

# Extensiones centrales de álgebras de Lie en Física

Hugo Montani

UACO-UNPA/CONICET

Setiembre 2016

# I - Extensiones centrales de álgebras de Lie

---

- Sean 3 álgebras de Lie  $\mathfrak{g}, \mathfrak{c}, \mathfrak{g}^\wedge$

# I - Extensiones centrales de álgebras de Lie

- Sean 3 álgebras de Lie  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{c}$ ,  $\mathfrak{g}^\wedge$
- $\mathfrak{g}^\wedge$  es la extensión central de  $\mathfrak{g}$  por  $\mathfrak{c}$  si

# I - Extensiones centrales de álgebras de Lie

- Sean 3 álgebras de Lie  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{c}$ ,  $\mathfrak{g}^\wedge$
- $\mathfrak{g}^\wedge$  es la extensión central de  $\mathfrak{g}$  por  $\mathfrak{c}$  si



$$0 \longrightarrow \mathfrak{c} \longrightarrow \mathfrak{g}^\wedge \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

## I - Extensiones centrales de álgebras de Lie

- Sean 3 álgebras de Lie  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{c}$ ,  $\mathfrak{g}^\wedge$
- $\mathfrak{g}^\wedge$  es la extensión central de  $\mathfrak{g}$  por  $\mathfrak{c}$  si

•

$$0 \longrightarrow \mathfrak{c} \longrightarrow \mathfrak{g}^\wedge \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

- con  $\mathfrak{c}$  central en  $\mathfrak{g}^\wedge$ .

## I - Extensiones centrales de álgebras de Lie

- Sean 3 álgebras de Lie  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{c}$ ,  $\mathfrak{g}^\wedge$
- $\mathfrak{g}^\wedge$  es la extensión central de  $\mathfrak{g}$  por  $\mathfrak{c}$  si

- 

$$0 \longrightarrow \mathfrak{c} \longrightarrow \mathfrak{g}^\wedge \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

- con  $\mathfrak{c}$  central en  $\mathfrak{g}^\wedge$ .
- Si  $\mathfrak{g}^\wedge = \mathfrak{g} \times \mathfrak{c} \implies$  extensión central trivial.

- Sea  $s : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^\wedge$  una sección

• Sea  $s : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^\wedge$  una sección

• entonces

$$c_s : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^\wedge \quad / \quad c_s(X, Y) := s([X, Y]) - [s(X), s(Y)]$$

- Sea  $s : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^\wedge$  una sección

- entonces

$$c_s : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^\wedge \quad / \quad c_s(X, Y) := s([X, Y]) - [s(X), s(Y)]$$

- es tal que

$$\pi(c_s(X, Y)) = 0 \implies c_s : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{c} \subset \mathfrak{g}^\wedge .$$

- Sea  $s : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^\wedge$  una sección

- entonces

$$c_s : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^\wedge \quad / \quad c_s(X, Y) := s([X, Y]) - [s(X), s(Y)]$$

- es tal que

$$\pi(c_s(X, Y)) = 0 \implies c_s : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{c} \subset \mathfrak{g}^\wedge .$$

- Además  $dc_s = 0$  en el complejo de cocadenas  $(\Lambda^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{c}), d)$

- Sea  $s : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^\wedge$  una sección

- entonces

$$c_s : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^\wedge \quad / \quad c_s(X, Y) := s([X, Y]) - [s(X), s(Y)]$$

- es tal que

$$\pi(c_s(X, Y)) = 0 \implies c_s : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{c} \subset \mathfrak{g}^\wedge.$$

- Además  $dc_s = 0$  en el complejo de cocadenas  $(\Lambda^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{c}), d)$
- $\implies c_s$  es un **2-cociclo** en  $\Lambda^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{c}) \subset \Lambda^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{c})$ .

