

Modelo de dinámica y control de epidemia de dengue con información a gran escala.

Gabriel E. Moyano.
(FCEFyN - UNC - CONICET)
UMA 2016 - Bahía Blanca
22 de septiembre de 2016.

El problema a plantear

Deseamos plantear (y resolver) un problema para el control de un brote de Dengue.

El enfoque que elegimos para esto es,

- Proponer un problema de optimización que permita representar una estrategia de control por insecticida.
- Minimizar la cantidad de personas afectadas por la enfermedad.
- Minimizar la aplicación de insecticida en fumigaciones.

Datos que considera nuestro problema

- 1 Información de sensores de gran escala.

Datos que considera nuestro problema

- 1 Información de sensores de gran escala.
- 2 Parámetros meteorológicos y del terreno.

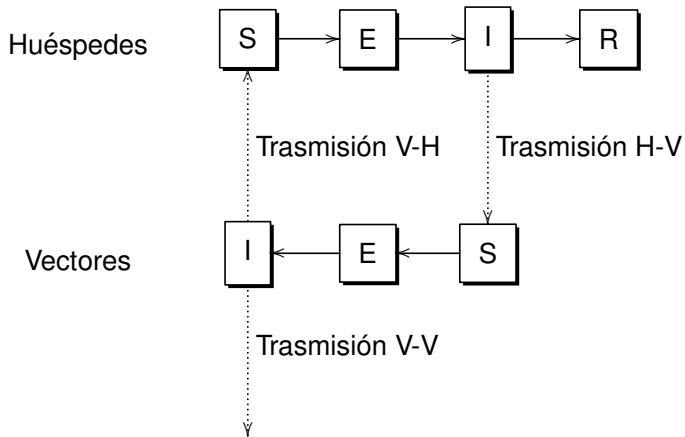
Datos que considera nuestro problema

- 1 Información de sensores de gran escala.
- 2 Parámetros meteorológicos y del terreno.
- 3 Datos sobre la biología del mosquito *Aedes Aegypti* y del virus del Dengue.

Datos que considera nuestro problema

- 1 Información de sensores de gran escala.
- 2 Parámetros meteorológicos y del terreno.
- 3 Datos sobre la biología del mosquito *Aedes Aegypti* y del virus del Dengue.
- 4 Estadísticas de los huéspedes.

Transmisión del virus



$$\frac{\partial v}{\partial t} = \operatorname{div} (D_R \nabla v) - \langle D_W W, \nabla v \rangle + \operatorname{div} (K v \nabla h) + \alpha - \beta, \quad (1)$$

para todo (x, t) en un dominio $\Omega \times (0, T]$ con condiciones de frontera e iniciales de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \eta} &= a v && \text{en } \Gamma \times (0, T], \\ v &= v_0 && \text{en } \Omega \times \{0\}, \end{aligned} \quad (2)$$

Nuestras consideraciones en el modelo de la dinámica de la enfermedad:

- 1 Las subpoblaciones de mosquitos están sujetas a la misma dinámica que la población total.
- 2 La población de humanos solo varía por las muertes ocasionadas por la enfermedad.
- 3 Los individuos de la población humana no tienen movimiento.
- 4 Los insectos infectados permanecen en esta clase hasta su muerte.
- 5 Los humanos infectados luego de un tiempo se recuperan y son inmunes a la enfermedad.

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_S}{\partial t} &= \operatorname{div}(D_R \nabla v_S) - \langle (D_W W), \nabla v_S \rangle + \operatorname{div}(K v_S \nabla h) + \alpha_S - \beta_S, \\ \frac{\partial v_E}{\partial t} &= \operatorname{div}(D_R \nabla v_E) - \langle (D_W W), \nabla v_E \rangle + \operatorname{div}(K v_E \nabla h) + \alpha_E - \beta_E, \\ \frac{\partial v_I}{\partial t} &= \operatorname{div}(D_R \nabla v_I) - \langle (D_W W), \nabla v_I \rangle + \operatorname{div}(K v_I \nabla h) + \alpha_I - \beta_I, \\ v &= v_S + v_E + v_I,\end{aligned}\tag{3}$$

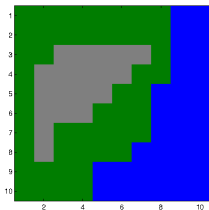
Sistema de ecuaciones, parte 2

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_S}{\partial t} &= -p(x, t), \\ \frac{\partial h_E}{\partial t} &= p(x, t) - p(x, t - \tau_I), \\ \frac{\partial h_I}{\partial t} &= p(x, t - \tau_I) - p(x, t - \tau_I - \tau_R) - m_h h_I / h, \\ \frac{\partial h_R}{\partial t} &= p(x, t - \tau_I - \tau_R), \\ h &= h_S + h_E + h_I + h_R,\end{aligned}\tag{4}$$

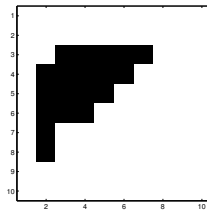
donde

$$p(x, t) = c_{vh} \cdot n_B(h(x, t)) \cdot h_S(x, t) \cdot \frac{v_I(x, t)}{h(x, t)},$$

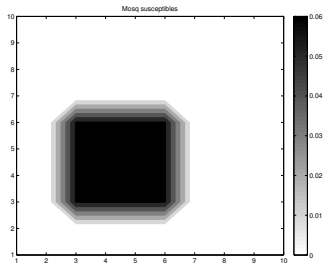
Condiciones iniciales



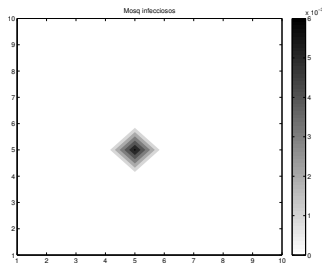
Clases del suelo del modelo.



