Hacia la reducción en etapas de sistemas mecánicos discretos con vínculos no holónomos

Javier Fernández - Cora Tori - Marcela Zuccalli

Instituto Balseiro - Fac. Cs. Exactas UNLP

Reunión anual UMA - Septiembre 2016

Desarrollo de la charla

* Reducción de (una parte de) la simetría de sistemas mecánicos discretos con vínculos no holónomos

* El sistema reducido presenta una simetría residual, ¿es posible aplicar un segundo proceso de reducción?

* Sistemas de Lagrange D'Alembert Poincaré discretos

* Reducción de sistemas de Lagrange D'Alembert Poincaré discretos

* Descripción de la simetría residual

Un **sistema mecánico discreto con vínculos no holónomos** $\mathcal{M} = (Q, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D})$ está determinado por,

* Función diferenciable $L_d : Q \times Q \to \mathbb{R}$, Q variedad de dimensión finita,
* Subvariedad $\mathcal{D}_d \subset Q \times Q$, vínculos cinemáticos,
* Subfibrado $\mathcal{D} \subset TQ$, vínculos variacionales.

Un **sistema mecánico discreto con vínculos no holónomos** $\mathcal{M} = (Q, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D})$ está determinado por,

* Función diferenciable $L_d : Q \times Q \to \mathbb{R}$, Q variedad de dimensión finita,
* Subvariedad $\mathcal{D}_d \subset Q \times Q$, vínculos cinemáticos,
* Subfibrado $\mathcal{D} \subset TQ$, vínculos variacionales.

La acción discreta está dada por $S_d\left(q_\cdot\right) := \sum_{k=0}^{N-1} L_d\left(q_j, q_{j+1}\right)$

Sistemas mecánicos discretos no holónomos

Principio de Lagrange-D'Alembert discreto

Un **sistema mecánico discreto con vínculos no holónomos** $\mathcal{M} = (Q, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D})$ está determinado por,

* Función diferenciable $L_d : Q \times Q \to \mathbb{R}$, Q variedad de dimensión finita,
* Subvariedad $\mathcal{D}_d \subset Q \times Q$, vínculos cinemáticos,
* Subfibrado $\mathcal{D} \subset TQ$, vínculos variacionales.

La acción discreta está dada por $S_d\left(q_\cdot\right) := \sum_{k=0}^{N-1} L_d\left(q_j, q_{j+1}\right)$

Principio de Lagrange-D'Alembert discreto. Las trayectorias del sistema satisfacen

$$\begin{cases} \left(q_{j-1}, q_j\right) \in \mathcal{D}_d \\ dS_d\left(q_\cdot\right)\left(\delta q_\cdot\right) = 0 \end{cases}$$

para toda variación $\delta q_\cdot$ a extremos fijos con $\delta q_j \in \mathcal{D}_{q_j}$.

Sistemas mecánicos discretos no holónomos con simetría

G grupo de Lie que actúa sobre Q, $l : G \times Q \to Q$, de modo que $\pi : Q \to Q/G$ es un fibrado principal.

Sistemas mecánicos discretos no holónomos con simetría

G grupo de Lie que actúa sobre Q, $l : G \times Q \to Q$, de modo que $\pi : Q \to Q/G$ es un fibrado principal.

Otras acciones de G

Acción levantada a TQ	Acción diagonal
$G \times TQ \to TQ$	$G \times (Q \times Q) \to Q \times Q$
$g \cdot (q, \dot{q}) \mapsto (l_g(q), dl_g(\dot{q}))$	$g \cdot (q_0, q_1) \mapsto (l_g(q_0), l_g(q_1))$

Sistemas mecánicos discretos no holónomos con simetría

G grupo de Lie que actúa sobre Q, $l : G \times Q \to Q$, de modo que $\pi : Q \to Q/G$ es un fibrado principal.

