

Una familia de variedades Lorentzianas sin geodésicas luz cerradas

Reunión anual de la UMA, Bahía Blanca

Pablo R. Montenegro Gabriela Ovando

Departamento de Matemática, FCEIA-UNR

Septiembre, 2016

El grupo de Lie $SL(2, \mathbb{R})$

- $SL(2, \mathbb{R})$ es el subgrupo de $GL(2, \mathbb{R})$ correspondiente a matrices reales de 2×2 con determinante igual a 1.

El grupo de Lie $SL(2, \mathbb{R})$

- $SL(2, \mathbb{R})$ es el subgrupo de $GL(2, \mathbb{R})$ correspondiente a matrices reales de 2×2 con determinante igual a 1.
- Es un grupo de Lie de dimensión 3, conexo, no simplemente conexo. Topología relativa (sugrupo cerrado).

El grupo de Lie $SL(2, \mathbb{R})$

- $SL(2, \mathbb{R})$ es el subgrupo de $GL(2, \mathbb{R})$ correspondiente a matrices reales de 2×2 con determinante igual a 1.
- Es un grupo de Lie de dimensión 3, conexo, no simplemente conexo. Topología relativa (sugrupo cerrado).
- Vamos a munir a $SL(2, \mathbb{R})$ de una metrica Lorentziana bi-invariante y estudiar espacios cociente compactos Lorentzianos
 $M = SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ de dimensión 3, donde Γ es un lattice del grupo.

El grupo de Lie $SL(2, \mathbb{R})$

- $SL(2, \mathbb{R})$ es el subgrupo de $GL(2, \mathbb{R})$ correspondiente a matrices reales de 2×2 con determinante igual a 1.
- Es un grupo de Lie de dimensión 3, conexo, no simplemente conexo. Topología relativa (sugrupo cerrado).
- Vamos a munir a $SL(2, \mathbb{R})$ de una métrica Lorentziana bi-invariante y estudiar espacios cociente compactos Lorentzianos $M = SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ de dimensión 3, donde Γ es un lattice del grupo.

[del Barco, Ovando, Vittone]

En dimensión 4, se consideró el *grupo oscilador*, $G^{osc} = \mathbb{R} \ltimes H_3(\mathbb{R})$, con una métrica Lorentziana bi-invariante:

El grupo de Lie $SL(2, \mathbb{R})$

- $SL(2, \mathbb{R})$ es el subgrupo de $GL(2, \mathbb{R})$ correspondiente a matrices reales de 2×2 con determinante igual a 1.
- Es un grupo de Lie de dimensión 3, conexo, no simplemente conexo. Topología relativa (sugrupo cerrado).
- Vamos a munir a $SL(2, \mathbb{R})$ de una metrica Lorentziana bi-invariante y estudiar espacios cociente compactos Lorentzianos $M = SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ de dimensión 3, donde Γ es un lattice del grupo.

[del Barco, Ovando, Vittone]

En dimensión 4, se consideró el *grupo oscilador*, $G^{osc} = \mathbb{R} \rtimes H_3(\mathbb{R})$, con una métrica Lorentziana bi-invariante: Toda geodésica luz en G^{osc}/Γ **compacto** es periódica.

El grupo de Lie $SL(2, \mathbb{R})$

- $SL(2, \mathbb{R})$ es el subgrupo de $GL(2, \mathbb{R})$ correspondiente a matrices reales de 2×2 con determinante igual a 1.
- Es un grupo de Lie de dimensión 3, conexo, no simplemente conexo. Topología relativa (sugrupo cerrado).
- Vamos a munir a $SL(2, \mathbb{R})$ de una métrica Lorentziana bi-invariante y estudiar espacios cociente compactos Lorentzianos $M = SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ de dimensión 3, donde Γ es un lattice del grupo.

[del Barco, Ovando, Vittone]

En dimensión 4, se consideró el *grupo oscilador*, $G^{osc} = \mathbb{R} \rtimes H_3(\mathbb{R})$, con una métrica Lorentziana bi-invariante: Toda geodésica luz en G^{osc}/Γ **compacto** es periódica. Los Γ cubren todos los lattices cocompactos salvo isomorfismos.

El grupo de Lie $SL(2, \mathbb{R})$

- $SL(2, \mathbb{R})$ es el subgrupo de $GL(2, \mathbb{R})$ correspondiente a matrices reales de 2×2 con determinante igual a 1.
- Es un grupo de Lie de dimensión 3, conexo, no simplemente conexo. Topología relativa (sugrupo cerrado).
- Vamos a munir a $SL(2, \mathbb{R})$ de una métrica Lorentziana bi-invariante y estudiar espacios cociente compactos Lorentzianos $M = SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ de dimensión 3, donde Γ es un lattice del grupo.

[del Barco, Ovando, Vittone]

En dimensión 4, se consideró el *grupo oscilador*, $G^{osc} = \mathbb{R} \rtimes H_3(\mathbb{R})$, con una métrica Lorentziana bi-invariante: Toda geodésica luz en G^{osc}/Γ **compacto** es periódica. Los Γ cubren todos los lattices cocompactos salvo isomorfismos.

- ¿Por qué el $SL(2, \mathbb{R})$?

El grupo de Lie $SL(2, \mathbb{R})$

- $SL(2, \mathbb{R})$ es el subgrupo de $GL(2, \mathbb{R})$ correspondiente a matrices reales de 2×2 con determinante igual a 1.
- Es un grupo de Lie de dimensión 3, conexo, no simplemente conexo. Topología relativa (sugrupo cerrado).
- Vamos a munir a $SL(2, \mathbb{R})$ de una metrica Lorentziana bi-invariante y estudiar espacios cociente compactos Lorentzianos $M = SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ de dimensión 3, donde Γ es un lattice del grupo.

[del Barco, Ovando, Vittone]

En dimensión 4, se consideró el *grupo oscilador*, $G^{osc} = \mathbb{R} \rtimes H_3(\mathbb{R})$, con una métrica Lorentziana bi-invariante: Toda geodésica luz en G^{osc}/Γ **compacto** es periódica. Los Γ cubren todos los lattices cocompactos salvo isomorfismos.

