\partial x} + \left\langle \bar{\mu}(t), \tilde{B}(\frac{\partial h}{\partial y}(\bar{\eta}), .) \right\rangle, \delta x^{\bullet}(t) \right\rangle +$$

$$\left\langle \left(\varphi^{\eta(t)}\right)^{*} \left(\frac{D}{Dt}\mu(t) - ad_{\frac{\partial h}{\partial \mu}}\bar{\mu}(t)\right), \delta x^{\bullet}(t) \right\rangle = 0$$

Ecuación Vertical

$$\left\langle \frac{D}{Dt}\bar{\mu}(t) - ad^{*}_{\frac{\partial h}{\partial \mu}}\bar{\mu}(t), \bar{\eta}^{\bullet} \right\rangle = 0$$

MUCHAS GRACIAS.....!!!!