Población inicial de humanos totales.

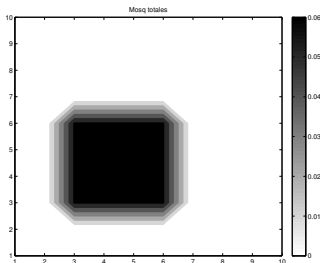


Población inicial de mosquitos susceptibles.

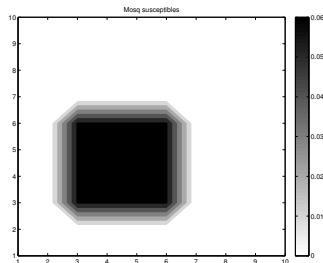


Población inicial de mosquitos infecciosos.

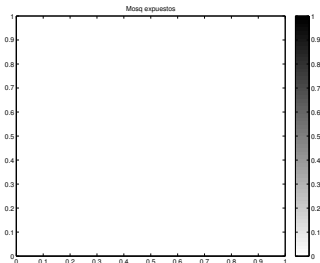
Evolución de las poblaciones de insectos



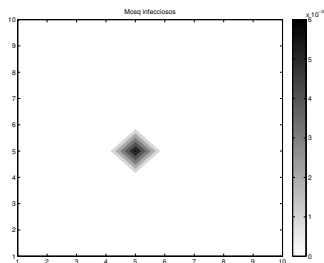
Población de mosquitos totales.



Población de mosquitos susceptibles.

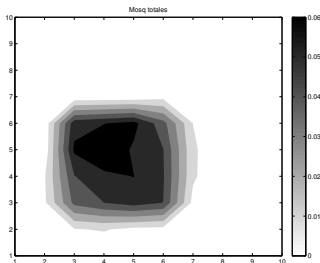


Población de mosquitos expuestos.

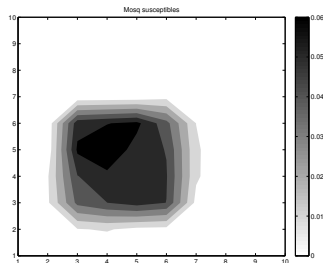


Población de mosquitos infecciosos.

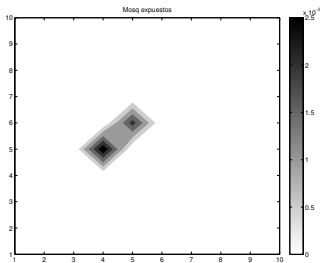
Evolución de las poblaciones de insectos



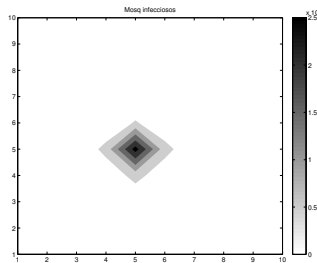
Población de mosquitos totales.



Población de mosquitos susceptibles.

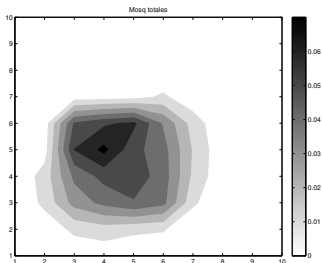


Población de mosquitos expuestos.

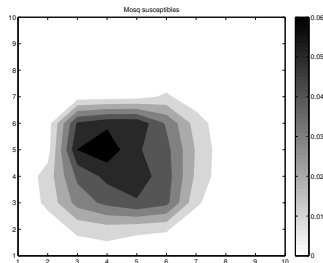


Población de mosquitos infecciosos.

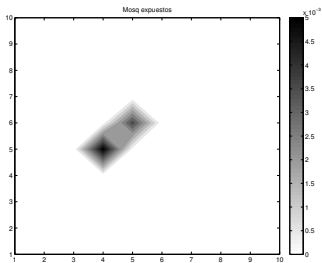
Evolución de las poblaciones de insectos



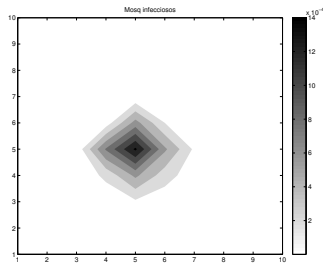
Población de mosquitos totales.



Población de mosquitos susceptibles.

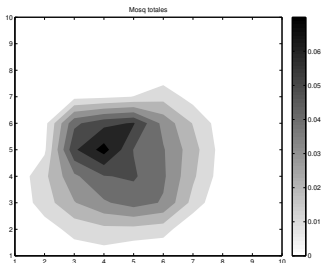


Población de mosquitos expuestos.

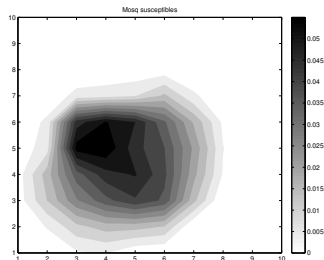


Población de mosquitos infecciosos.