- ¿Por qué el $SL(2, \mathbb{R})$? ¿por qué el grupo oscilador?

El grupo de Lie $SL(2, \mathbb{R})$

- $SL(2, \mathbb{R})$ es el subgrupo de $GL(2, \mathbb{R})$ correspondiente a matrices reales de 2×2 con determinante igual a 1.
- Es un grupo de Lie de dimensión 3, conexo, no simplemente conexo. Topología relativa (sugrupo cerrado).
- Vamos a munir a $SL(2, \mathbb{R})$ de una métrica Lorentziana bi-invariante y estudiar espacios cociente compactos Lorentzianos $M = SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ de dimensión 3, donde Γ es un lattice del grupo.

[del Barco, Ovando, Vittone]

En dimensión 4, se consideró el *grupo oscilador*, $G^{osc} = \mathbb{R} \rtimes H_3(\mathbb{R})$, con una métrica Lorentziana bi-invariante: Toda geodésica luz en G^{osc}/Γ **compacto** es periódica. Los Γ cubren todos los lattices cocompactos salvo isomorfismos.

- ¿Por qué el $SL(2, \mathbb{R})$? ¿por qué el grupo oscilador? diremos algo más adelante.

Variedades Lorentzianas 1

- Una *variedad Lorentziana* es un par (M, g) , donde M es una variedad diferencial n -dimensional ($n \geq 2$) y g es un campo tensorial simétrico tipo $(0, 2)$ no degenerado de índice 1.

Variedades Lorentzianas 1

- Una *variedad Lorentziana* es un par (M, g) , donde M es una variedad diferencial n -dimensional ($n \geq 2$) y g es un campo tensorial simétrico tipo $(0, 2)$ no degenerado de índice 1.
- Base ortonormal: $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ es una base ortogonal de $(T_p M, g_p)$ y $g_p(e_j, e_j) = \varepsilon_j \in \{+1, -1\}$.

Variedades Lorentzianas 1

- Una *variedad Lorentziana* es un par (M, g) , donde M es una variedad diferencial n -dimensional ($n \geq 2$) y g es un campo tensorial simétrico tipo $(0, 2)$ no degenerado de índice 1.
- Base ortonormal: $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ es una base ortogonal de $(T_p M, g_p)$ y $g_p(e_j, e_j) = \varepsilon_j \in \{+1, -1\}$. Si ordenamos la base de modo que los signos negativos aparezcan primero llamamos a $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ la *signatura* de la métrica

Variedades Lorentzianas 1

- Una *variedad Lorentziana* es un par (M, g) , donde M es una variedad diferencial n -dimensional ($n \geq 2$) y g es un campo tensorial simétrico tipo $(0, 2)$ no degenerado de índice 1.
- Base ortonormal: $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ es una base ortogonal de $(T_p M, g_p)$ y $g_p(e_j, e_j) = \varepsilon_j \in \{+1, -1\}$. Si ordenamos la base de modo que los signos negativos aparezcan primero llamamos a $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ la *signatura* de la métrica y el *índice* es la cantidad de signos negativos de la signatura. La signatura no depende de la base ortonormal elegida.

Variedades Lorentzianas 1

- Una *variedad Lorentziana* es un par (M, g) , donde M es una variedad diferencial n -dimensional ($n \geq 2$) y g es un campo tensorial simétrico tipo $(0, 2)$ no degenerado de índice 1.
- Base ortonormal: $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ es una base ortogonal de $(T_p M, g_p)$ y $g_p(e_j, e_j) = \varepsilon_j \in \{+1, -1\}$. Si ordenamos la base de modo que los signos negativos aparezcan primero llamamos a $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ la *signatura* de la métrica y el *índice* es la cantidad de signos negativos de la signatura. La signatura no depende de la base ortonormal elegida.
- En variedades Lorentzianas de dimensión 3, la signatura es $(-, +, +)$ y el índice es 1.

Variedades Lorentzianas 2

- Sea $v \in T_p M$, decimos que es **tipo**

espacio *si* $g_p(v, v) > 0$ *o* $v = 0$

luz *si* $g_p(v, v) = 0$ *y* $v \neq 0$

tiempo *si* $g_p(v, v) < 0$

- Sea $v \in T_p M$, decimos que es **tipo**

espacio *si* $g_p(v, v) > 0$ *o* $v = 0$

luz *si* $g_p(v, v) = 0$ *y* $v \neq 0$

tiempo *si* $g_p(v, v) < 0$

- .
- g es una métrica *indefinida* en M . Existe una única conexión libre de torsión y compatible con la métrica, llamada *conexión de Levi-Civita*.

Variedades Lorentzianas 2

- Sea $v \in T_p M$, decimos que es **tipo**

espacio *si* $g_p(v, v) > 0$ *o* $v = 0$

luz *si* $g_p(v, v) = 0$ *y* $v \neq 0$

tiempo *si* $g_p(v, v) < 0$

- g es una métrica *indefinida* en M . Existe una única conexión libre de torsión y compatible con la métrica, llamada *conexión de Levi-Civita*. Por lo que podemos definir *curvas goeodésicas*.

Variedades Lorentzianas 2

- Sea $v \in T_p M$, decimos que es **tipo**

espacio *si* $g_p(v, v) > 0$ *o* $v = 0$

luz *si* $g_p(v, v) = 0$ *y* $v \neq 0$

tiempo *si* $g_p(v, v) < 0$

- g es una métrica *indefinida* en M . Existe una única conexión libre de torsión y compatible con la métrica, llamada *conexión de Levi-Civita*. Por lo que podemos definir *curvas goeodésicas*.
- Si $\alpha : I \rightarrow M$ es una geodésica, $g_{\alpha(t)}(\dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t)) = c$ constante, por lo que podemos hablar de geodesicás espacio, luz y tiempo de acuerdo al signo de c .

- Queremos estudiar variedades de la forma $SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ **compactas**.

- Queremos estudiar variedades de la forma $SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ **compactas**.
- Un lattice de un grupo topológico localmente compacto es un subgrupo discreto con covolumen finito.