- Sea  $s : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^\wedge$  una sección

- entonces

$$c_s : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^\wedge \quad / \quad c_s(X, Y) := s([X, Y]) - [s(X), s(Y)]$$

- es tal que

$$\pi(c_s(X, Y)) = 0 \implies c_s : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{c} \subset \mathfrak{g}^\wedge.$$

- Además  $dc_s = 0$  en el complejo de cocadenas  $(\Lambda^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{c}), d)$
- $\implies c_s$  es un **2-cociclo** en  $\Lambda^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{c}) \subset \Lambda^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{c})$ .
- El corchete de Lie en  $\mathfrak{g}^\wedge$  en una trivialización es entonces

$$[(X, a), (Y, b)] = ([X, Y], c_s(X, Y))$$

- Sea  $s : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^\wedge$  una sección

- entonces

$$c_s : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^\wedge \quad / \quad c_s(X, Y) := s([X, Y]) - [s(X), s(Y)]$$

- es tal que

$$\pi(c_s(X, Y)) = 0 \implies c_s : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{c} \subset \mathfrak{g}^\wedge.$$

- Además  $dc_s = 0$  en el complejo de cocadenas  $(\Lambda^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{c}), d)$
- $\implies c_s$  es un **2-cociclo** en  $\Lambda^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{c}) \subset \Lambda^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{c})$ .
- El corchete de Lie en  $\mathfrak{g}^\wedge$  en una trivialización es entonces

$$[(X, a), (Y, b)] = ([X, Y], c_s(X, Y))$$

- Recíprocamente, todo **2-cociclo**  $c \in \Lambda^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{c})$  define una extensión central  $\mathfrak{g}^\wedge$  de  $\mathfrak{g}$ .

- Análogamente, tres grupos satisfaciendo la secuencia exacta

$$\{1\} \longrightarrow C \longrightarrow G^{\wedge} \xrightarrow{\Pi} G \longrightarrow \{1\}$$

- Análogamente, tres grupos satisfaciendo la secuencia exacta

$$\{1\} \longrightarrow C \longrightarrow G^{\wedge} \xrightarrow{\Pi} G \longrightarrow \{1\}$$

- definen una extensión central  $G^{\wedge}$  del grupo  $G$  por  $C$ , siendo  $C$  central en  $G^{\wedge}$ .

- Análogamente, tres grupos satisfaciendo la secuencia exacta

$$\{1\} \longrightarrow C \longrightarrow G^{\wedge} \xrightarrow{\Pi} G \longrightarrow \{1\}$$

- definen una extensión central  $G^{\wedge}$  del grupo  $G$  por  $C$ , siendo  $C$  central en  $G^{\wedge}$ .
- Estas extensiones están caracterizadas también por un **2-cociclo**  $\varphi \in \Lambda^2(G, C)$ .

## II - Extensiones centrales y representaciones proyectivas

- Una **representación proyectiva** de un grupo  $G$  sobre un  $K$ -espacio vectorial  $V$  es un homomorfismo

$$G \longrightarrow \mathbf{PGL}(V, K) = \frac{GL(V, K)}{K^*}$$

donde  $K^* = \{k\text{Id} \mid \text{Id} \in GL(V, K) \text{ y } 0 \neq k \in K\}$ .

## II - Extensiones centrales y representaciones proyectivas

- Una **representación proyectiva** de un grupo  $G$  sobre un  $K$ -espacio vectorial  $V$  es un homomorfismo

$$G \longrightarrow \mathbf{PGL}(V, K) = \frac{GL(V, K)}{K^*}$$

donde  $K^* = \{k\text{Id} / \text{Id} \in GL(V, K) \text{ y } 0 \neq k \in K\}$ .

- Sea  $\mathbf{P}V$  el conjunto de todos los subespacios de dimensión 1 de  $V$ .