Otras acciones de G

Acción levantada a TQ	Acción diagonal
$G \times TQ \to TQ$	$G \times (Q \times Q) \to Q \times Q$
$g \cdot (q, \dot{q}) \mapsto (l_g(q), dl_g(\dot{q}))$	$g \cdot (q_0, q_1) \mapsto (l_g(q_0), l_g(q_1))$

G es una simetría para $\mathcal{M} = (Q, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D})$ si L_d, $\mathcal{D}_d$ y $\mathcal{D}$ son G-invariantes.

Definición

*Una **conexión discreta afin** es una aplicación* $\mathcal{A}_d : \mathfrak{U} \subset Q \times Q \to G$,

$$\mathcal{A}_d\left(q_0, q_1\right) := g,$$

donde $g \in G$ *es el único tal que*

$$\left(q_0, q_1\right) = \left(q_0, l_g^Q\left(q_0\right)\right) \cdot \left(q_0, l_{g^{-1}}^Q\left(q_1\right)\right).$$

Definición

Una ***conexión discreta afin*** *es una aplicación* $\mathcal{A}_d : \mathfrak{U} \subset Q \times Q \to G$,

$$\mathcal{A}_d\left(q_0, q_1\right) := g,$$

donde $g \in G$ *es el único tal que*

$$\left(q_0, q_1\right) = \left(q_0, l_g^Q\left(q_0\right)\right) \cdot \left(q_0, l_{g^{-1}}^Q\left(q_1\right)\right).$$

Esta noción de conexión discreta afín permite, entre otras cosas, describir el espacio cociente $\left(Q \times G\right)/G$ que aparece naturalmente en el proceso de reducción y que denotamos $\tilde{G} := \left(Q \times G\right)/G$.

$$
\begin{tikzcd}
Q \times Q \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & Q \times G \times Q/G \\
(Q \times Q)/G &
\end{tikzcd}
$$

$$\Phi(q_0, q_1) := (q_0, \mathcal{A}_d(q_0, q_1), \pi^{Q,G}(q_1))$$

$$\begin{tikzcd} Q \times Q \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & Q \times G \times Q/G \arrow[d] \\ (Q \times Q)/G \arrow[r] & \tilde{G} \times Q/G \end{tikzcd}$$

$$\Phi(q_0, q_1) := (q_0, \mathcal{A}_d(q_0, q_1), \pi^{Q,G}(q_1))$$

Sistemas mecánicos discretos no holónomos con simetría

Reducción - Diagrama de espacios

$$
\begin{tikzcd}
Q \times Q \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] \arrow[dr, "\Gamma"] & Q \times G \times Q/G \arrow[d] \\
(Q \times Q)/G \arrow[r] & \tilde{G} \times Q/G
\end{tikzcd}
$$

$$\Phi(q_0, q_1) := (q_0, \mathcal{A}_d(q_0, q_1), \pi^{Q,G}(q_1))$$

$$\Gamma(q_0, q_1) = (\pi^{Q \times G, G}(q_0, \mathcal{A}_d(q_0, q_1)), \pi^{Q,G}(q_1))$$

Sistemas mecánicos discretos no holónomos con simetría

Reducción - Diagrama de espacios

$$
\begin{tikzcd}
Q \times Q \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] \arrow[dr, "\Gamma"] & Q \times G \times Q/G \arrow[d] \\
(Q \times Q)/G \arrow[r] & \tilde{G} \times Q/G
\end{tikzcd}
$$

$$\Phi(q_0, q_1) := (q_0, \mathcal{A}_d(q_0, q_1), \pi^{Q,G}(q_1))$$

$$\Gamma(q_0, q_1) = (\pi^{Q \times G, G}(q_0, \mathcal{A}_d(q_0, q_1)), \pi^{Q,G}(q_1))$$

$$\hat{L}_d : \tilde{G} \times Q/G \to \mathbb{R}$$

Sea G un grupo de simetría de $\mathcal{M} = (Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$ y $\mathcal{A}_d$ conexión discreta afín sobre $\pi^{Q,G} : Q \to Q/G$.

