



Determinación de parámetros en un problema de transferencia de calor con evaporación

Sesión: Aplicaciones de la Matemática y Física Matemática

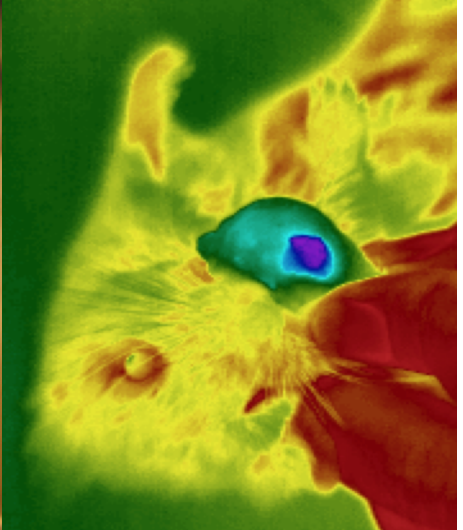
Natalia Nieves Salva - Claudio Padra - María Herrera
Gustavo Santa Cruz - Andrea Monti Hughes - Amanda Schwint



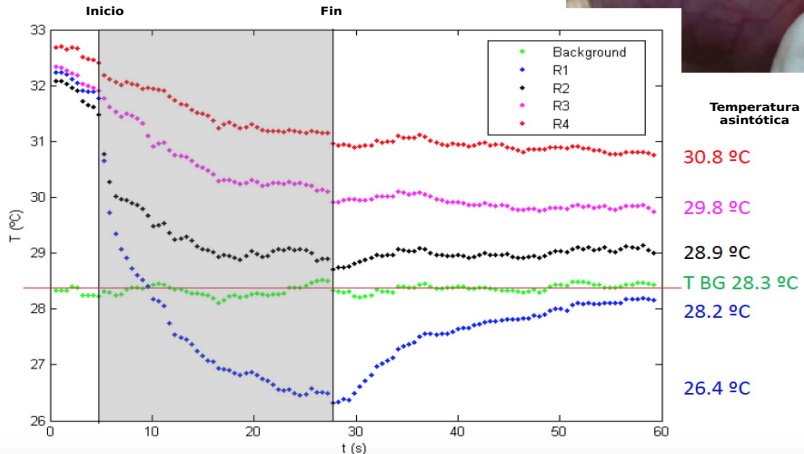
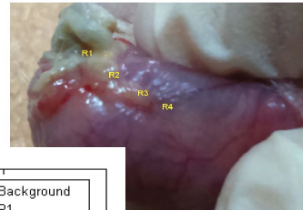
Contenidos

- 1 Motivación
- 2 Modelos matemáticos
- 3 Problema Inverso
- 4 Simulaciones Numéricas
- 5 Conclusiones
- 6 Trabajos a futuro

Motivación



Test de provocación



Modelos matemáticos

Modelo Matemático 1

Sea $T(x, t)$ la temperatura del tejido, $\Omega = [0, X]$, $\Gamma_b = \{0\}$ y $\Gamma_u = \{X\}$.

$$(P1) \begin{cases} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + W_s(x, t) \frac{\partial T}{\partial x} + \omega_b \rho_b c_b (T_b - T) + q_m & \text{en } \Omega \times [0, t_m] \\ -k \frac{\partial T}{\partial x} = W_s(x, t) T + h(T - T_{amb}), & \text{en } \Gamma_u \times [0, t_m] \\ T = T_D, & \text{en } \Gamma_b \times [0, t_m] \\ T(x, 0) = F_0(x) & \forall t \in [0, t_m] \end{cases}$$

- ρ : densidad
- c : calor específico
- k : conductividad térmica
- W_s : las velocidades del flujo relacionado con el sudor
- ω_b : coeficiente de perfusión
- T_b : temperatura cte de la sangre
- q_m : fuente de calor metabólica
- h : coef. de convección
- T_{amb} : temperatura ambiente
- T_D : temperatura de Dirichlet
- F_0 : temperatura inicial