- Queremos estudiar variedades de la forma $SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ **compactas**.
- Un lattice de un grupo topológico localmente compacto es un subgrupo discreto con covolumen finito.
- Si el cociente es compacto, decimos que Γ es *cocompacto*.

Lattices 2: Cuaterniones

- Dado un anillo F , $a, b \in F$ no nulos, definimos $\mathbb{H}_F^{a,b} = \{p + qi + rj + sk : p, q, r, s \in F\}$ con la suma usual y la multiplicación determinada por las relaciones $i^2 = a$, $j^2 = b$, $ij = k = -ji$. Si F es un cuerpo hablamos el *álgebra de cuaterniones* $\mathbb{H}_F^{a,b}$.

Lattices 2: Cuaterniones

- Dado un anillo F , $a, b \in F$ no nulos, definimos $\mathbb{H}_F^{a,b} = \{p + qi + rj + sk : p, q, r, s \in F\}$ con la suma usual y la multiplicación determinada por las relaciones $i^2 = a$, $j^2 = b$, $ij = k = -ji$. Si F es un cuerpo hablamos el *álgebra de cuaterniones* $\mathbb{H}_F^{a,b}$.
- Se define la *norma reducida* de $x = p + qi + rj + sk \in \mathbb{H}_F^{a,b}$

$$N_{red}(x) := x\bar{x} = p^2 - aq^2 - br^2 + abs^2 \in F.$$

Lattices 2: Cuaterniones

- Dado un anillo F , $a, b \in F$ no nulos, definimos $\mathbb{H}_F^{a,b} = \{p + qi + rj + sk : p, q, r, s \in F\}$ con la suma usual y la multiplicación determinada por las relaciones $i^2 = a$, $j^2 = b$, $ij = k = -ji$. Si F es un cuerpo hablamos el *álgebra de cuaterniones* $\mathbb{H}_F^{a,b}$.

- Se define la *norma reducida* de $x = p + qi + rj + sk \in \mathbb{H}_F^{a,b}$

$$N_{red}(x) := x\bar{x} = p^2 - aq^2 - br^2 + abs^2 \in F.$$

- Si $a, b > 0$ $SL(1, \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{a,b}) := \left\{ g \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{a,b} : N_{red}(g) = 1 \right\}$ es isomorfo a $SL(2, \mathbb{R})$.

Lattices 3: Primer familia

Proposicion

[Dave Morris]

Sean a, b enteros positivos, luego $SL(1, \mathbb{H}_{\mathbb{Z}}^{a,b})$ es un subgrupo discreto de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{a,b}$. Además, es cocompacto si y sólo si $(0,0,0,0)$ es la única solución entera de la ecuación diofántica

$$w^2 - ax^2 - by^2 + abz^2 = 0$$

Proposición

[Dave Morris]

Sean a, b enteros positivos, luego $SL(1, \mathbb{H}_{\mathbb{Z}}^{a,b})$ es un subgrupo discreto de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{a,b}$. Además, es cocompacto si y sólo si $(0,0,0,0)$ es la única solución entera de la ecuación diofántica

$$w^2 - ax^2 - by^2 + abz^2 = 0$$

- Si a, b cumplen la condición de cocompacidad, denominamos $\Lambda_{a,b} : \phi \left(SL(1, \mathbb{H}_{\mathbb{Z}}^{a,b}) \right)$ al lattice cocompacto de $SL(2, \mathbb{R})$

$$\Lambda_{a,b} = \left\{ \begin{pmatrix} p + q\sqrt{a} & r + s\sqrt{a} \\ rb - sb\sqrt{a} & p - q\sqrt{a} \end{pmatrix} : p, q, r, s \in \mathbb{Z} \right\} \cap SL(2, \mathbb{R})$$

Lattices 3: Primer familia

Proposición

[Dave Morris]

Sean a, b enteros positivos, luego $SL(1, \mathbb{H}_{\mathbb{Z}}^{a,b})$ es un subgrupo discreto de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{a,b}$. Además, es cocompacto si y sólo si $(0,0,0,0)$ es la única solución entera de la ecuación diofántica

$$w^2 - ax^2 - by^2 + abz^2 = 0$$

- Si a, b cumplen la condición de cocompacidad, denominamos $\Lambda_{a,b} : \phi \left(SL(1, \mathbb{H}_{\mathbb{Z}}^{a,b}) \right)$ al lattice cocompacto de $SL(2, \mathbb{R})$

$$\Lambda_{a,b} = \left\{ \begin{pmatrix} p + q\sqrt{a} & r + s\sqrt{a} \\ rb - sb\sqrt{a} & p - q\sqrt{a} \end{pmatrix} : p, q, r, s \in \mathbb{Z} \right\} \cap SL(2, \mathbb{R})$$

Proposición

Si p, q, r, s definen un elemento de $\Lambda_{a,b}$ como arriba y $p^2 = 1$ entonces $q = r = s = 0$.

Lattices 4: Segunda familia

- Sea $K = \mathbb{Q}[\chi]$ un cuerpo generado sobre $\mathbb{Q}$ por una única raíz real de un polinomio de coeficientes enteros, y sea $\mathcal{O}$ el anillo de enteros de K .

Lattices 4: Segunda familia

- Sea $K = \mathbb{Q}[\chi]$ un cuerpo generado sobre $\mathbb{Q}$ por una única raíz real de un polinomio de coeficientes enteros, y sea $\mathcal{O}$ el anillo de enteros de K .
- Si $a, b \in \mathcal{O}$ son positivos,

Lattices 4: Segunda familia

- Sea $K = \mathbb{Q}[\chi]$ un cuerpo generado sobre $\mathbb{Q}$ por una única raíz real de un polinomio de coeficientes enteros, y sea $\mathcal{O}$ el anillo de enteros de K .
- Si $a, b \in \mathcal{O}$ son positivos, $SL(2, \mathbb{R})$ es isomorfo a $SL(1, \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{a,b})$.