Sean $q_\cdot$ curva discreta en Q,
$(v_k, r_{k+1}) := \left(\pi^{Q\times G,G}\left(q_k, \mathcal{A}_d\left(q_k, q_{k+1}\right)\right), \pi^{Q,G}\left(q_{k+1}\right)\right)$ curva discreta en $\tilde{G} \times Q/G$.

Son equivalentes,

1. *$q_\cdot$ es trayectoria del sistema en Q,*
2. *$(v_\cdot, r_\cdot)$ es trayectoria del sistema reducido definido sobre $\tilde{G} \times Q/G$; es decir, (v_k, r_{k+1}) satisface los vínculos cinemáticos reducidos y*

$$d\hat{S}_d\left(v_\cdot, r_\cdot\right)\left(\delta v_\cdot, \delta r_\cdot\right) = 0$$

para toda variación $(\delta v_\cdot, \delta r_\cdot)$ que satisface los vínculos variacionales reducidos.

- H subgrupo cerrado normal de G - G/H es grupo de Lie

Reducción de sistemas mecánicos discretos no holónomos

¿Se puede plantear la reducción en etapas?

- H subgrupo cerrado normal de G - G/H es grupo de Lie
- Reducción de la simetría dada por H

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_Q = (Q \times Q, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}) & \qquad & L_d : Q \times Q \to \mathbb{R} \\ \big\downarrow & & \\ \hat{\mathcal{M}}_Q = (\tilde{H} \times Q/H, \hat{L}_d, \hat{\mathcal{D}}_d, \hat{\mathcal{D}}) & \qquad & \hat{L}_d : \tilde{H} \times Q/H \to \mathbb{R} \end{array}$$

Reducción de sistemas mecánicos discretos no holónomos

¿Se puede plantear la reducción en etapas?

- H subgrupo cerrado normal de G - G/H es grupo de Lie
- Reducción de la simetría dada por H

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{M}_Q = (Q \times Q, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}) & \qquad & L_d : Q \times Q \to \mathbb{R} \\
\big\downarrow & & \\
\hat{\mathcal{M}}_Q = (\tilde{H} \times Q/H, \hat{L}_d, \hat{\mathcal{D}}_d, \hat{\mathcal{D}}) & \qquad & \hat{L}_d : \tilde{H} \times Q/H \to \mathbb{R}
\end{array}
$$

- G/H representa la simetría residual del sistema

- H subgrupo cerrado normal de G - G/H es grupo de Lie
- Reducción de la simetría dada por H

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_Q = (Q \times Q, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}) & \qquad & L_d : Q \times Q \to \mathbb{R} \\ \Big\downarrow & & \\ \hat{\mathcal{M}}_Q = (\tilde{H} \times Q/H, \hat{L}_d, \hat{\mathcal{D}}_d, \hat{\mathcal{D}}) & \qquad & \hat{L}_d : \tilde{H} \times Q/H \to \mathbb{R} \end{array}$$

- G/H representa la simetría residual del sistema

Problema

El sistema reducido no es un sistema mecánico discreto y no puede volver a aplicarse el proceso de reducción realizado anteriormente.

Reducción de sistemas mecánicos discretos no holónomos

¿Se puede plantear la reducción en etapas?

- H subgrupo cerrado normal de G - G/H es grupo de Lie
- Reducción de la simetría dada por H

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{M}_Q = (Q \times Q, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}) & \qquad & L_d : Q \times Q \to \mathbb{R} \\
\big\downarrow & & \\
\hat{\mathcal{M}}_Q = (\tilde{H} \times Q/H, \hat{L}_d, \hat{\mathcal{D}}_d, \hat{\mathcal{D}}) & \qquad & \hat{L}_d : \tilde{H} \times Q/H \to \mathbb{R}
\end{array}
$$

- G/H representa la simetría residual del sistema

Problema

El sistema reducido no es un sistema mecánico discreto y no puede volver a aplicarse el proceso de reducción realizado anteriormente.