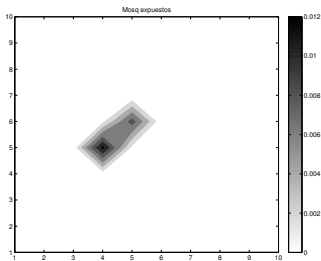
Evolución de las poblaciones de insectos



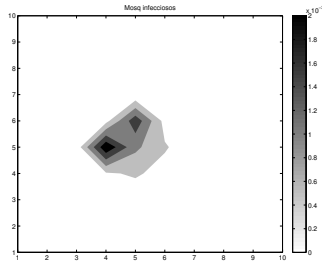
Población de mosquitos totales.



Población de mosquitos susceptibles.

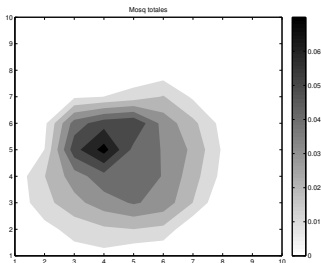


Población de mosquitos expuestos.

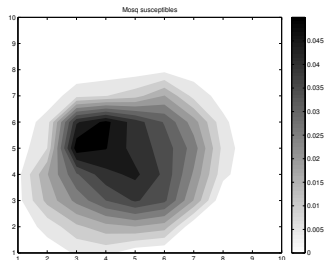


Población de mosquitos infecciosos.

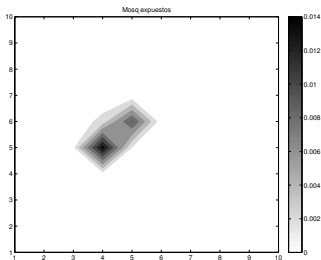
Evolución de las poblaciones de insectos



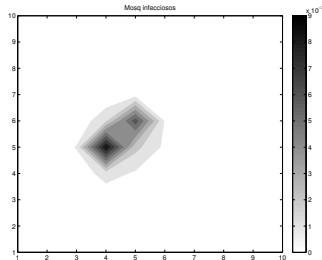
Población de mosquitos totales.



Población de mosquitos susceptibles.

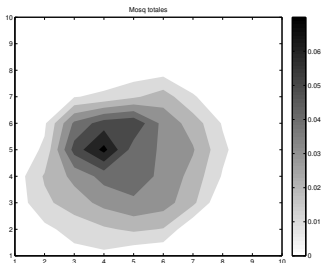


Población de mosquitos expuestos.

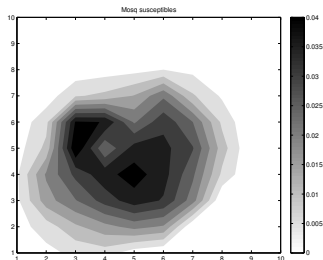


Población de mosquitos infecciosos.

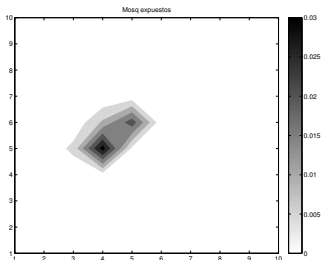
Evolución de las poblaciones de insectos



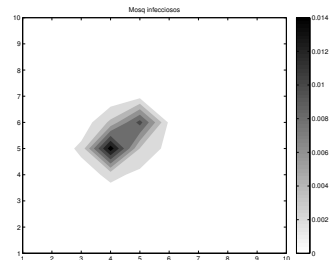
Población de mosquitos totales.



Población de mosquitos susceptibles.

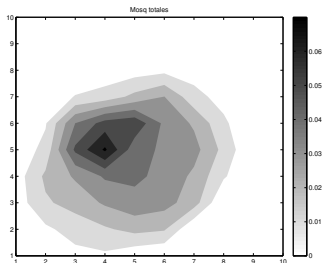


Población de mosquitos expuestos.

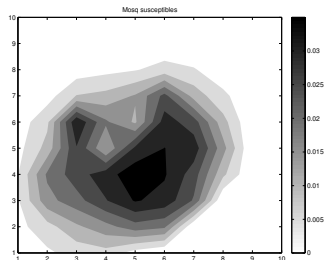


Población de mosquitos infecciosos.

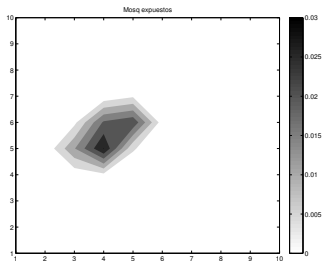
Evolución de las poblaciones de insectos



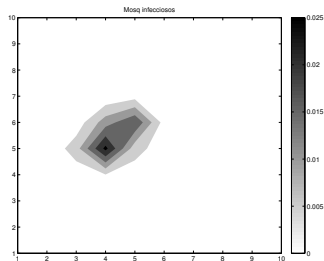
Población de mosquitos totales.



Población de mosquitos susceptibles.

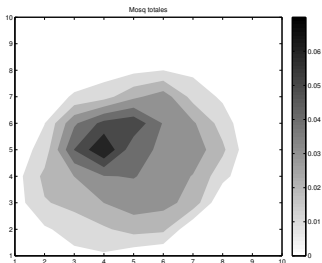


Población de mosquitos expuestos.

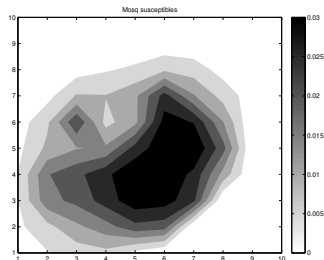


Población de mosquitos infecciosos.