## II - Extensiones centrales y representaciones proyectivas

- Una **representación proyectiva** de un grupo  $G$  sobre un  $K$ -espacio vectorial  $V$  es un homomorfismo

$$G \longrightarrow \mathbf{PGL}(V, K) = \frac{GL(V, K)}{K^*}$$

donde  $K^* = \{k\text{Id} / \text{Id} \in GL(V, K) \text{ y } 0 \neq k \in K\}$ .

- Sea  $\mathbf{P}V$  el conjunto de todos los subespacios de dimensión 1 de  $V$ .
- entonces,  $\mathbf{PGL}(V, K)$  es el *grupo de automorfismos del espacio proyectivo  $\mathbf{P}V$* .

## II - Extensiones centrales y representaciones proyectivas

- Una **representación proyectiva** de un grupo  $G$  sobre un  $K$ -espacio vectorial  $V$  es un homomorfismo

$$G \longrightarrow \mathbf{PGL}(V, K) = \frac{GL(V, K)}{K^*}$$

donde  $K^* = \{k\text{Id} / \text{Id} \in GL(V, K) \text{ y } 0 \neq k \in K\}$ .

- Sea  $\mathbf{P}V$  el conjunto de todos los subespacios de dimensión 1 de  $V$ .
- entonces,  $\mathbf{PGL}(V, K)$  es el *grupo de automorfismos del espacio proyectivo*  $\mathbf{P}V$ .
- Así,  $GL(V, K)$  es la extensión central de  $\mathbf{PGL}(V, K)$

$$\{1\} \longrightarrow K^* \longrightarrow GL(V, K) \longrightarrow \mathbf{PGL}(V, K) \longrightarrow \{1\}$$

- Una representación proyectiva de un grupo  $G$  sobre un espacio vectorial  $V$  puede ser levantada a una representación lineal de una extensión central de  $G$  por un grupo Abeliano  $C$  tal que

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \{1\} & \longrightarrow & C & \longrightarrow & G^{\wedge} & \xrightarrow{\Pi} & G & \longrightarrow & \{1\} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \{1\} & \longrightarrow & K^* & \longrightarrow & GL(V, K) & \longrightarrow & \mathbf{PGL}(V, K) & \longrightarrow & \{1\}
 \end{array}$$

- Una representación proyectiva de un grupo  $G$  sobre un espacio vectorial  $V$  puede ser levantada a una representación lineal de una extensión central de  $G$  por un grupo Abeliano  $C$  tal que

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \{1\} & \longrightarrow & C & \longrightarrow & G^\wedge & \xrightarrow{\Pi} & G & \longrightarrow & \{1\} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \{1\} & \longrightarrow & K^* & \longrightarrow & GL(V, K) & \longrightarrow & PGL(V, K) & \longrightarrow & \{1\}
 \end{array}$$

- Así, toda sección  $S : G \longrightarrow G^\wedge$  satisface

$$S(gg') = C(g, g') S(g) S(g')$$

donde  $C(g, g')$  es un **2-cociclo** en  $\Lambda(G, C)$ .

### III - Extensiones centrales y la Mecánica Cuántica

---

- El espacio de estados de un sistema cuántico no relativista puede ser modelado como un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ .

### III - Extensiones centrales y la Mecánica Cuántica

- El espacio de estados de un sistema cuántico no relativista puede ser modelado como un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ .
- Sin embargo, estados contenidos en un mismo **rayo** son físicamente equivalentes.

### III - Extensiones centrales y la Mecánica Cuántica

- El espacio de estados de un sistema cuántico no relativista puede ser modelado como un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ .
- Sin embargo, estados contenidos en un mismo **rayo** son físicamente equivalentes.
- Por lo tanto, lo que es físicamente relevante es el espacio proyectivo asociado

$$\mathcal{H} / \{0\} \xrightarrow{\text{p}} \mathbf{P}\mathcal{H}$$

### III - Extensiones centrales y la Mecánica Cuántica

- El espacio de estados de un sistema cuántico no relativista puede ser modelado como un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ .
- Sin embargo, estados contenidos en un mismo **rayo** son físicamente equivalentes.
- Por lo tanto, lo que es físicamente relevante es el espacio proyectivo asociado

$$\mathcal{H} / \{0\} \xrightarrow{P} \mathbf{P}\mathcal{H}$$

- donde las magnitudes físicamente relevantes son las **probabilidades de transición**

$$P(p_x, p_y) = \frac{\langle x | y \rangle \langle y | x \rangle}{\langle x | x \rangle \langle y | y \rangle}$$