Una propuesta

Definir una nueva familia de sistemas y un nuevo mecanismo de reducción con los que sea posible realizar reducciones sucesivas.

Sistemas de Lagrange D'Alembert Poincaré discretos

Para sistemas continuos, Cendra, Marsden y Ratiu (2001) definen una familia de sistemas donde realizar reducciones sucesivas es posible. Siguiendo esa línea proponemos la siguiente definición para el caso de sistemas discretos.

Definición

Un ***sistema de Lagrange D'Alembert Poincaré discreto*** $\mathcal{M} = (E, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}, \mathcal{P})$ *está determinado por,*

* $\phi : E \to M$ *espacio fibrado entre variedades de dimensión finita,*
* *Función diferenciable* $L_d : E \times M \to \mathbb{R}$*,*
* *Subvariedad* $\mathcal{D}_d \subset E \times M$*, vínculos cinemáticos,*
* *Subfibrado* $\mathcal{D} \subset TE$*, vínculos variacionales,*
* $\mathcal{P}$ *una aplicación que determina una relación encadenada entre las variaciones.*

Sistemas de Lagrange D'Alembert Poincaré discretos

Para sistemas continuos, Cendra, Marsden y Ratiu (2001) definen una familia de sistemas donde realizar reducciones sucesivas es posible. Siguiendo esa línea proponemos la siguiente definición para el caso de sistemas discretos.

Definición

Un ***sistema de Lagrange D'Alembert Poincaré discreto*** $\mathcal{M} = (E, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}, \mathcal{P})$ *está determinado por,*

* $\phi : E \to M$ *espacio fibrado entre variedades de dimensión finita,*
* *Función diferenciable* $L_d : E \times M \to \mathbb{R}$*,*
* *Subvariedad* $\mathcal{D}_d \subset E \times M$*, vínculos cinemáticos,*
* *Subfibrado* $\mathcal{D} \subset TE$*, vínculos variacionales,*
* $\mathcal{P}$ *una aplicación que determina una relación encadenada entre las variaciones.*

Algunos sistemas de Lagrange D'Alembert Poincaré discretos

- Sistemas mecánicos discretos con vínculos no holónomos.
- El sistema reducido obtenido anteriormente.

Dinámica de los sistemas de Lagrange D'Alembert Poincaré discretos

La acción discreta está dada por $S_d\left(\epsilon_\cdot, m_\cdot\right) := \sum_{k=0}^{N-1} L_d\left(\epsilon_k, m_{k+1}\right)$

Dinámica de los sistemas de Lagrange D'Alembert Poincaré discretos

La acción discreta está dada por $S_d(\epsilon_{\cdot}, m_{\cdot}) := \sum_{k=0}^{N-1} L_d(\epsilon_k, m_{k+1})$

Una variación infinitesimal a extremos fijos $(\delta\epsilon_{\cdot}, \delta m_{\cdot})$ satisface

$$\delta m_N = 0 \qquad \text{y} \qquad \delta m_k = d\phi(\epsilon_k)(\delta\epsilon_k) \text{ con } k = 1, \ldots, N-1$$

$$\delta\epsilon_0 = \mathcal{P}((\epsilon_0, m_1), (\epsilon_1, m_2))\left(\widetilde{\delta\epsilon_1}\right) \qquad \text{y} \qquad \delta\epsilon_{N-1} = \widetilde{\delta\epsilon_{N-1}}$$

$$\delta\epsilon_k = \widetilde{\delta\epsilon_k} + \mathcal{P}((\epsilon_k, m_{k+1}), (\epsilon_{k+1}, m_{k+2}))\left(\widetilde{\delta\epsilon_{k+1}}\right) \text{ si } k = 1, \ldots, N-2$$

donde $\widetilde{\delta\epsilon_k} \in \mathcal{D}_{\epsilon_k} \subset T_{\epsilon_k}E$ es arbitrario para $k = 1, \ldots, N-1$.