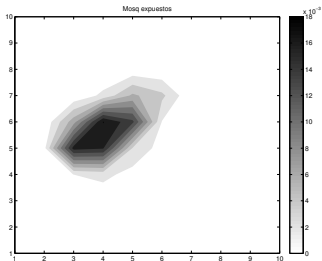
Evolución de las poblaciones de insectos



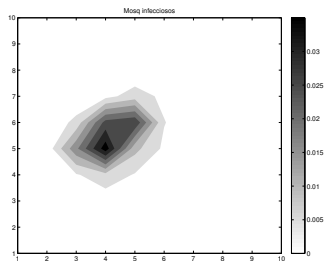
Población de mosquitos totales.



Población de mosquitos susceptibles.

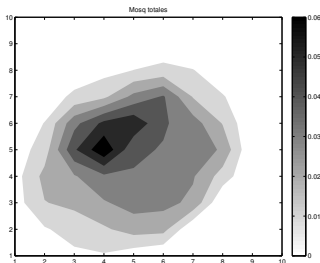


Población de mosquitos expuestos.

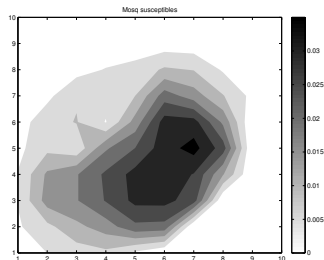


Población de mosquitos infecciosos.

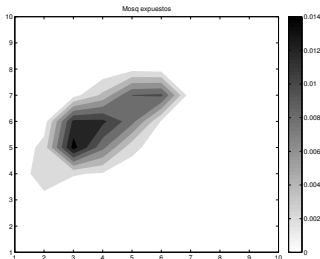
Evolución de las poblaciones de insectos



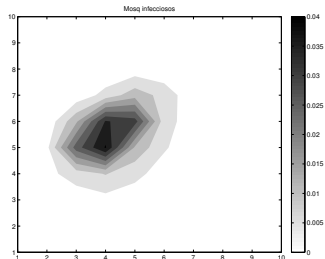
Población de mosquitos totales.



Población de mosquitos susceptibles.

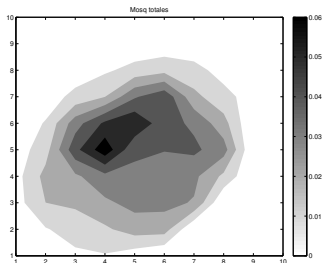


Población de mosquitos expuestos.

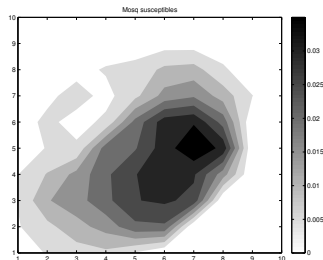


Población de mosquitos infecciosos.

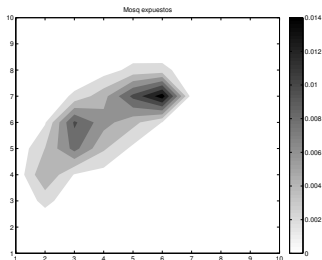
Evolución de las poblaciones de insectos



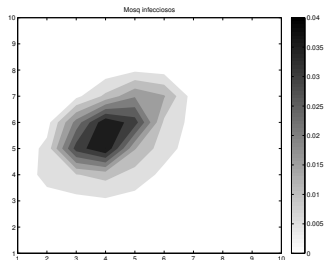
Población de mosquitos totales.



Población de mosquitos susceptibles.

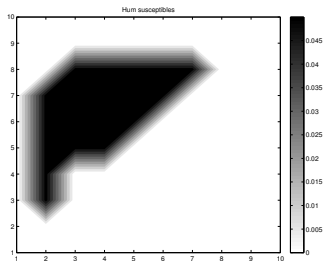


Población de mosquitos expuestos.

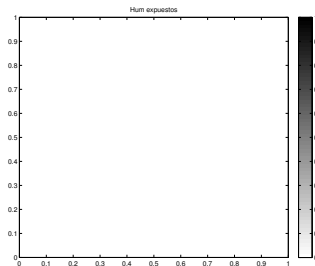


Población de mosquitos infecciosos.

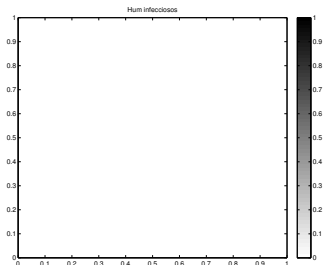
Evolución de las poblaciones de humanos



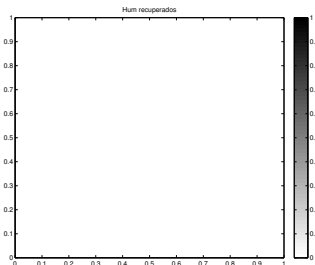
Población de humanos susceptibles.



Población de humanos expuestos.

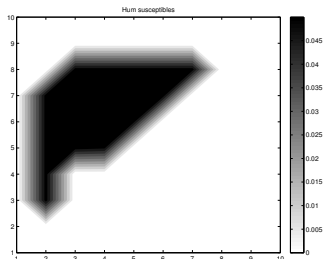


Población de humanos infecciosos.