### III - Extensiones centrales y la Mecánica Cuántica

- El espacio de estados de un sistema cuántico no relativista puede ser modelado como un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ .
- Sin embargo, estados contenidos en un mismo **rayo** son físicamente equivalentes.
- Por lo tanto, lo que es físicamente relevante es el espacio proyectivo asociado

$$\mathcal{H} / \{0\} \xrightarrow{P} \mathbf{P}\mathcal{H}$$

- donde las magnitudes físicamente relevantes son las **probabilidades de transición**

$$P(p_x, p_y) = \frac{\langle x | y \rangle \langle y | x \rangle}{\langle x | x \rangle \langle y | y \rangle}$$

- Las **simetrías del sistema** son aquellas transformaciones de  $\mathbf{P}\mathcal{H}$  que preservan las probabilidades de transición.

- **Teorema de Wigner:** Sea  $g$  una simetría de  $\mathbf{P}\mathcal{H}$ , entonces existe un operador unitario o antiunitario  $U(g)$  sobre  $\mathcal{H}$  tal que

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{H} & \xrightarrow{\mathbf{p}} & \mathbf{P}\mathcal{H} \\
 U(g) \downarrow & & \downarrow g \\
 \mathcal{H} & \xrightarrow[\mathbf{p}]{} & \mathbf{P}\mathcal{H}
 \end{array}$$

es conmutativo. Más aún,  $U(g)$  es único a menos de un factor de fase.

- **Teorema de Wigner:** Sea  $g$  una simetría de  $\mathbf{P}\mathcal{H}$ , entonces existe un operador unitario o antiunitario  $U(g)$  sobre  $\mathcal{H}$  tal que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{p} & \mathbf{P}\mathcal{H} \\ U(g) \downarrow & & \downarrow g \\ \mathcal{H} & \xrightarrow[p]{} & \mathbf{P}\mathcal{H} \end{array}$$

es conmutativo. Más aún,  $U(g)$  es único a menos de un factor de fase.

- **Corolario:** Si  $g \in G$ , un grupo de Lie, entonces existe un 2-cociclo  $\varphi : G \times G \longrightarrow U(1)$  tal que

$$U(gg') = U(g) U(g') \varphi(gg').$$

## IV - Anomalías, leptones y hadrones, cuerdas.

- Fluctuaciones cuánticas pueden romper una simetría clásica:

***ANOMALIAS***

## IV - Anomalías, leptones y hadrones, cuerdas.

- Fluctuaciones cuánticas pueden romper una simetría clásica:

### ***ANOMALIAS***

- Modifican el álgebra de corrientes  $\longrightarrow$  extensión central = ***término de Schwinger*** :

$$\left[ J^a(x), J^b(y) \right] = \delta(x-y) f^{abc} J^c(x) + \underbrace{\mathcal{A} \delta'(x-y)}_{\text{Schwinger term}}$$

## IV - Anomalías, leptones y hadrones, cuerdas.

- Fluctuaciones cuánticas pueden romper una simetría clásica:

### ***ANOMALIAS***

- Modifican el álgebra de corrientes  $\longrightarrow$  extensión central = ***término de Schwinger*** :

$$\left[ J^a(x), J^b(y) \right] = \delta(x-y) f^{abc} J^c(x) + \underbrace{\mathcal{A} \delta'(x-y)}_{\text{Schwinger term}}$$

- El Modelo Estandar de las interacciones electrodébiles es una teoría quiral por lo tanto, está plagada de anomalías quirales de la simetría  $SU(2) \times U(1)$ .

