

Hacia la detección de chirps en señales de electroencefalogramas (EEG) (II)

Eduardo P. Serrano ^{a,c}, Ricardo Sirne ^b, Marcela A. Fabio ^a
y Mariel Rosenblatt ^a

^a Centro de Matemática Aplicada - UNSAM

^b Facultad de Ingeniería - Universidad de Buenos Aires

^c Escuela Superior Técnica -FE-UNDEF

UMA 2016 - Bahía Blanca (ARG)

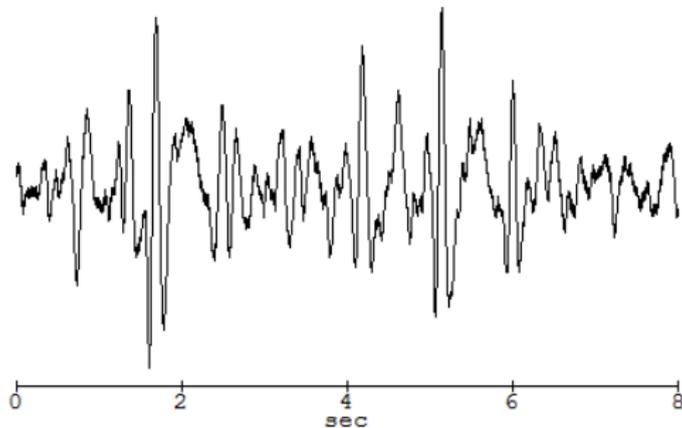
Índice

- 1 **Introducción**
- 2 **Chirps**
- 3 **Hacia la metodología de análisis**
- 4 **Grilla de localización**
- 5 **Detección de chirps**

UMA 2015

Existen evidencias experimentales de la presencia de rápidas variaciones de frecuencia o *chirps*, o de complejas estructuras oscilantes en las señales de EEG en períodos previos a las crisis epilépticas (electrodos profundos). La caracterización de tales fenómenos pueden constituir un promisorio método de análisis, y predicción de crisis.

Señal EEG's: contiene un chirp?



- Cómo verificar estas conjeturas?
 - Cómo detectar y caracterizar las estructuras oscilantes?
 - Qué es un *chirp* ?
-
- No existe una definición precisa, pero sí nociones empíricas, algunos conceptos y criterios analíticos.
 - Desde este punto de vista, un chirp consiste en un especial *fenómeno oscilante* caracterizado por rápidas variaciones de frecuencia, presente en una señal.
 - Bajo este concepto se incluyen una amplia y compleja variedad de estructuras tiempo-frecuencia y de muy diferentes modelos matemáticos de representación.

Modelo matemático simple de chirp

- Un modelo matemático relativamente simple de un chirp

$$y(x) = A(x) \cos(\phi(x))$$

siendo $A(x) \geq 0$ la amplitud y $\phi(x)$ la fase.

- La amplitud es una función continua, de variación lenta respecto de la fase.
- Puede ser suave o presentar irregularidades puntuales.
- La fase es monótona, pudiendo ser acotada o no.

La *estructura del chirp* resulta de la combinación de los respectivos comportamientos.

- Este modelo es efectivo cuando la noción de *frecuencia instantánea*, esto es $\omega(x) = |\phi'(x)|$, puede ser bien caracterizada como una curva suave y monótona en un rectángulo $X \times \Omega$ del dominio tiempo-frecuencia.
- En tal caso, puede hablarse de un *espectro local* sobre un intervalo $X = [x_a, x_b]$, variando en un rango de frecuencias $\omega(x) \in \Omega$ y de un *chirp simple* en ese dominio.
- Sin embargo no es trivial detectar o segregar chirps simples en una señal donde conviven complejas estructuras.
- En este caso, es posible que las estructuras oscilantes se interfieran y desnaturalicen.

- El modelo de una señal como superposición de varios chirps simples, sin interferencia significativa, puede plantearse:

$$y(x) = \sum_{n=1}^N A_n(x) \cos(\phi_n(x)) + r(x)$$

siendo $r(x)$ un residuo sin estructura y suponiendo que las componentes están localizadas en dominios $X_n \times \Omega_n$ disjuntos.

- Entonces sería posible detectar las respectivas amplitudes, frecuencias y dominios.
- Sin embargo, observemos, el modelo puede no ser unívoco ya que, la sumas de chirps simples podría ser otro chirp simple, con un dominio más amplio en tiempo o en frecuencia.