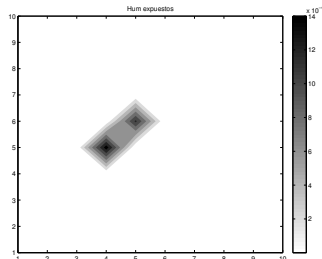


Población de humanos recuperados.

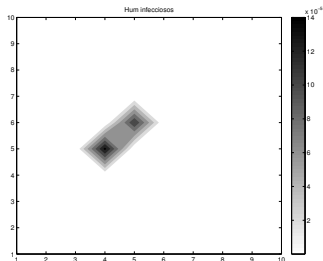
Evolución de las poblaciones de humanos



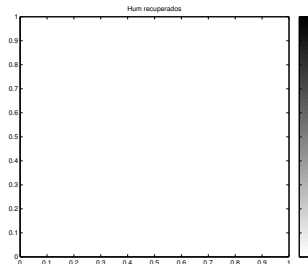
Población de humanos susceptibles.



Población de humanos expuestos.

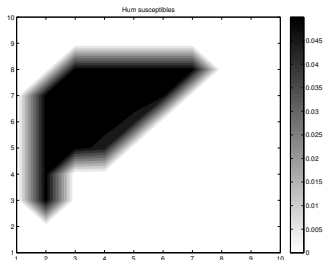


Población de humanos infecciosos.

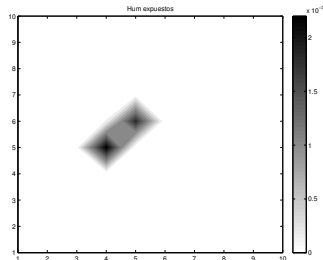


Población de humanos recuperados.

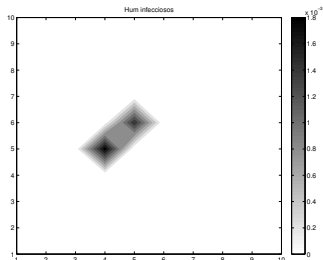
Evolución de las poblaciones de humanos



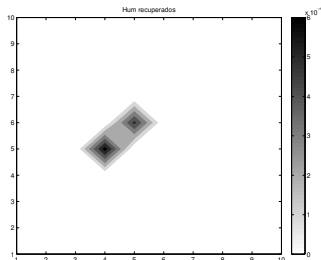
Población de humanos susceptibles.



Población de humanos expuestos.

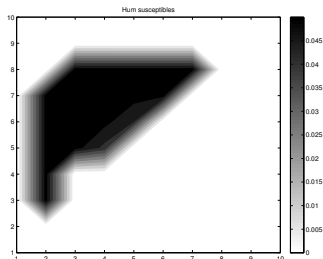


Población de humanos infecciosos.

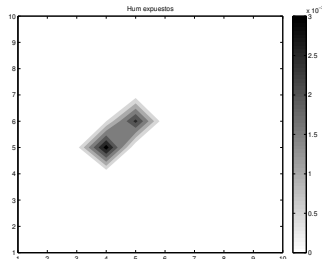


Población de humanos recuperados.

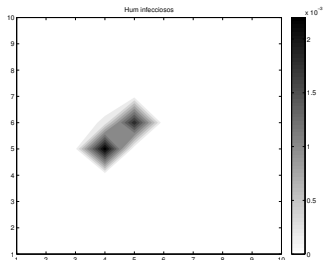
Evolución de las poblaciones de humanos



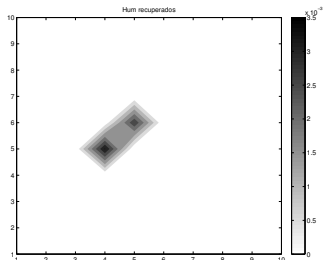
Población de humanos susceptibles.



Población de humanos expuestos.

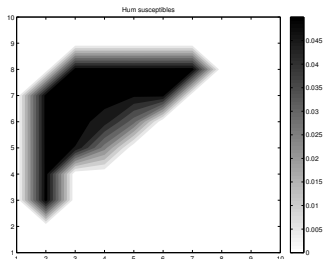


Población de humanos infecciosos.

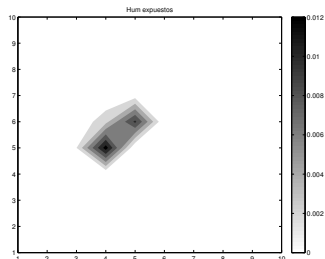


Población de humanos recuperados.

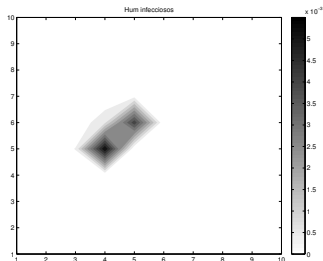
Evolución de las poblaciones de humanos



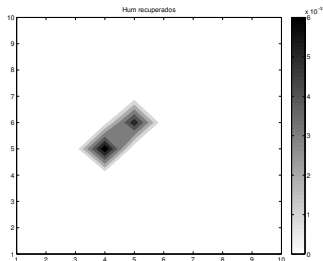
Población de humanos susceptibles.



Población de humanos expuestos.

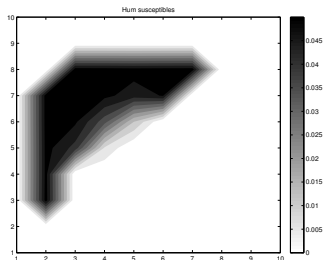


Población de humanos infecciosos.