Dinámica de los sistemas de Lagrange D'Alembert Poincaré discretos

La acción discreta está dada por $S_d(\epsilon_\cdot, m_\cdot) := \sum_{k=0}^{N-1} L_d(\epsilon_k, m_{k+1})$

Una variación infinitesimal a extremos fijos $(\delta\epsilon_\cdot, \delta m_\cdot)$ satisface

$$\delta m_N = 0 \qquad \text{y} \qquad \delta m_k = d\phi(\epsilon_k)(\delta\epsilon_k) \ \text{ con } k = 1, ..., N-1$$

$$\delta\epsilon_0 = \mathcal{P}((\epsilon_0, m_1), (\epsilon_1, m_2)) \left(\widetilde{\delta\epsilon_1}\right) \qquad \text{y} \qquad \delta\epsilon_{N-1} = \widetilde{\delta\epsilon_{N-1}}$$

$$\delta\epsilon_k = \widetilde{\delta\epsilon_k} + \mathcal{P}((\epsilon_k, m_{k+1}), (\epsilon_{k+1}, m_{k+2})) \left(\widetilde{\delta\epsilon_{k+1}}\right) \ \text{ si } k = 1, ..., N-2$$

donde $\widetilde{\delta\epsilon_k} \in \mathcal{D}_{\epsilon_k} \subset T_{\epsilon_k}E$ es arbitrario para $k = 1, ..., N-1$.

Las trayectorias del sistema satisfacen

$$\begin{cases} (\epsilon_k, m_{k+1}) \in \mathcal{D}_d \\ \\ dS_d(\epsilon_\cdot, m_\cdot)(\delta\epsilon_\cdot, \delta m_\cdot) = 0 \end{cases}$$

para toda variación infinitesimal $(\delta\epsilon_\cdot, \delta m_\cdot)$ a extremos fijos.

Sistemas de Lagrange D'Alembert Poincaré discretos con simetría

Definición

Un grupo de Lie G es un ***grupo de simetría*** *de* $\mathcal{M} = (E, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}, \mathcal{P})$ *si*

1. *G actúa sobre* $\phi : E \to M$,
2. L_d, $\mathcal{D}_d$ *y* $\mathcal{D}$ *son G-invariantes por las acciones correspondientes,*
3. $\mathcal{P}$ *es G-equivariante.*

Sistemas de Lagrange D'Alembert Poincaré discretos con simetría

Definición

Un grupo de Lie G es un ***grupo de simetría*** *de* $\mathcal{M} = (E, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}, \mathcal{P})$ *si*

1. *G actúa sobre* $\phi : E \to M$,
2. L_d, $\mathcal{D}_d$ *y* $\mathcal{D}$ *son G-invariantes por las acciones correspondientes,*
3. $\mathcal{P}$ *es G-equivariante.*

Considerando esta simetría obtenemos

$$\begin{tikzcd}
E \times M \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] \arrow[dr, "\Gamma"] & E \times G \times M/G \arrow[d] \\
(E \times M)/G \arrow[r] & \tilde{G}_E \times M/G
\end{tikzcd}$$

El sistema reducido $\hat{\mathcal{M}} = \left(\tilde{G}_E, \hat{L}_d, \hat{\mathcal{D}}_d, \hat{\mathcal{D}}, \hat{\mathcal{P}}\right)$ está determinado por,