Lattices 4: Segunda familia

- Sea $K = \mathbb{Q}[\chi]$ un cuerpo generado sobre $\mathbb{Q}$ por una única raíz real de un polinomio de coeficientes enteros, y sea $\mathcal{O}$ el anillo de enteros de K .
- Si $a, b \in \mathcal{O}$ son positivos, $SL(2, \mathbb{R})$ es isomorfo a $SL(1, \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{a,b})$.

Proposición

Sean $a, b > 0 \in \mathcal{O}$ tales que $\sigma(a)$ y $\sigma(b)$ negativos para todo embedding de cuerpos $\sigma : K \rightarrow \mathbb{C}$, luego $SL(1, \mathbb{H}_{\mathcal{O}}^{a,b})$ es un lattice cocompacto de $SL(1, \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{a,b})$

Lattices 4: Segunda familia

- Sea $K = \mathbb{Q}[\chi]$ un cuerpo generado sobre $\mathbb{Q}$ por una única raíz real de un polinomio de coeficientes enteros, y sea $\mathcal{O}$ el anillo de enteros de K .
- Si $a, b \in \mathcal{O}$ son positivos, $SL(2, \mathbb{R})$ es isomorfo a $SL(1, \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{a,b})$.

Proposición

Sean $a, b > 0 \in \mathcal{O}$ tales que $\sigma(a)$ y $\sigma(b)$ negativos para todo embedding de cuerpos $\sigma : K \rightarrow \mathbb{C}$, luego $SL(1, \mathbb{H}_{\mathcal{O}}^{a,b})$ es un lattice cocompacto de $SL(1, \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{a,b})$

- Si a, b y $\mathcal{O}$ cumplen la condición de cocompacidad, denominamos $\Lambda_{a,b}^{\mathcal{O}} : \phi \left(SL(1, \mathbb{H}_{\mathcal{O}}^{a,b}) \right)$ al correspondiente lattice cocompacto de $SL(2, \mathbb{R})$, siendo este

$$\Lambda_{a,b}^{\mathcal{O}} = \left\{ \begin{pmatrix} p + q\sqrt{a} & r + s\sqrt{a} \\ rb - sb\sqrt{a} & p - q\sqrt{a} \end{pmatrix} : p, q, r, s \in \mathcal{O} \right\} \cap SL(2, \mathbb{R})$$

Lattices 4: Segunda familia

- Sea $K = \mathbb{Q}[\chi]$ un cuerpo generado sobre $\mathbb{Q}$ por una única raíz real de un polinomio de coeficientes enteros, y sea $\mathcal{O}$ el anillo de enteros de K .
- Si $a, b \in \mathcal{O}$ son positivos, $SL(2, \mathbb{R})$ es isomorfo a $SL(1, \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{a,b})$.

Proposición

Sean $a, b > 0 \in \mathcal{O}$ tales que $\sigma(a)$ y $\sigma(b)$ negativos para todo embedding de cuerpos $\sigma : K \rightarrow \mathbb{C}$, luego $SL(1, \mathbb{H}_{\mathcal{O}}^{a,b})$ es un lattice cocompacto de $SL(1, \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{a,b})$

- Si a, b y $\mathcal{O}$ cumplen la condición de cocompacidad, denominamos $\Lambda_{a,b}^{\mathcal{O}} : \phi \left(SL(1, \mathbb{H}_{\mathcal{O}}^{a,b}) \right)$ al correspondiente lattice cocompacto de $SL(2, \mathbb{R})$, siendo este

$$\Lambda_{a,b}^{\mathcal{O}} = \left\{ \begin{pmatrix} p + q\sqrt{a} & r + s\sqrt{a} \\ rb - sb\sqrt{a} & p - q\sqrt{a} \end{pmatrix} : p, q, r, s \in \mathcal{O} \right\} \cap SL(2, \mathbb{R})$$

Proposición

Si p, q, r, s definen un elemento de $\Lambda_{a,b}^{\mathcal{O}}$ como arriba y $p^2 = 1$ entonces $q = r = s = 0$.

Métrica de $SL(2, \mathbb{R})$

- La *forma de Killing* del álgebra de Lie, $\mathfrak{g}$, de $SL(2, \mathbb{R})$ define una forma bilineal simétrica no degenerada por ser semisimple, en particular tiene índice 1.

Métrica de $SL(2, \mathbb{R})$

- La *forma de Killing* del álgebra de Lie, $\mathfrak{g}$, de $SL(2, \mathbb{R})$ define una forma bilineal simétrica no degenerada por ser semisimple, en particular tiene índice 1. Esta puede ser extendida a una métrica Lorentziana invariante a izquierda de todo el grupo.

Métrica de $SL(2, \mathbb{R})$

- La *forma de Killing* del álgebra de Lie, $\mathfrak{g}$, de $SL(2, \mathbb{R})$ define una forma bilineal simétrica no degenerada por ser semisimple, en particular tiene índice 1. Esta puede ser extendida a una métrica Lorentziana invariante a izquierda de todo el grupo. Más aún, resulta que esta métrica es invariante a derecha, por lo tanto *bi-invariante*.

- La *forma de Killing* del álgebra de Lie, $\mathfrak{g}$, de $SL(2, \mathbb{R})$ define una forma bilineal simétrica no degenerada por ser semisimple, en particular tiene índice 1. Esta puede ser extendida a una métrica Lorentziana invariante a izquierda de todo el grupo. Más aún, resulta que esta métrica es invariante a derecha, por lo tanto *bi-invariante*.

Proposición

- 1 Dicha métrica induce una métrica de índice 1 en las variedades cociente $SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ de clases a derecha, haciendo de estas variedades Lorentzianas de dimensión 3.

- La *forma de Killing* del álgebra de Lie, $\mathfrak{g}$, de $SL(2, \mathbb{R})$ define una forma bilineal simétrica no degenerada por ser semisimple, en particular tiene índice 1. Esta puede ser extendida a una métrica Lorentziana invariante a izquierda de todo el grupo. Más aún, resulta que esta métrica es invariante a derecha, por lo tanto *bi-invariante*.