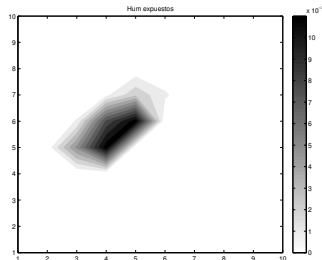


Población de humanos recuperados.

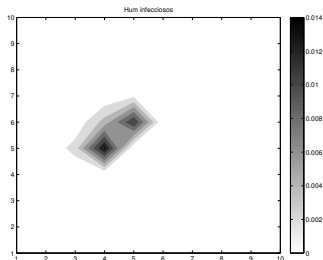
Evolución de las poblaciones de humanos



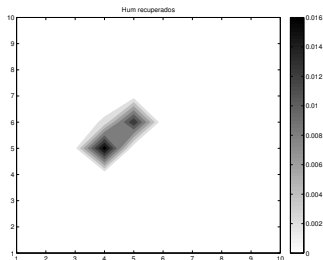
Población de humanos susceptibles.



Población de humanos expuestos.

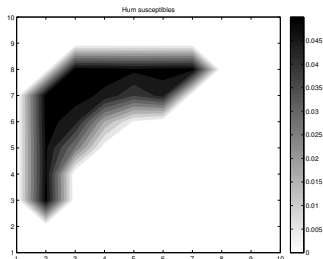


Población de humanos infecciosos.

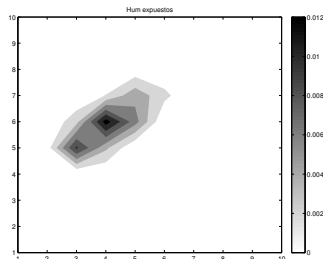


Población de humanos recuperados.

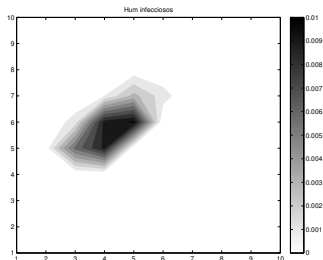
Evolución de las poblaciones de humanos



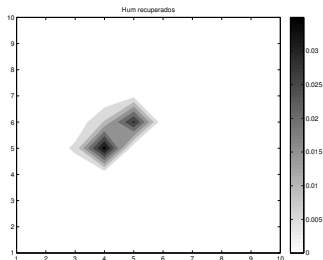
Población de humanos susceptibles.



Población de humanos expuestos.

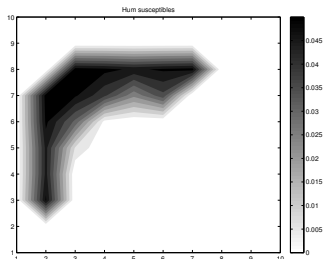


Población de humanos infecciosos.

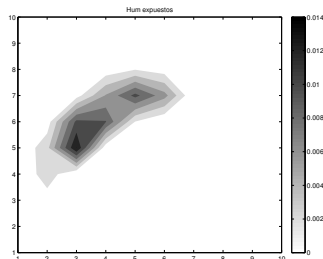


Población de humanos recuperados.

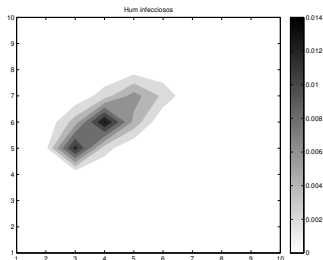
Evolución de las poblaciones de humanos



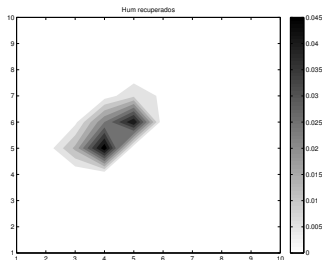
Población de humanos susceptibles.



Población de humanos expuestos.

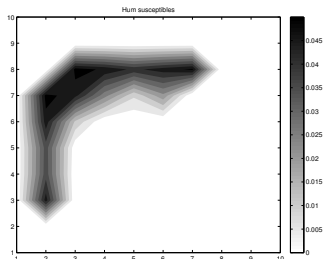


Población de humanos infecciosos.

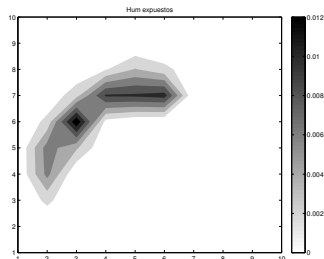


Población de humanos recuperados.

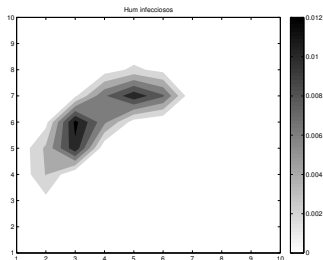
Evolución de las poblaciones de humanos



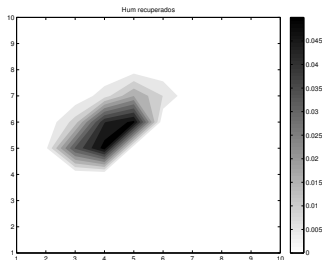
Población de humanos susceptibles.



Población de humanos expuestos.

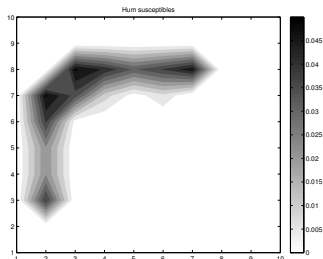


Población de humanos infecciosos.