Modelo Matemático 1 - Formulación Variacional

$$(PV1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } T \in V / \\ a_1(T, \eta) = l_1(\eta), \forall \eta \in V_0 \end{array} \right.$$

donde,

$$a_1(u, v) = \int_{\Omega \times [0, t_m]} \rho c u_t v + k u_x v_x + \omega_b \rho_b c_b u v + u W_s v_x + \int_{\Gamma_u \times [0, t_m]} h u v$$

$$l_1(v) = \int_{\Omega \times [0, t_m]} Q v + \int_{\Gamma_u \times [0, t_m]} h T_{amb} v$$

$$Q = \omega_b \rho_b c_b T_b + q_m.$$

Modelo Matemático 2

Sea $T(x, t)$ la temperatura del tejido, $\Omega = [0, X]$, $\Gamma_b = \{0\}$ y $\Gamma_u = \{X\}$.

$$(P1) \begin{cases} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \omega_b \rho_b c_b (T_b - T) + q_m & \text{en } \Omega \times [0, t_m] \\ -k \frac{\partial T}{\partial x} = L_s(t) + h(T - T_{amb}), & \text{en } \Gamma_u \times [0, t_m] \\ T = T_D, & \text{en } \Gamma_b \times [0, t_m] \\ T(x, 0) = F_0(x) & \forall t \in [0, t_m] \end{cases}$$

- ρ : densidad
- c : calor específico
- k : conductividad térmica
- L_s : evaporación
- ω_b : coeficiente de perfusión
- T_b : temperatura cte de la sangre
- q_m : fuente de calor metabólica
- h : coef. de convección
- T_{amb} : temperatura ambiente
- T_D : temperatura de Dirichlet
- F_0 : temperatura inicial

Modelo Matemático 2 - Formulación Variacional

$$(PV2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } T \in V / \\ a_2(T, \eta) = l_2(\eta), \forall \eta \in V_0 \end{array} \right.$$

donde,

$$a_2(u, v) = \int_{\Omega \times [0, t_m]} \rho c u_t v + k u_x v_x + \omega_b \rho_b c_b u v + \int_{\Gamma_u \times [0, t_m]} h u v$$

$$l_2(v) = \int_{\Omega \times [0, t_m]} Q v + \int_{\Gamma_u \times [0, t_m]} (h T_a - L_s) v$$

$$Q = \omega_b \rho_b c_b T_b + q_m.$$

Problema Inverso

Dada la medición de la temperatura superficial $T^*(t)$ se pretende obtener:

(P1)	(P2)
$W_s(x, t)$	$L_s(t)$

$$\begin{aligned} P &= \{T_i\}_{i=1..M} \text{ una triangulación de } \Omega \times [0, t_m] \\ V &= \{v \in H_1(\Omega \times [0, t_m]) / v|_T \in \mathcal{P}_1(T), \forall T \in P\} \text{ es espacio de FEM} \\ V_D &= \{v \in V / v = T_D, \text{ en } \Gamma_b \times [0, t_m] \wedge v = F_0 \text{ en } \Omega \times \{0\}\} \\ V_0 &= \{v \in V / v = 0, \text{ en } \Gamma_b \times [0, t_m] \wedge v = F_0 \text{ en } \Omega \times \{0\}\} \\ &\quad \{\eta_i\}_{i=1..N} \text{ la base de funciones de } V_0 \end{aligned}$$

$W_s = \sum_{i=1}^N \beta_k \eta_i$ $T \in V_D/a_1(T, \eta) = l_1(\eta), \forall \eta \in V_0$	$L_s = \sum_{i \in I} \beta_k \eta_i$ $T \in V_D/a_2(T, \eta) = l_2(\eta), \forall \eta \in V_0$
--	--

$$J(T) = \int_{\Gamma_u \times [0, t_m]} (T - T^*)^2$$

$\min_{T(W_s)} J(T)$	$\min_{T(L_s)} J(T)$
----------------------	----------------------

Para hallar el valor de los parámetros β_k , se plantea el siguiente problema de optimización:

Hallar $\{\beta_k\}$ que minimiza el funcional

$$j(\beta_k) = J(T(\beta_k)) = \int_{\Gamma_u \times [0, t_m]} (T(\beta_k) - T^*)^2 dx,$$

donde la función $T(\beta_k)$ es una solución de (PVi) utilizando el valor de β_k en la definición de W_s ó L_s .