Proposición

- 1 Dicha métrica induce una métrica de índice 1 en las variedades cociente $SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ de clases a derecha, haciendo de estas variedades Lorentzianas de dimensión 3.
- 2 Las geodésicas en el cociente son las proyecciones de las geodésicas en el grupo $SL(2, \mathbb{R})$.

- La *forma de Killing* del álgebra de Lie, $\mathfrak{g}$, de $SL(2, \mathbb{R})$ define una forma bilineal simétrica no degenerada por ser semisimple, en particular tiene índice 1. Esta puede ser extendida a una métrica Lorentziana invariante a izquierda de todo el grupo. Más aún, resulta que esta métrica es invariante a derecha, por lo tanto *bi-invariante*.

Proposición

- 1 *Dicha métrica induce una métrica de índice 1 en las variedades cociente $SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ de clases a derecha, haciendo de estas variedades Lorentzianas de dimensión 3.*
- 2 *Las geodésicas en el cociente son las proyecciones de las geodésicas en el grupo $SL(2, \mathbb{R})$. Si no son inyectivas debén ser periódicas.*

- La *forma de Killing* del álgebra de Lie, $\mathfrak{g}$, de $SL(2, \mathbb{R})$ define una forma bilineal simétrica no degenerada por ser semisimple, en particular tiene índice 1. Esta puede ser extendida a una métrica Lorentziana invariante a izquierda de todo el grupo. Más aún, resulta que esta métrica es invariante a derecha, por lo tanto *bi-invariante*.

Proposición

- 1 *Dicha métrica induce una métrica de índice 1 en las variedades cociente $SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ de clases a derecha, haciendo de estas variedades Lorentzianas de dimensión 3.*
- 2 *Las geodésicas en el cociente son las proyecciones de las geodésicas en el grupo $SL(2, \mathbb{R})$. Si no son inyectivas deben ser periódicas.*
- 3 *Una isometría ϕ de $SL(2, \mathbb{R})$ que preserva las fibras, es decir $\pi \circ \phi = \pi \circ \phi \circ R_\gamma \ \forall \gamma \in \Gamma$, define una isometría Φ en el cociente dada por $\Phi \circ \pi = \pi \circ \phi$.*

Proposición

Las geodésicas de $SL(2, \mathbb{R})$ por la identidad son los subgrupos monoparamétricos, $\exp(tX)$, $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$,

Proposición

Las geodésicas de $SL(2, \mathbb{R})$ por la identidad son los subgrupos monoparamétricos, $\exp(tX)$, $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, y corresponden a las siguientes tres familias:

Proposición

Las geodésicas de $SL(2, \mathbb{R})$ por la identidad son los subgrupos monoparamétricos, $\exp(tX)$, $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, y corresponden a las siguientes tres familias:

$$\left\{ C^{-1} \begin{pmatrix} 1 + kt & kt \\ kt & 1 - kt \end{pmatrix} C : 0 \neq k \in \mathbb{R}, C \in SL(2, \mathbb{R}) \right\} \quad \textbf{Luz}$$

Proposición

Las geodésicas de $SL(2, \mathbb{R})$ por la identidad son los subgrupos monoparamétricos, $\exp(tX)$, $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, y corresponden a las siguientes tres familias:

$$\left\{ C^{-1} \begin{pmatrix} 1 + kt & kt \\ kt & 1 - kt \end{pmatrix} C : 0 \neq k \in \mathbb{R}, C \in SL(2, \mathbb{R}) \right\} \quad \textbf{Luz}$$

$$\left\{ C^{-1} \begin{pmatrix} \cos(kt) & -\operatorname{sen}(kt) \\ \operatorname{sen}(kt) & \cos(kt) \end{pmatrix} C : 0 \neq k \in \mathbb{R}, C \in SL(2, \mathbb{R}) \right\} \quad \textbf{Tiempo}$$

Proposición

Las geodésicas de $SL(2, \mathbb{R})$ por la identidad son los subgrupos monoparamétricos, $\exp(tX)$, $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, y corresponden a las siguientes tres familias:

$$\left\{ C^{-1} \begin{pmatrix} 1 + kt & kt \\ kt & 1 - kt \end{pmatrix} C : 0 \neq k \in \mathbb{R}, C \in SL(2, \mathbb{R}) \right\} \quad \textbf{Luz}$$

$$\left\{ C^{-1} \begin{pmatrix} \cos(kt) & -\operatorname{sen}(kt) \\ \operatorname{sen}(kt) & \cos(kt) \end{pmatrix} C : 0 \neq k \in \mathbb{R}, C \in SL(2, \mathbb{R}) \right\} \quad \textbf{Tiempo}$$

$$\left\{ C^{-1} \begin{pmatrix} \cosh(kt) & \operatorname{senh}(kt) \\ \operatorname{senh}(kt) & \cosh(kt) \end{pmatrix} C : k \in \mathbb{R}, C \in SL(2, \mathbb{R}) \right\} \quad \textbf{Espacio}$$

Teorema: 1

Teorema

Las geodésicas luz de las familias de variedades lorentzianas $SL(2, \mathbb{R})/\Lambda_{a,b}$ y $SL(2, \mathbb{R})/\Lambda_{a,b}^{\mathcal{O}}$ no se cierran.

Teorema: 1

Teorema

Las geodésicas luz de las familias de variedades lorentzianas $SL(2, \mathbb{R})/\Lambda_{a,b}$ y $SL(2, \mathbb{R})/\Lambda_{a,b}^{\mathcal{O}}$ no se cierran.

Demostración:

- 1 Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow SL(2, \mathbb{R})/\Lambda$ una geodésica luz, donde Γ es un lattice como en el teorema. Supongamos que $\gamma(0) = \pi(Id) = \Lambda$.

Teorema

Las geodésicas luz de las familias de variedades lorentzianas $SL(2, \mathbb{R})/\Lambda_{a,b}$ y $SL(2, \mathbb{R})/\Lambda_{a,b}^{\mathcal{O}}$ no se cierran.