Dos ejemplos clásicos de chirps simples

Chirps cuadráticos

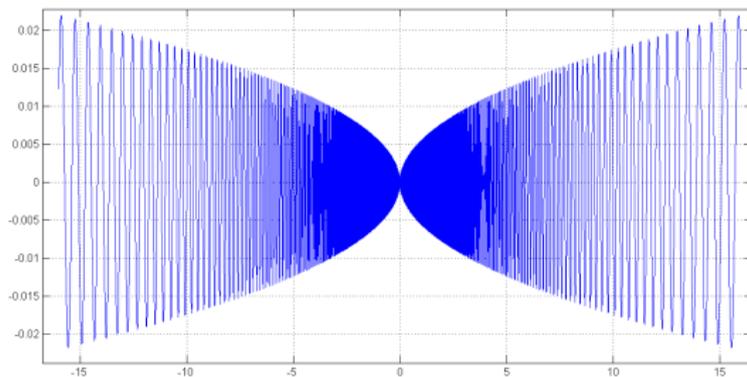
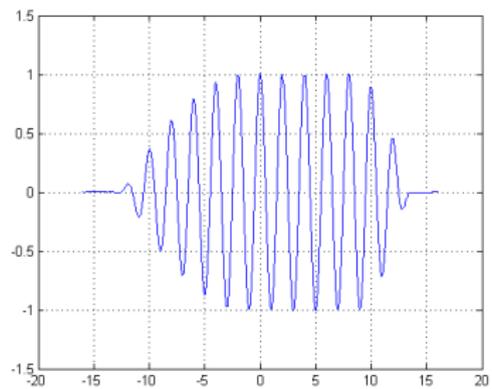
$$y_c(x) = v(x) \left(\frac{\beta}{2}(x - x_0)^2 + \alpha(x - x_0) \right), \quad \beta \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}_{>0}$$

La amplitud $v(x)$ es suave y de soporte efectivo acotado. En este caso la frecuencia instantánea es $\omega(x) = |\beta(x - x_0) + \alpha|$.

Chirps hiperbólicos

$$y_h(x) = |x - x_0|^\gamma \sin(\omega_0|x - x_0|^{-\beta}), \quad \gamma \in (0, 1), \beta \in \mathbb{R}_{>0}$$

con $|x - x_0| < 1$. La amplitud es continua y no diferenciable en x_0 . La frecuencia instantánea es la curva hiperbólica, no acotada, $w(x) = \beta\omega_0|x - x_0|^{-(1+\beta)}$



- El método de análisis de la señal define la estructura de la descomposición y qué clase chirps serán, eventualmente, caracterizados.

Métodos de detección posibles:

- Transformadas integrales (Gabor, wavelet, Wigner-Ville, chirplet, Hilbert-Huang, Lamberti...).
- Descomposiciones atómicas en marcos o bases (DFT, chirplets, modales intrínsecas, wavelets, bases de Malvar-Wilson...)
- Especiales y novedosas técnicas tiempo-frecuencia (métodos de reasignamiento...)

- El análisis 2-microlocal posibilita la caracterización de chips asociados a singularidades puntuales en x_0 , como es el caso de los chips del tipo hiperbólicos, a partir de los coeficientes wavelet de la señal.

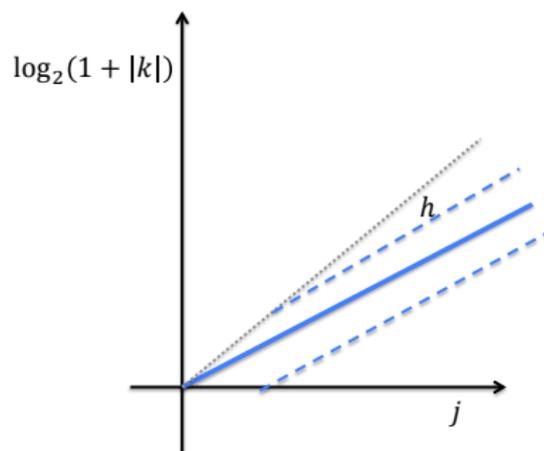
Resultado teoría 2-microlocal

Si los índices (j, k) de los coeficientes wavelet $\langle y, \psi_{jk} \rangle$ significativos están esencialmente localizados en un cono entorno de un punto x_0 , para $0 < h < 1$, $\lambda > 1$;

