Transformada Wavelet en el Análisis de Señales

Paula Vizzarri

Septiembre, 2016

Estudiar y combinar herramientas del Análisis Wavelet y de la Teoría de la Información

$\Downarrow$

Definir indicadores

$\Downarrow$

Caracterizar diferentes grupos de señales electrocardiográficas.

- Análisis clásico de señales (Fourier - 1800)

  $\Rightarrow$ Se focaliza en las frecuencias;
  $\Rightarrow$ Descompone en sumas de senos y cosenos;
  $\Rightarrow$ Toma como base a un conjunto de dilataciones de una función 'madre' exponencial.

- Análisis Wavelet (1980)

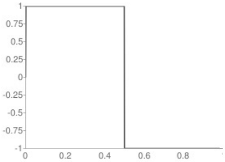
  $\Rightarrow$ Complementa análisis anterior <u>teniendo además en cuenta el tiempo;</u>
  $\Rightarrow$ Toma como base dilataciones y traslaciones de una misma función 'madre', <u>con propiedades deseables</u>.
  (Rápido decaimiento, soporte compacto...)

Definición

Una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, se dirá wavelet básica o **wavelet madre** *sii satisface la siguiente* **condición de admisibilidad***:*

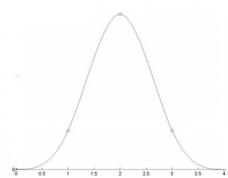
$$C_\psi := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|^2} d\omega < \infty$$

Ejemplos:



Wavelet de Haar

- Discontinua;
- Asimétrica;
- Soporte compacto;
- Ortogonal.



Spline Cúbica

- Continua;
- Soporte compacto;
- Simétrica;
- No ortogonal.

Daubechies 5

- Continua;
- Soporte compacto;
- Asimétrica;
- Ortogonal.

Definición

Una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ *es una* **wavelet ortonormal**, *sii la familia* $\psi_{j,k}(t) := 2^{j/2}\psi(2^j t - k), \quad j,k \in \mathbb{Z}$ *, es una BON de* $L^2(\mathbb{R})$.

- Cada función wavelet madre ψ, tiene asociada otra wavelet, llamada función de escala, ϕ y viceversa;
- La utilización de bases formadas a partir de una wavelet y de una función de escala, son la vía para estudiar una señal, proyectándola sobre ciertos espacios de aproximación, y espacios de detalle.

  Esto se hace mediante el llamado **Análisis Multirresolución**.

Definición

Una sucesión de subespacios cerrados $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$, se dice un **Análisis multirresolución** sii satisface las siguientes propiedades:

(a) $V_j \subseteq V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}$, *Espacios de aproximación*;

(b) $\bigcup_{-\infty}^{\infty} V_j$ es densa en $L^2(\mathbb{R})$;

(c) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$;

(d) $f(x) \in V_0$ *sii* $D_{2^j} f(x) = f(2^j x) \in V_j, \quad \forall j \in \mathbb{Z}$;

(e) $\exists\ \varphi(x) \in V_0$, llamada función de escala, tal que $\{\varphi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de V_0.

Llamando $W_j :=$ Complemento ortogonal de V_j sobre V_{j+1},
(Espacios de detalle),

$$\Downarrow$$

obtenemos que:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

$$\Downarrow$$

y procediendo recursivamente:

$$L^2(\mathbb{R}) = ... \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus ...$$

Para cada uno de estos espacios W_j, se tiene una base, dada por la siguiente familia:

$$\psi_{j,k}(x) := \{2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k), \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

De este modo una señal representada mediante una función $f \in L^2(\mathbb{R})$, puede representarse mediante el siguiente desarrollo en serie:

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_j(k) \psi_{j,k}$$

Siendo $d_j(k)$, los *coeficientes del detalle en el nivel* j.

Definición

Energía del nivel de resolución j: $E_j := \sum_{k \in \mathbb{Z}} |d_j(k)|^2$

Energía Total: $E_{total} := \sum_j \sum_k |d_j(k)|^2$

Definición

Se define la **Entropía de Shannon** asociada a una distribución de probabilidades $\{p_i\}_{i=1,..,n}$, como:

$$H = -K \sum_{i=1}^{n} p_i \log(p_i) \qquad K \text{ constante positiva}$$

Definición

Energía Wavelet Relativa: $p_j := \frac{E_j}{E_{total}}$ *(Distribución de prob buscada)*

Entropía Wavelet Total: $EWT := -\sum_j p_j \log(p_j)$

EWT normalizada: $EWT_{norm} := \frac{EWT}{\log(n)}$

Las medidas de entropía serán aplicadas al análisis de señales electrocardiográficas (ECG).