Se utiliza el método del Lagrangeano aumentado para poder determinar la variación de j con respecto a β_k , y así obtener una dirección de descenso. Para ello se define la siguiente función:

$$\mathcal{L}_i(u, p, \beta_k) = J(u) + a_{i, \beta_k}(u, p) - l_i(p)$$

Se puede observar que si T es solución de (PVi) entonces

$\mathcal{L}_i(T(\beta_k), p(\beta_k), \beta_k) = J(T(\beta_k)) = j(\beta_k)$, luego sus derivadas son iguales.

Derivando con respecto a β_k , y aplicando la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{d\mathcal{L}_i(u, p, \beta_k)}{d\beta_k} = \frac{\delta\mathcal{L}_i(u, p, \beta_k)}{\delta\beta_k} + \left\langle \frac{\delta\mathcal{L}_i(u, p, \beta_k)}{\delta u}, \frac{\delta u}{\delta\beta_k} \right\rangle + \left\langle \frac{\delta\mathcal{L}_i(u, p, \beta_k)}{\delta p}, \frac{\delta p}{\delta\beta_k} \right\rangle$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_1(T, p, \beta_k)}{\delta\beta_k} = \int_{\Omega \times [0, t_m]} T \eta_k p_x \, dx dt$$

$$(PVAd1) \begin{cases} \text{Hallar } p \in V_0 / \\ a_{1, \beta_k}(v, p) = -2 \int_{\Gamma_u} (T(\beta_k) - T^*) v dx, \quad \forall v \in V_0 \end{cases}$$

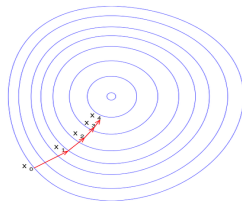
$$\frac{\delta\mathcal{L}_2(T, p, \beta_k)}{\delta\beta_k} = \int_{\Gamma_u \times [0, t_m]} \eta_k p \, dt$$

$$(PVAd2) \begin{cases} \text{Hallar } p \in V_0 / \\ a_{2, \beta_k}(v, p) = -2 \int_{\Gamma_u} (T(\beta_k) - T^*) v dx, \quad \forall v \in V_0 \end{cases}$$

Simulaciones Numéricas

Método del descenso rápido

Una función en varias variables $F(\mathbf{x})$ definida y diferenciable en un entorno de $\mathbf{a}$ decrece de forma más rápida si se mueve en dirección opuesta al gradiente de F en $\mathbf{a}$, $-\nabla F(\mathbf{a})$. Entonces para γ positivo suficientemente chico, $F(\mathbf{a}) \geq F(\mathbf{b})$, con $\mathbf{b} = \mathbf{a} - \gamma \nabla F(\mathbf{a})$.



A partir de un valor inicial $\mathbf{x}_0$, se obtiene una sucesión $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots\}$ con

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \gamma_n \nabla F(\mathbf{x}_n), \quad n \geq 0.$$

Luego $F(\mathbf{x}_0) \geq F(\mathbf{x}_1) \geq F(\mathbf{x}_2) \geq \dots$

La convergencia de $\{F(x_n)\}_n$ a un mínimo local está asegurada si F es convexa en el entorno de $\mathbf{x}_0$.

Aplicación

$$F \rightarrow J \rightarrow \mathcal{L}$$

$$\mathbf{x} \rightarrow W_s/V_s \rightarrow \{\beta_k\}_k$$

Elección de γ

Para cada n , se busca hallar el mayor $\gamma_n \geq 0$, de forma tal que minimice $F(\mathbf{x}_n - \gamma_n \nabla F(\mathbf{x}_n))$. Es decir,

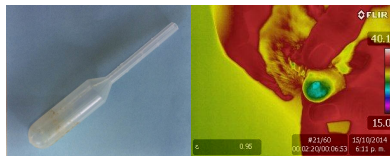
$$\gamma_n / \quad F(\mathbf{x}_n - \gamma_n \nabla F(\mathbf{x}_n)) = \min_{\gamma} F(\mathbf{x}_n - \gamma \nabla F(\mathbf{x}_n))$$

La evaluación de $F(\mathbf{x}_n)$ es costosa!!