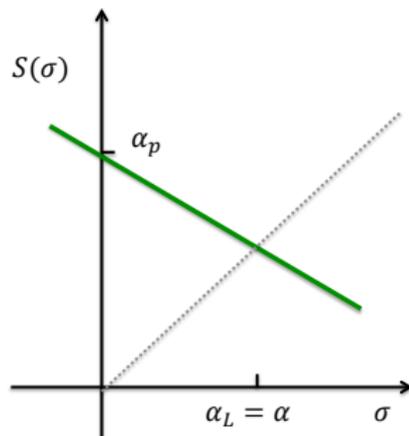
$$\mathbb{K}_j(x_0, \lambda) = \left\{ \frac{1}{\lambda} 2^{jh} \leq 1 + |k - 2^j x_0| \leq \lambda 2^{jh} \right\}$$

$y \mid \langle y, \psi_{jk} \rangle \mid \sim 2^{-j(\alpha+1/2)}$ en ese cono con $\alpha > 0$, la función $g(x) = \sum_{(j,k) \in \mathbb{K}_j(\lambda)} \langle y, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk}(x)$ es un chirp singular en x_0 , cuya estructura oscilante se caracteriza por los parámetros

$$\begin{cases} \gamma &= \frac{\alpha}{1-h} \\ \beta &= \frac{h}{1-h} \end{cases}$$



$$c_{jk} \sim 2^{-j\alpha}$$



Chirp hiperbólico

- El chirp hiperbólico

$$y_h(x) = |x - x_0|^\gamma \sin(\omega_0 |x - x_0|^{-\beta}), \quad \gamma \in (0, 1), \quad \beta \in \mathbb{R}_{>0}$$

está incluido en esta clase.

- Observemos que este caso en la amplitud y la singularidad en x_0 están definidas por γ pero la frecuencia instantánea sólo depende de h .

Más precisamente, es una hipérbola de la forma

$$\omega(x) \sim |x - x_0|^{1/(h-1)}.$$

Esta observaciones sugieren una metodología de análisis de los coeficientes wavelet.

- El par $(\psi_{jk}(x), \hat{\psi}_{jk}(\omega))$ está localizado en el cubo

$$I_{jk} \times \Omega_j = ([k, k + 1]2^{-j}, [2^j\pi, 2^{j+1}\pi]) \sim (2^{-j}, 2^j)$$

en el espacio de fases.

- Los valores

$$| \langle \mathbf{s}, \psi_{jk} \rangle | = \frac{1}{2\pi} | \langle \hat{\mathbf{s}}, \hat{\psi}_{jk} \rangle |$$

dan la medida de localización de la señal s en el cubo.

- Observando que $I_{jk} = I_{(j+1)(2k)} \cup I_{(j+1)(2k+1)}$ para $m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, dados (j, k) construimos:

$$(2m + 1)I_{jk} = I_{j(k-m)} \cup \dots \cup I_{j(k+m)}$$

- Ahora, dados $0 < J_0 \leq j \leq J_1$, k_0 y m , definimos el sub-cubrimiento

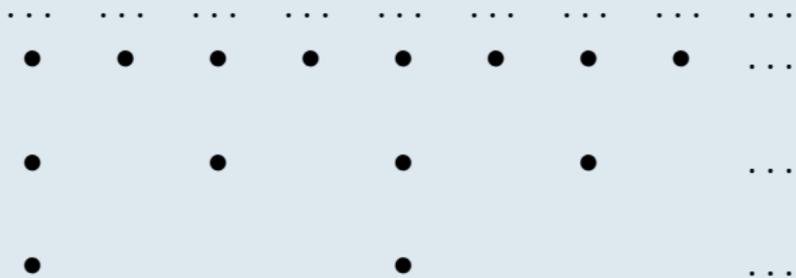
$$Q_{J_0, J_1, k_0, m} = \bigcup_{J_0 \leq j \leq J_1} (2m + 1)I_{jk_0} \times \Omega_j$$

- La grilla asociada

$$\{(2^{-j}(k_0 + m_i), 2^j), J_0 \leq j \leq J_1, -m \leq m_i \leq m\}$$

permite localizar los valores $|\langle \mathbf{s}, \psi_{jk} \rangle|$ en ese cubo ampliado del espacio de fases y analizar en consecuencia.