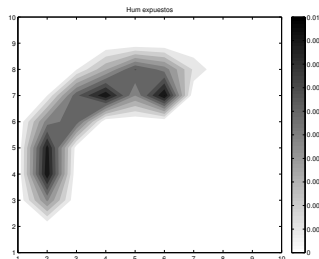


Población de humanos recuperados.

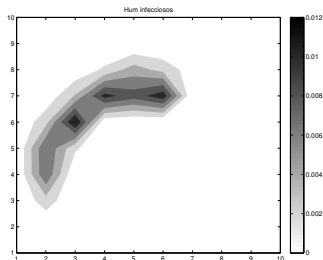
Evolución de las poblaciones de humanos



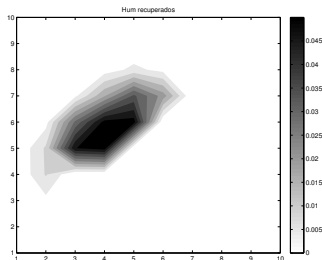
Población de humanos susceptibles.



Población de humanos expuestos.



Población de humanos infecciosos.



Población de humanos recuperados.

El problema de minimización

Problema Objetivo

Buscamos una estrategia de fumigación óptima de tal manera que para una cantidad fija de insecticida se minimicen los costos de fumigación y la cantidad de humanos expuestos a la enfermedad

Sean

$$\Upsilon(x, t) = (v_S(x, t), v_E(x, t), v_I(x, t), h_S(x, t), h_E(x, t), h_I(x, t), h_R(x, t)),$$

y $\kappa(x, t)$ a la cantidad de insecticida, dados γ_1 , γ_2 y γ_3 , definiremos

$$J(\Upsilon, \kappa) = \frac{1}{2} \int_{\Omega \times [0, T]} (\gamma_1 h_E(x, t)^2 + \gamma_2 h_I(x, t)^2 + \gamma_3 \kappa(x, t)^2) dx dt.$$

Si además denotamos por

$$\bar{\phi}(\Upsilon, \Upsilon', \Upsilon'', \kappa) = 0,$$

al sistema de ecuaciones diferenciales antes dado, podemos escribir el problema de la siguiente manera

Problema de minimización

minimizar $J(\Upsilon, \kappa),$
 (Υ, κ)

sujeto a $\bar{\phi}(\Upsilon, \Upsilon', \Upsilon'', \kappa) = 0,$
 $\kappa \geq 0,$
 $\langle \kappa, e \rangle = 1,$

El problema discretizado

Dado un estado inicial Υ_0 , buscamos hallar una trayectoria de controles $\kappa = (\kappa_0, \dots, \kappa_{l-1})$ y una trayectoria de estados $\Upsilon = (\Upsilon_1, \dots, \Upsilon_l)$ que minimicen

$$J(\Upsilon, \kappa) = J_l(\Upsilon_l) + \sum_{k=1}^{l-1} J_k(\Upsilon_k, \kappa_k),$$

sujeto a las restricciones

$$\Upsilon_{k+1} = \psi_k(\bar{\Upsilon}_k, \kappa_k), \quad k = 0, \dots, l-1,$$

$$\sum_{k=0}^{l-1} \langle \kappa_k, e_s \rangle = 1,$$

$$\kappa_k \geq 0 \quad k = 0, \dots, l-1.$$

donde $\bar{\Upsilon}_k^i = (\Upsilon_k^i, \Upsilon_{k-k_A}^i, \Upsilon_{k-k_E}^i, \Upsilon_{k-k_I}^i, \Upsilon_{k-k_I-k_R}^i)$.

El problema discretizado

Rescribiendo las restricciones de estado el problema es equivalente a buscar un par $(Y^*, \kappa^*) \in \mathbb{R}^{7 \times m \times n \times l} \times \mathbb{R}^{m \times n \times l}$, solución del problema

Problema discretizado

$$\begin{aligned} & \underset{(Y, \kappa)}{\text{minimizar}} && J(Y, \kappa), \\ & \text{sujeto a} && \phi(Y, \kappa) = 0, \\ & && \kappa \geq 0, \\ & && \langle \kappa, e \rangle = 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Además por el TFI, existe $\tilde{Y}(\kappa)$ tal que $\phi(\tilde{Y}(\kappa), \kappa) = 0$.

Así considerando ahora la función $\tilde{J}(\kappa) = J(\tilde{\Upsilon}(\kappa), \kappa)$, obtenemos el problema equivalente a (5), donde se desea hallar κ^* solución del problema

Problema discretizado reducido

$$\begin{aligned} & \underset{\kappa}{\text{minimizar}} && \tilde{J}(\kappa), \\ & \text{sujeto a} && \kappa \geq 0, \\ & && \langle \kappa, e \rangle = 1, \end{aligned} \tag{6}$$

para luego definir $\Upsilon^* = \tilde{\Upsilon}(\kappa^*)$.

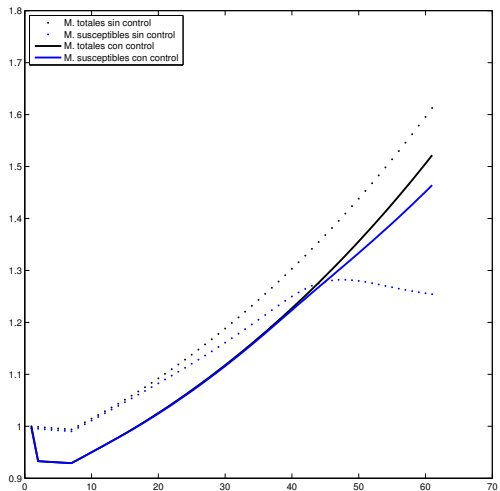


Figura: Población de mosquitos totales y susceptibles a la largo del tiempo con y sin control.