Se han analizado tres grupos poblacionales:

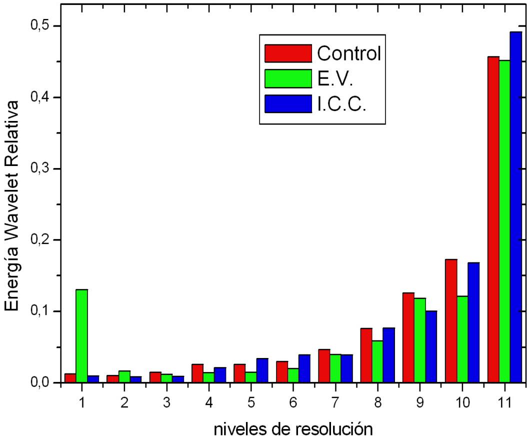
1. Un grupo control de individuos sanos;
2. Un grupo de pacientes con extrasístole ventricular;
3. Un grupo de pacientes con insuficiencia cardíaca congestiva.

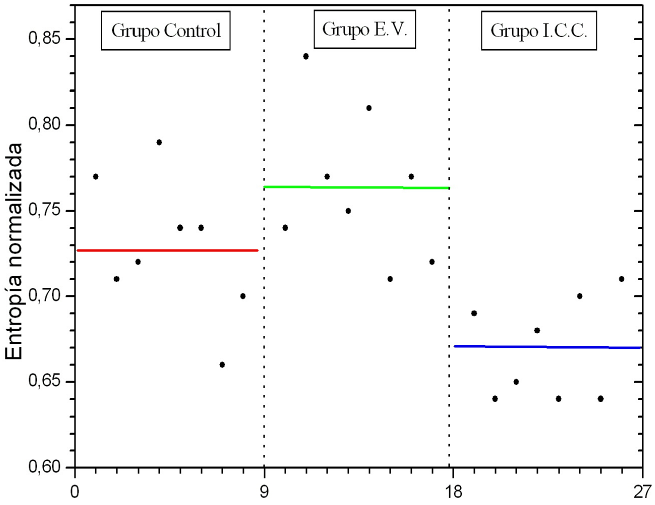
Se espera distinguir los 3 grupos mediante los cuantificadores presentados.

Utilizando un esquema multirresolución que toma como wavelet madre a una spline cúbica, y analizando una muestra de 8 pacientes por grupo, se obtuvieron los siguientes resultados:

	Energía Wavelet Relativa en cada nivel		
Escala j	Grupo control	Grupo E.V	Grupo I.C.C
-1	0.0129	0.1303	0.0099
-2	0.0102	0.0167	0.0089
-3	0.0154	0.0122	0.0093
-4	0.0260	0.0146	0.0216
-5	0.0264	0.0153	0.0341
-6	0.0301	0.0204	0.0397
-7	0.0472	0.0401	0.0398
-8	0.0761	0.0593	0.0768
-9	0.1257	0.1186	0.1001
-10	0.1729	0.1212	0.1682
-11	0.4572	0.4514	0.4915
	Entropía Wavelet total normalizada		
	0.719	0.733	0.693

Figura: Energía wavelet relativa




Grupo Control
Grupo E.V.
Grupo I.C.C.
Entropía normalizada
0,85
0,80
0,75
0,70
0,65
0,60
0
9
18
27

Si bien los rangos de variabilidad de las entropías presentan cierta superposición, se observa la siguiente tendencia:

- Grupo control con valores dentro de la zona media;
- Grupo E.V, en la zona superior (Entropías más elevadas);
- Grupo I.C.C, en la zona baja (Entropías más pequeñas).

- Reinterpretar programas Fortram preexistentes en el grupo de trabajo, a lenguaje Matlab, focalizando en la automatización en el manejo de archivos;
- Ampliar nuestra base de datos de señales electrocardiográficas, en cada uno de los tres grupos;
- Continuar con el estudio de aspectos teóricos.

Muchas Gracias!