Grilla de localización

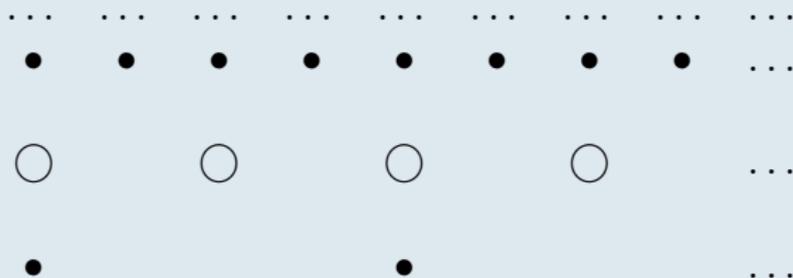


- Supongamos contar con un cubo $Q_{J_0, J_1, k_0, m}$ y con coeficientes $|\langle \mathbf{s}, \psi_{jk} \rangle|$ localizados en él.
- Consideramos los máximos por nivel su localización en el cubo

$$\mu_j = \max |\langle \mathbf{s}, \psi_{jk} \rangle| = |\langle \mathbf{s}, \psi_{jk(\mu_j)} \rangle|$$

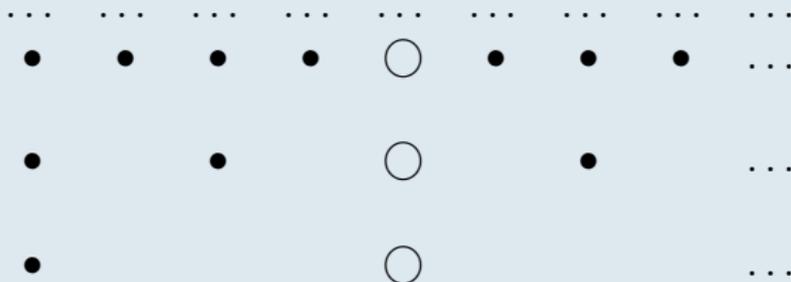
- Ésto define trazas en la grilla de localización, asociada a los máximos.
- Éstas posibilitan caracterizar, eventualmente, estructuras oscilantes y chirps.

Estructura horizontal



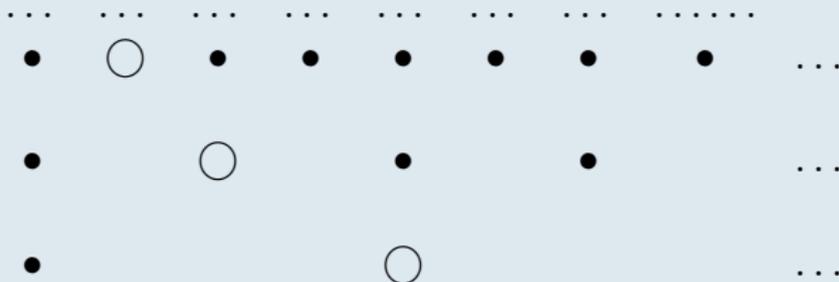
En este caso la componente está localizada en una única octava Ω_j

Estructura vertical



En este caso no se detecta oscilación.

Estructura oblicua en grilla de localización



En este caso la componente es oscilante.

Detección de chirps

- Cuando los máximos μ_j son únicos, significativos y dominantes en cada nivel j del cubo, y por tanto correspondientes a únicos $\kappa_j = k(\mu_j)$, consideramos la traza

$$j \longrightarrow (2^{-j}\kappa_j, 2^j)$$

- Ajustando una función $\omega = \varphi(x)$ tal que

$$\varphi(2^{-j}\kappa_j) \sim 2^j$$

se detectará un chirp localizado en en el cubo $Q_{J_0, J_1, k_0, m}$ cuando φ es estrictamente monótona.

Ejemplo: Chirps hiperbólicos

- Supongamos que $x_0 \simeq 2^{j_0} k_0$ y tomamos un cubo donde se cumplen las hipótesis y

$$1 + |\kappa_j - 2^j x_0| \sim 2^{jh} \Leftrightarrow |2^{-j} \kappa_j - x_0| = \lambda_j 2^{j(h-1)}$$

con $0 < h < 1$ en el cubo $Q_{J_0, J_1, k_0, m}$.