Se utiliza un método que combina el de dicotomía y el de ajuste de parábola.

- Se comienza con un determinado γ .
- Se aumenta hasta llegar a un crecimiento de la función
 $G(\gamma) = F(\mathbf{x}_n - \gamma \nabla F(\mathbf{x}_n))$
- La función G se asume parabólica, y con 3 puntos se determina su mínimo (vértice de la parábola).

El experimento comienza anestesiando al hámster, al cual se le invierte la bolsa de la mejilla, exponiendo los tumores previamente inducidos. Se le coloca una pieza de plástico en la mejilla para sostenerla y para no interferir con las temperaturas medidas. Una vez en posición, se comienza la medición con la cámara termográfica.

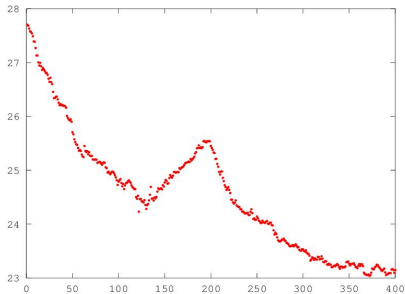


El experimento consta de 3 etapas:

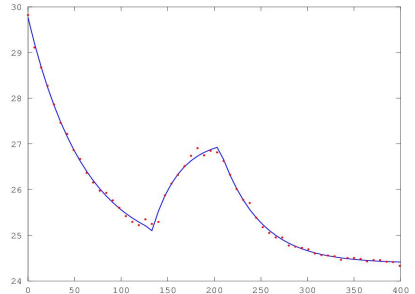
- 1 **Etapas de Adaptación (Pre):** En esta etapa se mide la temperatura, con una temperatura ambiente de T_s . Dura 120 segundos.
- 2 **Etapas de Aire (Aire):** Luego se le aplica aire, mediante un ventilador, que se encuentra a la misma temperatura ambiente. Dura 80 segundos.
- 3 **Etapas de Recuperación (Recu):** Por último se deja estabilizar a la misma temperatura ambiente T_s . Dura 200 segundos.

Datos Experimentales

Datos 1



Datos 2



Datos utilizados para las simulaciones numéricas

$$\Omega = [0; 0.0015] \text{ (m)} \quad t_m = 400 \text{ (seg)}$$

k (W/m °C)	ω_b (W/m ³ °C)	ρ (Kg/m ³)	ρ_b (Kg/m ³)	c (J/Kg °C)	c_b (J/Kg °C)
0,445	0.0002	1200	1060	3300	3770

	q_m (W/m ³)	T_{amb} °C	T_b °C	T_D °C	h_1 W/m ² °C	h_2 W/m ² °C	h_3 W/m ² °C
Datos 1	368.1	27	33	33	10	30	10
Datos 2	0	26.5	35	26.5	10	30	10

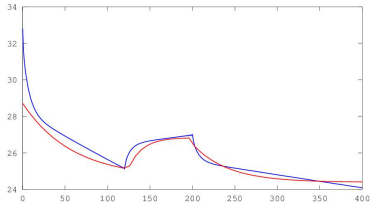
Datos 1

Datos 2

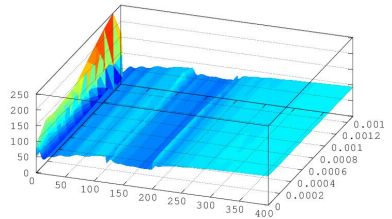
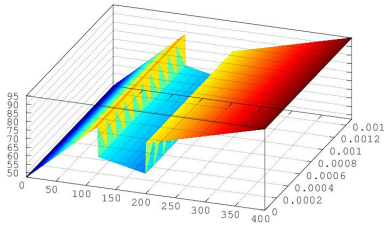
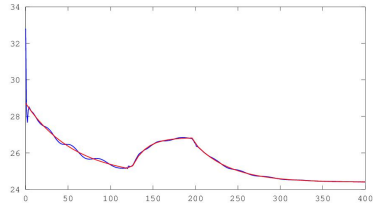
$$F_0(x) = \frac{(32.805 - T_D)}{0.0015}x + T_D \quad F_0(x) = \frac{(27.7 - T_D)}{0.0015}x + T_D$$