* $p^{M/G} : \tilde{G}_E := (E \times G) / G \to M/G$ espacio fibrado,
* Función diferenciable $\hat{L}_d : \tilde{G}_E \times M/G \to \mathbb{R}$,
* Subvariedad $\hat{\mathcal{D}}_d := \Gamma(\mathcal{D}_d) \subset \tilde{G}_E \times M/G$, vínculos cinemáticos,
* Subfibrado $\hat{\mathcal{D}} := D_1 (p_1 \circ \Gamma)(\mathcal{D}) \subset T\tilde{G}_E$, vínculos variacionales,
* Una aplicación que determina una relación encadenada entre las variaciones es

  $\hat{\mathcal{P}}\left((v_0, r_1), (v_1, r_2)\right)(\delta v_1) =$
  $d(p_1 \circ \Gamma)(\epsilon_0, m_1)\left(\mathcal{P}\left((\epsilon_0, m_1), (\epsilon_1, m_2)\right)(\delta\epsilon_1), dp^{M/G}(\epsilon_1)(\delta\epsilon_1)\right)$

  donde $\delta\epsilon_1 \in \mathcal{D}_{\epsilon_1}$.

Sean G un grupo de simetría de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{A}_d$ una conexión discreta afín sobre $\pi^{M,G} : M \to M/G$.

Para el camino discreto $(\epsilon_\cdot, m_\cdot)$ en $E \times M$ definimos un camino discreto $(v_\cdot, r_\cdot)$ en $\tilde{G}_E \times M/G$ como $(v_k, r_{k+1}) := \Gamma(\epsilon_k, m_{k+1})$. Luego, son equivalentes,

1. $(\epsilon_\cdot, m_\cdot)$ *es una trayectoria del sistema* $\mathcal{M} = (E, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}, \mathcal{P})$.

Sean G un grupo de simetría de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{A}_d$ una conexión discreta afín sobre $\pi^{M,G}: M \to M/G$.

Para el camino discreto $(\epsilon_., m_.)$ en $E \times M$ definimos un camino discreto $(v_., r_.)$ en $\tilde{G}_E \times M/G$ como $(v_k, r_{k+1}) := \Gamma(\epsilon_k, m_{k+1})$. Luego, son equivalentes,

1. $(\epsilon_., m_.)$ *es una trayectoria del sistema* $\mathcal{M} = (E, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}, \mathcal{P})$.
2. *Para todo* $k = 0, ..., N-1$, $(\epsilon_k, m_{k+1}) \in \mathcal{D}_d$ *y*

$$D_1 L_d(\epsilon_k, m_{k+1}) + D_1 L_d(\epsilon_{k-1}, m_k) \circ \mathcal{P}((\epsilon_{k-1}, m_k), (\epsilon_k, m_{k+1})) \\ + D_2 L_d(\epsilon_{k-1}, m_k) \circ d\phi(\epsilon_k) = 0$$

   para variaciones $\delta\epsilon_k \in \mathcal{D}_{\epsilon_k}$.

Sistemas de Lagrange D'Alembert Poincaré discretos con simetría

Teorema de Reducción

Sean G un grupo de simetría de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{A}_d$ una conexión discreta afín sobre $\pi^{M,G} : M \to M/G$.

Para el camino discreto $(\epsilon_\cdot, m_\cdot)$ en $E \times M$ definimos un camino discreto $(v_\cdot, r_\cdot)$ en $\tilde{G}_E \times M/G$ como $(v_k, r_{k+1}) := \Gamma(\epsilon_k, m_{k+1})$. Luego, son equivalentes,

1. $(\epsilon_\cdot, m_\cdot)$ *es una trayectoria del sistema* $\mathcal{M} = (E, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}, \mathcal{P})$.
2. *Para todo* $k = 0, \ldots, N-1$, $(\epsilon_k, m_{k+1}) \in \mathcal{D}_d$ *y*

$$D_1 L_d(\epsilon_k, m_{k+1}) + D_1 L_d(\epsilon_{k-1}, m_k) \circ \mathcal{P}((\epsilon_{k-1}, m_k), (\epsilon_k, m_{k+1})) + D_2 L_d(\epsilon_{k-1}, m_k) \circ d\phi(\epsilon_k) = 0$$

   para variaciones $\delta\epsilon_k \in \mathcal{D}_{\epsilon_k}$.
3. $(v_\cdot, r_\cdot)$ *es una trayectoria del sistema* $\hat{\mathcal{M}} = (\tilde{G}_E, \hat{L}_d, \hat{\mathcal{D}}_d, \hat{\mathcal{D}}, \hat{\mathcal{P}})$.