Demostración:

- 1 Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow SL(2, \mathbb{R})/\Lambda$ una geodésica luz, donde Γ es un lattice como en el teorema. Supongamos que $\gamma(0) = \pi(Id) = \Lambda$. Por proposición anteriormente mencionada, si γ no fuera inyectiva, sería periódica, luego existiría un $t > 0$ tal que $\gamma(t) = \gamma(0) = \Lambda$.

Teorema

Las geodésicas luz de las familias de variedades lorentzianas $SL(2, \mathbb{R})/\Lambda_{a,b}$ y $SL(2, \mathbb{R})/\Lambda_{a,b}^{\mathcal{O}}$ no se cierran.

Demostración:

- 1 Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow SL(2, \mathbb{R})/\Lambda$ una geodésica luz, donde Γ es un lattice como en el teorema. Supongamos que $\gamma(0) = \pi(Id) = \Lambda$. Por proposición anteriormente mencionada, si γ no fuera inyectiva, sería periódica, luego existiría un $t > 0$ tal que $\gamma(t) = \gamma(0) = \Lambda$. Además, $\gamma = \pi \circ \alpha$, con α una geodésica luz de $SL(2, \mathbb{R})$, de hecho podemos pedir que $\alpha(0) = Id$.

Teorema

Las geodésicas luz de las familias de variedades lorentzianas $SL(2, \mathbb{R})/\Lambda_{a,b}$ y $SL(2, \mathbb{R})/\Lambda_{a,b}^{\mathcal{O}}$ no se cierran.

Demostración:

- 1 Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow SL(2, \mathbb{R})/\Lambda$ una geodésica luz, donde Γ es un lattice como en el teorema. Supongamos que $\gamma(0) = \pi(Id) = \Lambda$. Por proposición anteriormente mencionada, si γ no fuera inyectiva, sería periódica, luego existiría un $t > 0$ tal que $\gamma(t) = \gamma(0) = \Lambda$. Además, $\gamma = \pi \circ \alpha$, con α una geodésica luz de $SL(2, \mathbb{R})$, de hecho podemos pedir que $\alpha(0) = Id$.
- 2 Es decir $\exists t > 0 / \alpha(t) \in \Lambda$, con α en la siguiente familia:

$$\left\{ C^{-1} \begin{pmatrix} 1 + kt & kt \\ kt & 1 - kt \end{pmatrix} C : 0 \neq k \in \mathbb{R}, C \in SL(2, \mathbb{R}) \right\}$$

Teorema

Las geodésicas luz de las familias de variedades lorentzianas $SL(2, \mathbb{R})/\Lambda_{a,b}$ y $SL(2, \mathbb{R})/\Lambda_{a,b}^{\mathcal{O}}$ no se cierran.

Demostración:

- 1 Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow SL(2, \mathbb{R})/\Lambda$ una geodésica luz, donde Γ es un lattice como en el teorema. Supongamos que $\gamma(0) = \pi(Id) = \Lambda$. Por proposición anteriormente mencionada, si γ no fuera inyectiva, sería periódica, luego existiría un $t > 0$ tal que $\gamma(t) = \gamma(0) = \Lambda$. Además, $\gamma = \pi \circ \alpha$, con α una geodésica luz de $SL(2, \mathbb{R})$, de hecho podemos pedir que $\alpha(0) = Id$.
- 2 Es decir $\exists t > 0 / \alpha(t) \in \Lambda$, con α en la siguiente familia:

$$\left\{ C^{-1} \begin{pmatrix} 1+kt & kt \\ kt & 1-kt \end{pmatrix} C : 0 \neq k \in \mathbb{R}, C \in SL(2, \mathbb{R}) \right\}$$

- Notemos que $Tr(\alpha(t)) = Tr(C^{-1}L(t)C) = Tr(CC^{-1}L(t)) = Tr(L(t)) = 2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

- 3 Por otro lado, $\lambda \in \Lambda$ es de la forma

$$\begin{pmatrix} p + q\sqrt{a} & r + s\sqrt{a} \\ rb - sb\sqrt{a} & p - q\sqrt{a} \end{pmatrix}$$

y $Tr(\lambda) = 2p$. Por lo que debe ser $2p = 2 \Rightarrow p = 1$.

- 4 Recordando las proposiciones de los lattices, como $p^2 = 1$, deben ser $q = r = s = 0$. Por lo tanto

$$\alpha(t > 0) = C^{-1} \begin{pmatrix} 1 + kt & kt \\ kt & 1 - kt \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es la única posibilidad,

- 3 Por otro lado, $\lambda \in \Lambda$ es de la forma

$$\begin{pmatrix} p + q\sqrt{a} & r + s\sqrt{a} \\ rb - sb\sqrt{a} & p - q\sqrt{a} \end{pmatrix}$$

y $Tr(\lambda) = 2p$. Por lo que debe ser $2p = 2 \Rightarrow p = 1$.

- 4 Recordando las proposiciones de los lattices, como $p^2 = 1$, deben ser $q = r = s = 0$. Por lo tanto

$$\alpha(t > 0) = C^{-1} \begin{pmatrix} 1 + kt & kt \\ kt & 1 - kt \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es la única posibilidad, pero es fácil comprobar que no tiene solución.

Por qué estos grupos

Por qué estos grupos

- *GROUPES DE LIE MUNIS DE MÉTRIQUES BI-INVARIANTES,*
Alberto Medina, 1984

- *GROUPES DE LIE MUNIS DE MÉTRIQUES BI-INVARIANTES,*
Alberto Medina, 1984

Definición

*Un grupo de Lie con una métrica bi-invariante se dice **indescomponible** si su álgebra de Lie no es producto ortogonal de ideales no triviales.*

- *GROUPES DE LIE MUNIS DE MÉTRIQUES BI-INVARIANTES,*
Alberto Medina, 1984

Definición

*Un grupo de Lie con una métrica bi-invariante se dice **indescomponible** si su álgebra de Lie no es producto ortogonal de ideales no triviales.*

- En dimensión 4 (G^{osc}, g^{osc}) es **esencialmente** el único grupo de Lie conexo indescomponible con métrica Lorentziana bi-invariante.