Resultados - Datos 1 - (P1)

Iteración Inicial

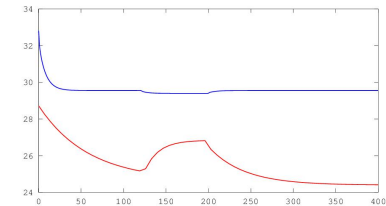


Iteración 30

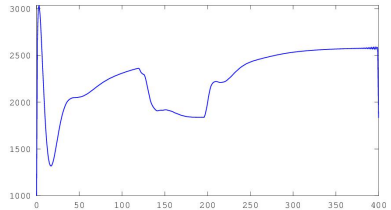
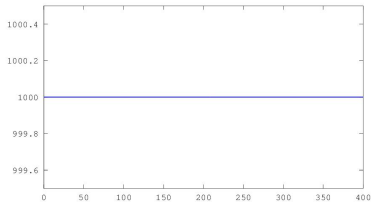
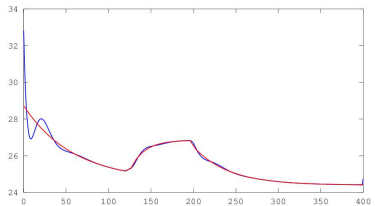


Resultados - Datos 1 - (P2)

Iteración Inicial

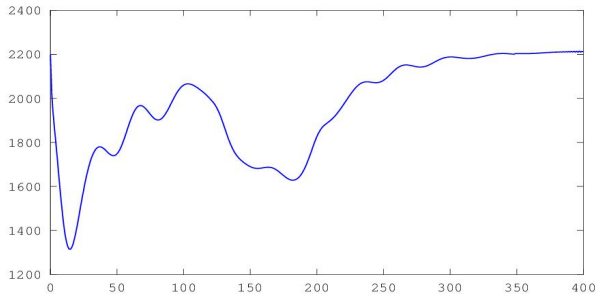


Iteración 15



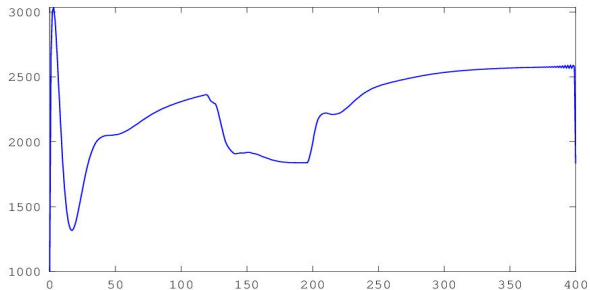
$W_s(x, t).T(x, t),$

$x \in \Gamma_u$



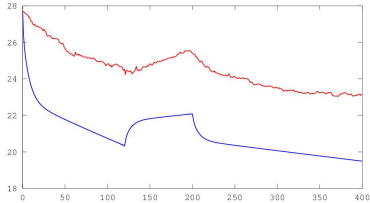
$L_s(x, t),$

$x \in \Gamma_u$

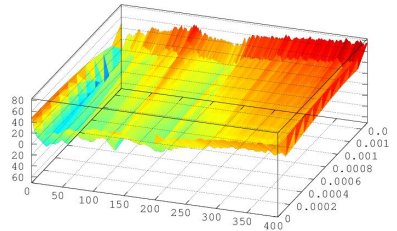
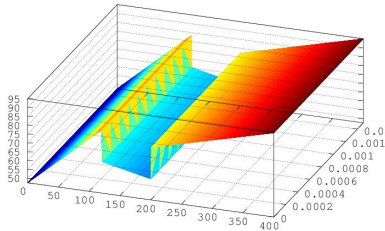
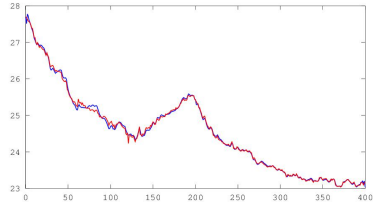