- Haciendo

$$\varphi(x) = C(x) |x - x_0|^{\frac{1}{1-h}}$$

donde $C(x)$ es positiva y acotada, se tiene para $x = 2^{-j} \kappa_j$

$$\varphi(x) = C(x) |\lambda_j 2^{j(h-1)}|^{\frac{1}{1-h}} \sim 2^j$$

- Por tanto la estructura define un chirp cuya oscilación coincide con la del hiperbólico, en el cubo, con el parámetro: $\beta = \frac{h}{1-h}$

Ejemplo: Chirps cuadráticos

- Bajo las mismas hipótesis se puede comprobar ajustando mediante diferencias divididas que, si sucesivos argumentos κ_j verifican una relación

$$\kappa_{j+1} - 2\kappa_j \sim \frac{1}{\beta}$$

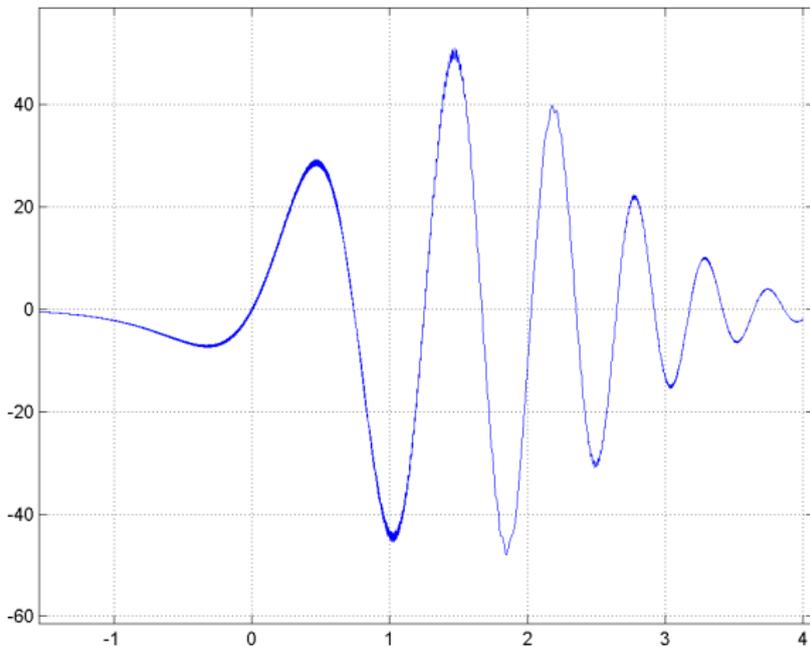
constante, se tiene localmete un chirp cuadrático donde β define la frecuencia instantánea.

Refinamiento

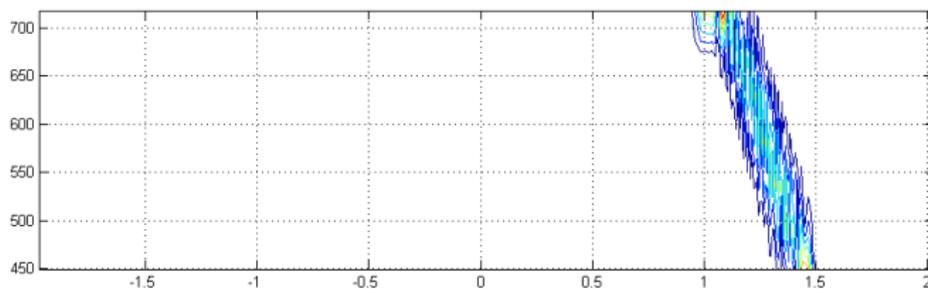
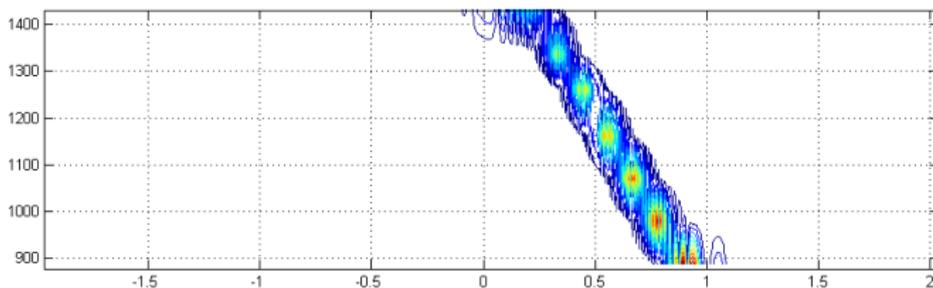
- Los cubos $Q_{J_0, J_1, k_0, m}$ y las grillas asociadas $\{(2^{-j}(k_0 + m_i), 2^j), J_0 \leq j \leq J_1, -m \leq m_i \leq m\}$ poseen óptima definición en tiempo, pero no en frecuencia.
- Por ejemplo, no es posible detectar chirps dentro de un espacio wavelet W_j , asociado a una banda Ω_j .
- Es posible empleando paquetes de wavelets o sub-wavelets refinar los cubos y grillas, con una estructura análoga, con mejor resolución en frecuencia, debilitando la resolución en el tiempo.