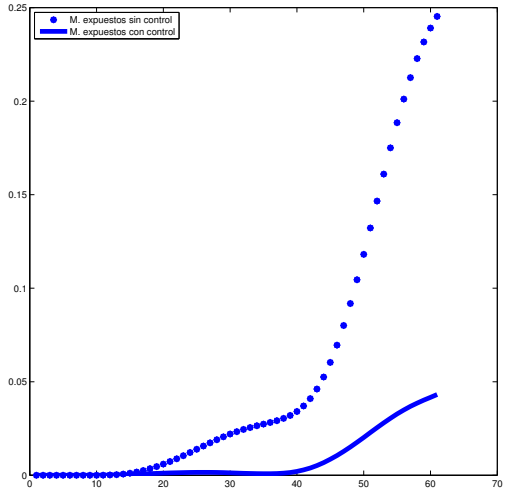


Figura: Población de mosquitos expuestos a la largo del tiempo con y sin control.

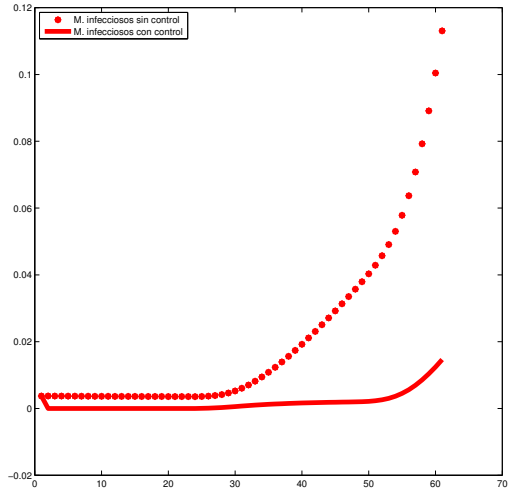


Figura: Población de mosquitos infecciosos a la largo del tiempo con y sin control.

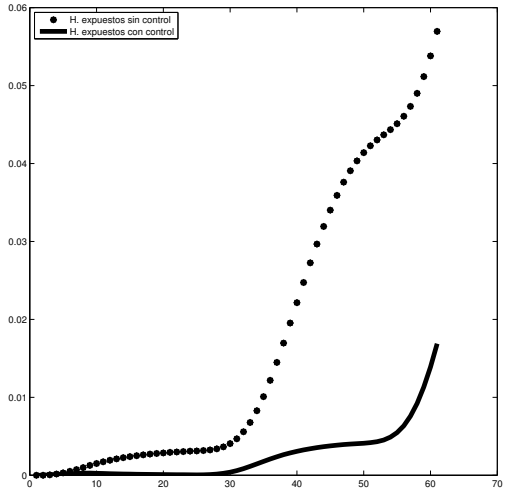


Figura: Población de humanos expuestos a la largo del tiempo con y sin control.

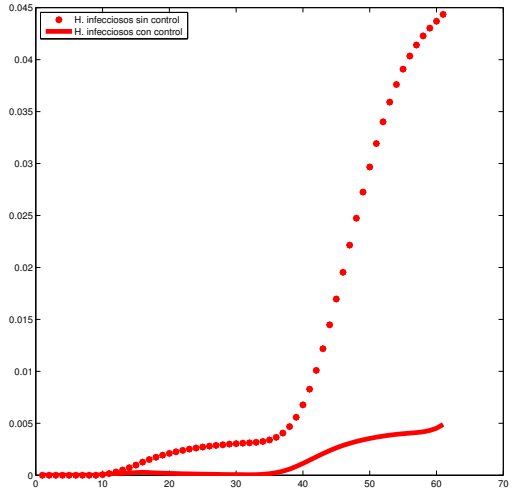


Figura: Población de humanos infecciosos a la largo del tiempo con y sin control.

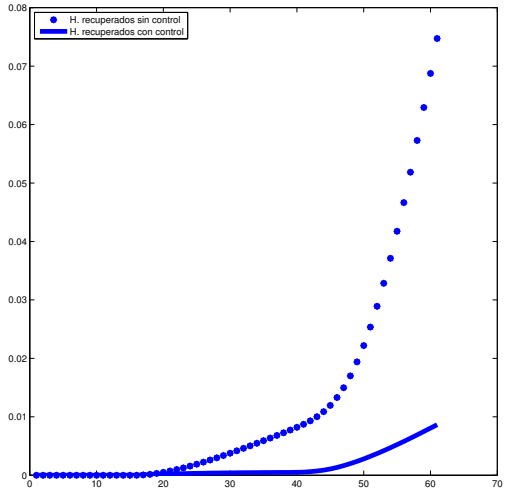


Figura: Población de humanos recuperados a la largo del tiempo con y sin control.

Conclusiones

- 1 ¿Qué se puede decir de la solución obtenida?

- 1 ¿Qué se puede decir de la solución obtenida?
- 2 Posibles mejoras del modelo.

- 1 ¿Qué se puede decir de la solución obtenida?
- 2 Posibles mejoras del modelo.
- 3 Dificultades del problema.