Resultados - Datos 2 - (P1)

Iteración Inicial

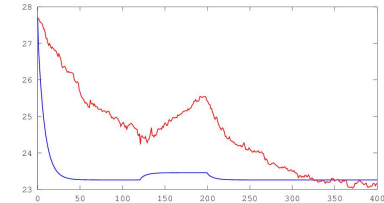


Iteración 30

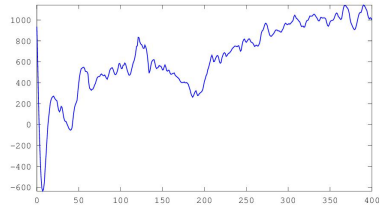
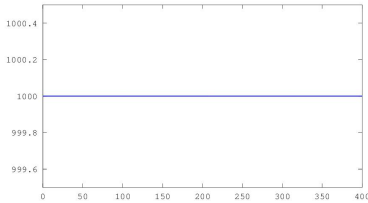
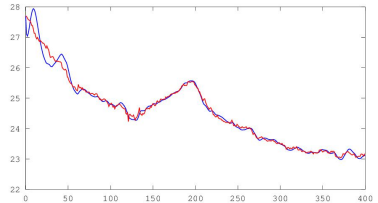


Resultados - Datos 2 - (P2)

Iteración Inicial

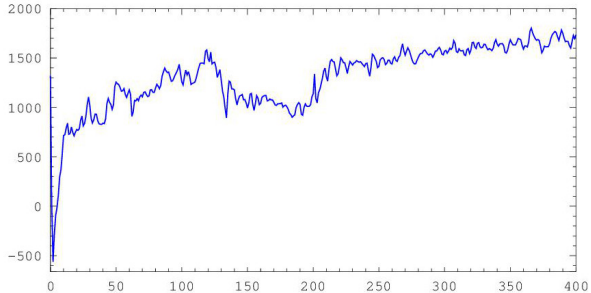


Iteración 15



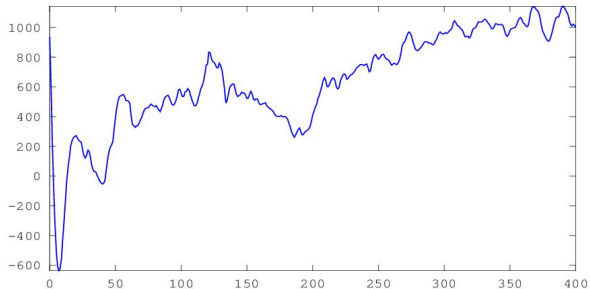
$$W_s(x, t).T(x, t),$$

$$x \in \Gamma_u$$



$$L_s(x, t),$$

$$x \in \Gamma_u$$



Conclusiones

Conclusiones

- ❶ En las etapas de pre y ecu, la evaporación o sudor aumentan, y en la etapa de aire se genera un súbito decrecimiento.
- ❷ Los valores obtenidos del sudor son más bajos ya que su acción involucra todo el tejido.
- ❸ Las oscilaciones que se generan en los primeros instantes de tiempo dependen de los valores iniciales tomados.
- ❹ Los valores tanto de la evaporación como del sudor se ven afectados por el ruido de las mediciones, ya que son los únicos parámetros con ruido.

Trabajos a futuro

Trabajos a futuro

- 1 Suavización de las oscilaciones.
- 2 Determinación simultánea de coeficientes térmicos.
- 3 Análisis de sensibilidad.
- 4 Determinación de evaporación en tumores, y análisis estadístico sobre diferencia con valores de tejidos sanos.

Fin.

Gracias por su atención!!!