Ejemplo:

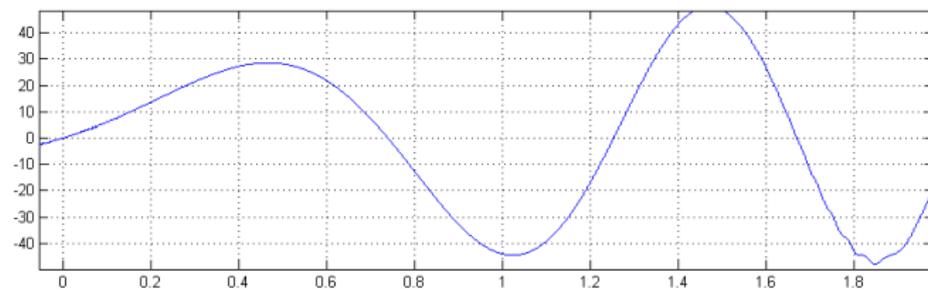
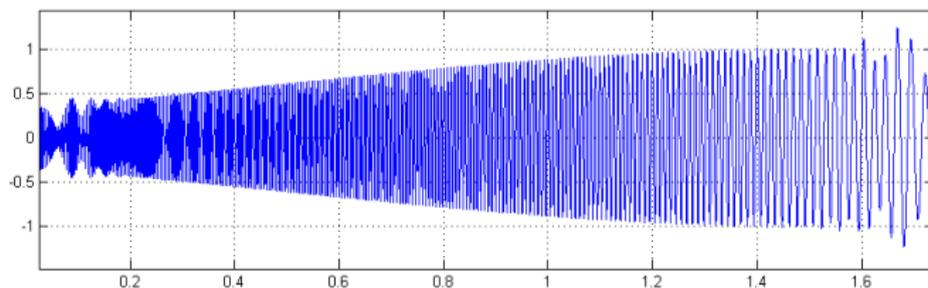
$$s(x) = e^{-(x-1.5)^2/2}(50 \sin(\pi x - 1.5x^2) + \cos(512\pi x - 128\pi x^2))$$



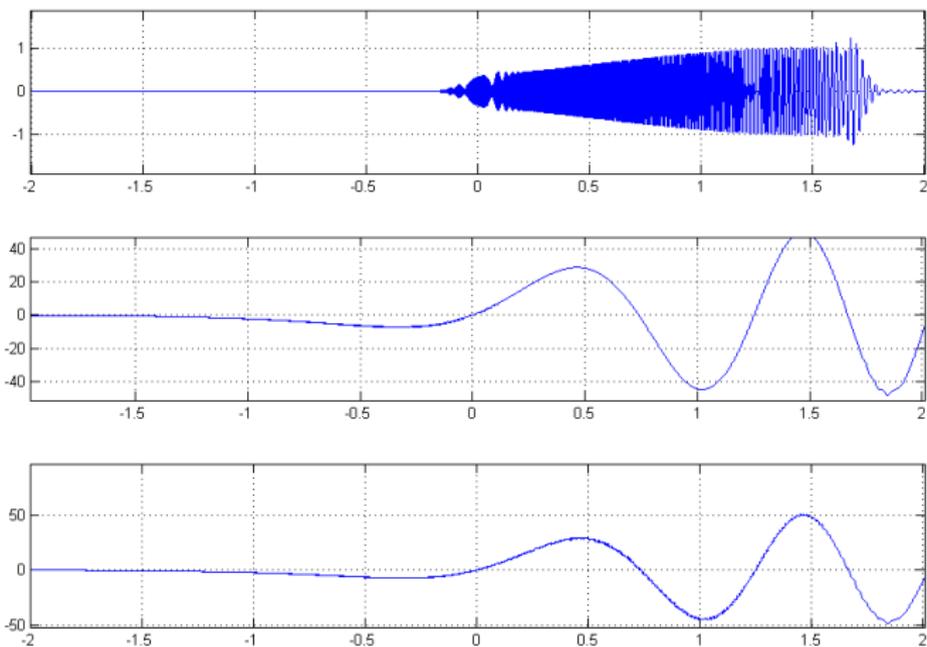
Representación tiempo-frecuencia niveles $j = 7, 8$



Reconstrucción de los niveles $j = 7, 8$



Reconstrucción y comparación



Gracias por su atención!!



A. Abry,



J. Benedetto,



D. Colella,



S. Jaffard,



Y. Meyer,



S. Mallat,



E. Serre,



L. Vehel,



and many others...