Sistemas de Lagrange D'Alembert Poincaré discretos con simetría

Sean G un grupo de simetría de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{A}_d$ una conexión discreta afín sobre $\pi^{M,G} : M \to M/G$.

Para el camino discreto $(\epsilon_{\cdot}, m_{\cdot})$ en $E \times M$ definimos un camino discreto $(v_{\cdot}, r_{\cdot})$ en $\tilde{G}_E \times M/G$ como $(v_k, r_{k+1}) := \Gamma(\epsilon_k, m_{k+1})$. Luego, son equivalentes,

1. $(\epsilon_{\cdot}, m_{\cdot})$ *es una trayectoria del sistema* $\mathcal{M} = (E, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}, \mathcal{P})$.
2. *Para todo* $k = 0, \ldots, N-1$, $(\epsilon_k, m_{k+1}) \in \mathcal{D}_d$ *y*
$$D_1 L_d(\epsilon_k, m_{k+1}) + D_1 L_d(\epsilon_{k-1}, m_k) \circ \mathcal{P}((\epsilon_{k-1}, m_k), (\epsilon_k, m_{k+1})) + D_2 L_d(\epsilon_{k-1}, m_k) \circ d\phi(\epsilon_k) = 0$$
para variaciones $\delta\epsilon_k \in \mathcal{D}_{\epsilon_k}$.
3. $(v_{\cdot}, r_{\cdot})$ *es una trayectoria del sistema* $\hat{\mathcal{M}} = (\tilde{G}_E, \hat{L}_d, \hat{\mathcal{D}}_d, \hat{\mathcal{D}}, \hat{\mathcal{P}})$.
4. *Para todo* $k = 0, \ldots, N-1$, $(v_k, r_{k+1}) \in \hat{\mathcal{D}}_d$ *y*
$$D_1 \hat{L}_d(v_k, r_{k+1}) + D_1 \hat{L}_d(v_{k-1}, r_k) \circ \hat{\mathcal{P}}((v_{k-1}, r_k), (v_k, r_{k+1})) + D_2 \hat{L}_d(v_{k-1}, r_k)\, dp^{M/G}(v_k) = 0$$
para variaciones $\delta v_k \in \hat{\mathcal{D}}_{v_k}$.

Lema

Sea G un grupo de Lie que actúa sobre el fibrado (E, M, ϕ, F) y $H \subset G$ un subgrupo normal cerrado. Se definen las aplicaciones

$$l^{\tilde{H}_E}_{\pi^{G,H}(g)}\left(\pi^{E\times H,H}(\epsilon, w)\right) := \pi^{E\times H,H}\left(l^E_g(\epsilon), l^G_g(w)\right)$$

$$l^{M/H}_{\pi^{G,H}(g)}\left(\pi^{M,H}(m)\right) := \pi^{M,H}\left(l^M_g(m)\right).$$

Luego $l^{\tilde{H}_E}$, $l^{M/H}$ y la acción a derecha trivial sobre $F \times H$ definen una acción de G/H sobre el espacio fibrado $\left(\tilde{H}, M/H, p^{M/H}, F \times H\right)$, donde $p^{M/H} : \tilde{H} \to M/H$.