- *GROUPES DE LIE MUNIS DE MÉTRIQUES BI-INVARIANTES,*
Alberto Medina, 1984

Definición

*Un grupo de Lie con una métrica bi-invariante se dice **indescomponible** si su álgebra de Lie no es producto ortogonal de ideales no triviales.*

- En dimensión 4 (G^{osc}, g^{osc}) es **esencialmente** el único grupo de Lie conexo indescomponible con métrica Lorentziana bi-invariante. Geodésicas luz **siempre cerradas** en los cocientes compactos G^{osc}/Γ ,

Por qué estos grupos

- *GROUPES DE LIE MUNIS DE MÉTRIQUES BI-INVARIANTES,*
Alberto Medina, 1984

Definición

*Un grupo de Lie con una métrica bi-invariante se dice **indescomponible** si su álgebra de Lie no es producto ortogonal de ideales no triviales.*

- En dimensión 4 (G^{osc}, g^{osc}) es **esencialmente** el único grupo de Lie conexo indescomponible con métrica Lorentziana bi-invariante. Geodésicas luz **siempre cerradas** en los cocientes compactos G^{osc}/Γ , para **muchos** Γ .

Por qué estos grupos

- *GROUPES DE LIE MUNIS DE MÉTRIQUES BI-INVARIANTES, Alberto Medina, 1984*

Definición

*Un grupo de Lie con una métrica bi-invariante se dice **indescomponible** si su álgebra de Lie no es producto ortogonal de ideales no triviales.*

- En dimensión 4 (G^{osc}, g^{osc}) es **esencialmente** el único grupo de Lie conexo indescomponible con métrica Lorentziana bi-invariante. Geodésicas luz **siempre cerradas** en los cocientes compactos G^{osc}/Γ , para **muchos** Γ .
- En dimensión 3 ($SL(2, \mathbb{R}), g^{killing}$) es el único grupo de Lie conexo indescomponible con métrica Lorentziana bi-invariante.

Por qué estos grupos

- *GROUPES DE LIE MUNIS DE MÉTRIQUES BI-INVARIANTES, Alberto Medina, 1984*

Definición

*Un grupo de Lie con una métrica bi-invariante se dice **indescomponible** si su álgebra de Lie no es producto ortogonal de ideales no triviales.*

- En dimensión 4 (G^{osc}, g^{osc}) es **esencialmente** el único grupo de Lie conexo indescomponible con métrica Lorentziana bi-invariante. Geodésicas luz **siempre cerradas** en los cocientes compactos G^{osc}/Γ , para **muchos** Γ .
- En dimensión 3 ($SL(2, \mathbb{R}), g^{killing}$) es el único grupo de Lie conexo indescomponible con métrica Lorentziana bi-invariante. Geodésicas luz **nunca cerradas** en los cocientes compactos $SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$,

Por qué estos grupos

- *GROUPES DE LIE MUNIS DE MÉTRIQUES BI-INVARIANTES, Alberto Medina, 1984*

Definición

Un grupo de Lie con una métrica bi-invariante se dice **indescomponible** si su álgebra de Lie no es producto ortogonal de ideales no triviales.

- En dimensión 4 (G^{osc}, g^{osc}) es **esencialmente** el único grupo de Lie conexo indescomponible con métrica Lorentziana bi-invariante. Geodésicas luz **siempre cerradas** en los cocientes compactos G^{osc}/Γ , para **muchos** Γ .
- En dimensión 3 ($SL(2, \mathbb{R}), g^{killing}$) es el único grupo de Lie conexo indescomponible con métrica Lorentziana bi-invariante. Geodésicas luz **nunca cerradas** en los cocientes compactos $SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$, **para casi** todo Γ **aritmético**.

Por qué estos grupos

- *GROUPES DE LIE MUNIS DE MÉTRIQUES BI-INVARIANTES, Alberto Medina, 1984*

Definición

Un grupo de Lie con una métrica bi-invariante se dice **indescomponible** si su álgebra de Lie no es producto ortogonal de ideales no triviales.

- En dimensión 4 (G^{osc}, g^{osc}) es **esencialmente** el único grupo de Lie conexo indescomponible con métrica Lorentziana bi-invariante. Geodésicas luz **siempre cerradas** en los cocientes compactos G^{osc}/Γ , para **muchos** Γ .
- En dimensión 3 ($SL(2, \mathbb{R}), g^{killing}$) es el único grupo de Lie conexo indescomponible con métrica Lorentziana bi-invariante. Geodésicas luz **nunca cerradas** en los cocientes compactos $SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$, **para casi todo** Γ **aritmético**.
- Es posible que $SL(2, \mathbb{R})$ es el único tal que los cocientes tienen geodésicas luz no cerradas, en cualquier dimensión.

- El grupo de Isometrías de $G = SL(2, \mathbb{R})$ es $I(G) = L(G)F(G)$,
dónde $F(G)$ son aquellas isometrías que fijan el origen.

- El grupo de Isometrías de $G = SL(2, \mathbb{R})$ es $I(G) = L(G)F(G)$, dónde $F(G)$ son aquellas isometrías que fijan el origen. Basta describir $F(G)$ para describir $I(G)$.

- El grupo de Isometrías de $G = SL(2, \mathbb{R})$ es $I(G) = L(G)F(G)$, dónde $F(G)$ son aquellas isometrías que fijan el origen. Basta describir $F(G)$ para describir $I(G)$.

Teorema (simplificado)

[Detlef Müller, 1987]

Sea G grupo de Lie con métrica Lorentziana bi-invariante, con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ simple, luego: Φ está en $F(G)$ si y sólo si Φ es un automorfismo o anti-automorfismo tal que $d\Phi_e$ deja invariante a $\langle , \rangle$, la métrica del álgebra de Lie.

- El grupo de Isometrías de $G = SL(2, \mathbb{R})$ es $I(G) = L(G)F(G)$, dónde $F(G)$ son aquellas isometrías que fijan el origen. Basta describir $F(G)$ para describir $I(G)$.

Teorema (simplificado)

[Detlef Müller, 1987]

Sea G grupo de Lie con métrica Lorentziana bi-invariante, con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ simple, luego: Φ está en $F(G)$ si y sólo si Φ es un automorfismo o anti-automorfismo tal que $d\Phi_e$ deja invariante a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, la métrica del álgebra de Lie.

Este teorema permite calcular $F(SL(2, \mathbb{R}))$, ya que las isometrías quedan determinadas por su diferencial.

Se obtienen 4 familias:

- 1 Automorfismos interiores $\Phi_g^1(h) = ghg^{-1}$.

Se obtienen 4 familias:

- 1 Automorfismos interiores $\Phi_g^1(h) = ghg^{-1}$.
- 2 Un automorfismo aislado

$$\Phi^2 \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 & -g_2 \\ -g_3 & g_4 \end{pmatrix}$$

Se obtienen 4 familias:

- ❶ Automorfismos interiores $\Phi_g^1(h) = ghg^{-1}$.
- ❷ Un automorfismo aislado

$$\Phi^2 \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 & -g_2 \\ -g_3 & g_4 \end{pmatrix}$$

$i(g) = g^{-1}$ es una isometría en métricas bi-invariantes, las familias 3 y 4 corresponden a los anti-automorfismos y son:

- ❸ $\Phi_g^3 = i \circ \Phi_g^1$
- ❹ $\Phi^4 = i \circ \Phi^2$

De estas isometrías, cuáles pasan al cociente?, es decir, cuáles conservan la fibra?

- Se analizó el caso de los lattices $\Lambda_{a,b}$
 - ① La isometría aislada Φ^2 :

Isometrías: 3

De estas isometrías, cuáles pasan al cociente?, es decir, cuáles conervan la fibra?

- Se analizó el caso de los lattices $\Lambda_{a,b}$
 - ① La isometría aislada Φ^2 : **Sí**.

De estas isometrías, cuáles pasan al cociente?, es decir, cuáles conervan la fibra?

- Se analizó el caso de los lattices $\Lambda_{a,b}$

- 1 La isometría aislada Φ^2 : **Sí**.

- 2 La inversión i :

De estas isometrías, cuáles pasan al cociente?, es decir, cuáles conervan la fibra?

- Se analizó el caso de los lattices $\Lambda_{a,b}$
 - 1 La isometría aislada Φ^2 : **Sí**.
 - 2 La inversión i : **Sólo si $\Lambda_{a,b}$ normal en $SL(2, \mathbb{R})$.**

De estas isometrías, cuáles pasan al cociente?, es decir, cuáles conervan la fibra?

- Se analizó el caso de los lattices $\Lambda_{a,b}$

- 1 La isometría aislada Φ^2 : **Sí**.
- 2 La inversión i : **Sólo si $\Lambda_{a,b}$ normal en $SL(2, \mathbb{R})$.**
- 3 Los automorfismo interiores Φ_g^1 : **sí y sólo si $g \in N(\Lambda_{a,b})$**

De estas isometrías, cuáles pasan al cociente?, es decir, cuáles conervan la fibra?

- Se analizó el caso de los lattices $\Lambda_{a,b}$
 - 1 La isometría aislada Φ^2 : **Sí**.
 - 2 La inversión i : **Sólo si** $\Lambda_{a,b}$ **normal en** $SL(2, \mathbb{R})$.
 - 3 Los automorfismo interiores Φ_g^1 : **sí y sólo si** $g \in N(\Lambda_{a,b})$

Proposición

$$N(\Lambda_{a,b}) \neq \Lambda_{a,b}$$

Isometrías: 3

De estas isometrías, cuáles pasan al cociente?, es decir, cuáles convengan la fibra?

- Se analizó el caso de los lattices $\Lambda_{a,b}$
 - 1 La isometría aislada Φ^2 : **Sí**.
 - 2 La inversión i : **Sólo si** $\Lambda_{a,b}$ **normal en** $SL(2, \mathbb{R})$.
 - 3 Los automorfismo interiores Φ_g^1 : **sí y sólo si** $g \in N(\Lambda_{a,b})$

Proposición

$$N(\Lambda_{a,b}) \neq \Lambda_{a,b}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{b}} \\ -\sqrt{b} & 0 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{b}} \\ \sqrt{b} & 0 \end{pmatrix} \in N(\Lambda_{a,b})$$

Isometrías: 3

De estas isometrías, cuáles pasan al cociente?, es decir, cuáles conervan la fibra?

- Se analizó el caso de los lattices $\Lambda_{a,b}$
 - 1 La isometría aislada Φ^2 : **Sí**.
 - 2 La inversión i : **Sólo si** $\Lambda_{a,b}$ **normal en** $SL(2, \mathbb{R})$.
 - 3 Los automorfismo interiores Φ_g^1 : **sí y sólo si** $g \in N(\Lambda_{a,b})$

Proposición

$$N(\Lambda_{a,b}) \neq \Lambda_{a,b}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{b}} \\ -\sqrt{b} & 0 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{b}} \\ \sqrt{b} & 0 \end{pmatrix} \in N(\Lambda_{a,b})$$

Son los únicos fuera del lattice con alguna componente nula.

Isometrías: 3

De estas isometrías, cuáles pasan al cociente?, es decir, cuáles convengan la fibra?

- Se analizó el caso de los lattices $\Lambda_{a,b}$
 - 1 La isometría aislada Φ^2 : **Sí**.
 - 2 La inversión i : **Sólo si** $\Lambda_{a,b}$ **normal en** $SL(2, \mathbb{R})$.
 - 3 Los automorfismo interiores Φ_g^1 : **sí y sólo si** $g \in N(\Lambda_{a,b})$

Proposición

$$N(\Lambda_{a,b}) \neq \Lambda_{a,b}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{b}} \\ -\sqrt{b} & 0 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{b}} \\ \sqrt{b} & 0 \end{pmatrix} \in N(\Lambda_{a,b})$$

Son los únicos fuera del lattice con alguna componente nula.

- Calcular el normalizador produce un sistema de ecuaciones en el que se buscan $g \in G$ tal que para todo $\gamma \in \Gamma \exists z_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3, 4$, tal que $\sum_{m,n} f_{m,n}^i(\gamma) g_m g_n = z_i$.