Lema

Sea G un grupo de Lie que actúa sobre M por la acción l^M de modo que $\pi^{M,G} : M \to M/G$ es un fibrado principal.
Sean $H \subset G$ un subgrupo normal cerrado y $\mathcal{A}_d^H$ es una conexión discreta afín sobre $\pi^{M,H} : M \to M/H$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes,

1. *Para cada $g \in G$ y $(m_0, m_1) \in \mathrm{Dom}\left(\mathcal{A}_d^H\right)$,*
$$\mathcal{A}_d^H\left(l_g^M(m_0), l_g^M(m_1)\right) = g\mathcal{A}_d^H(m_0, m_1)\, g^{-1}.$$
2. *La subvariedad $\mathrm{Hor}_{\mathcal{A}_d^H} \subset M \times M$ es G-invariante por la acción $l^{M\times M}$.*

Proposición

Sea G un grupo de simetría de $\mathcal{M} = (E, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}, \mathcal{P})$ y $H \subset G$ un subgrupo normal cerrado. Se elige una conexión $\mathcal{A}_d^H$ del fibrado principal $\pi^{E,H} : M \to M/H$ de modo tal que se cumpla alguna de las condiciones del Lema anterior. Entonces, G/H es un grupo de simetría de $\hat{\mathcal{M}} = (\tilde{H}_E, \hat{L}_d, \hat{\mathcal{D}}_d, \hat{\mathcal{D}}, \hat{\mathcal{P}})$ obtenido por la reducción de $\mathcal{M}$ usando $\mathcal{A}_d^H$.

Simetría residual

Proposición

Sea G un grupo de simetría de $\mathcal{M} = (E, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}, \mathcal{P})$ y $H \subset G$ un subgrupo normal cerrado. Se elige una conexión $\mathcal{A}_d^H$ del fibrado principal $\pi^{E,H} : M \to M/H$ de modo tal que se cumpla alguna de las condiciones del Lema anterior. Entonces, G/H es un grupo de simetría de $\hat{\mathcal{M}} = \left(\tilde{H}_E, \hat{L}_d, \hat{\mathcal{D}}_d, \hat{\mathcal{D}}, \hat{\mathcal{P}}\right)$ obtenido por la reducción de $\mathcal{M}$ usando $\mathcal{A}_d^H$.

En estas condiciones es posible realizar un segundo proceso de reducción.

Simetría residual

Proposición

Sea G un grupo de simetría de $\mathcal{M} = (E, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}, \mathcal{P})$ y $H \subset G$ un subgrupo normal cerrado. Se elige una conexión $\mathcal{A}_d^H$ del fibrado principal $\pi^{E,H} : M \to M/H$ de modo tal que se cumpla alguna de las condiciones del Lema anterior. Entonces, G/H es un grupo de simetría de $\hat{\mathcal{M}} = (\tilde{H}_E, \hat{L}_d, \hat{\mathcal{D}}_d, \hat{\mathcal{D}}, \hat{\mathcal{P}})$ obtenido por la reducción de $\mathcal{M}$ usando $\mathcal{A}_d^H$.

En estas condiciones es posible realizar un segundo proceso de reducción.

En desarrollo

* Estudiar la equivalencia entre los dos procesos de reducción.
* Formulación categórica de la reducción en etapas.

Bibliografía

Cendra, Marsden, Ratiu. *Lagrangian reduction by stages*. Mem. Amer. Math. Soc.152 (2001).

Cendra, Marsden, Ratiu. *Geometric mechanics, Lagrangian reduction, and nonholonomic systems*. Mathematics unlimited-2001 and beyond, Springer, 2001.

Cendra, Díaz. *Lagrange-d'Alembert-Poincaré equations by several stages*, arXiv:1406.7271, 2014.

Fernández, Tori, Zuccalli. *Lagrangian reduction of discrete mechanical systems by stages*. Journal of Geometric Mechanics, 8 (2016).

Fernández, Tori, Zuccalli. *Lagrangian reduction of nonholonomic discrete mechanical systems*. Journal of Geometric Mechanics, 2 (2010).