## IV - Anomalías, leptones y hadrones, cuerdas.

- Fluctuaciones cuánticas pueden romper una simetría clásica:

### ***ANOMALIAS***

- Modifican el álgebra de corrientes  $\longrightarrow$  extensión central = ***término de Schwinger*** :

$$\left[ J^a(x), J^b(y) \right] = \delta(x-y) f^{abc} J^c(x) + \underbrace{\mathcal{A} \delta'(x-y)}_{\text{Schwinger term}}$$

- El Modelo Estandar de las interacciones electrodébiles es una teoría quiral por lo tanto, está plagada de anomalías quirales de la simetría  $SU(2) \times U(1)$ .
- Esto crea problemas de unitariedad y renormalizabilidad

## IV - Anomalías, leptones y hadrones, cuerdas.

- Fluctuaciones cuánticas pueden romper una simetría clásica:

### ***ANOMALIAS***

- Modifican el álgebra de corrientes  $\longrightarrow$  extensión central = ***término de Schwinger*** :

$$\left[ J^a(x), J^b(y) \right] = \delta(x-y) f^{abc} J^c(x) + \underbrace{\mathcal{A} \delta'(x-y)}_{\text{Schwinger term}}$$

- El Modelo Estandar de las interacciones electrodébiles es una teoría quiral por lo tanto, está plagada de anomalías quirales de la simetría  $SU(2) \times U(1)$ .
- Esto crea problemas de unitariedad y renormalizabilidad
- ***Mágicamente***, los **6 leptones** y los **6 quarks** ***cancelan*** entre sí las ***anomalías***!

# IV - Anomalías, leptones y hadrones, cuerdas.

- Fluctuaciones cuánticas pueden romper una simetría clásica:

## *ANOMALIAS*

- Modifican el álgebra de corrientes  $\longrightarrow$  extensión central = ***término de Schwinger*** :

$$\left[ J^a(x), J^b(y) \right] = \delta(x-y) f^{abc} J^c(x) + \underbrace{\mathcal{A} \delta'(x-y)}_{\text{Schwinger term}}$$

- El Modelo Estandar de las interacciones electrodébiles es una teoría quiral por lo tanto, está plagada de anomalías quirales de la simetría  $SU(2) \times U(1)$ .
- Esto crea problemas de unitariedad y renormalizabilidad
- ***Mágicamente***, los **6 leptones** y los **6 quarks** ***cancelan*** entre sí las ***anomalías***!
- Así, el Modelo de Glashow-Weinberg-Salam resulta en una teoría unitaria y renormalizable!

- En la Teoría de Cuerdas bosónicas, la invarianza bajo reparametrizaciones de la hoja de mundo es una simetría fundamental.

- En la Teoría de Cuerdas bosónicas, la invarianza bajo reparametrizaciones de la hoja de mundo es una simetría fundamental.
- Si  $h_{\alpha\beta}$  es la métrica en la hoja de mundo, esta simetría implica a restricción

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{2\pi}{\sqrt{h}} \frac{\delta S}{\delta h_{\alpha\beta}} = 0$$

- En la Teoría de Cuerdas bosónicas, la invarianza bajo reparametrizaciones de la hoja de mundo es una simetría fundamental.
- Si  $h_{\alpha\beta}$  es la métrica en la hoja de mundo, esta simetría implica a restricción

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{2\pi}{\sqrt{h}} \frac{\delta S}{\delta h_{\alpha\beta}} = 0$$

- Cuánticamente, y en coordenadas de cono de luz  $x_{\pm} = (x^0 \pm x^1)$ , el conmutador a tiempos iguales es

$$[T_{++}(x^1), T_{++}(y^1)] = i(T_{++}(x^1) + T_{++}(y^1))\delta'(x^1 - y^1) + \underbrace{\frac{i}{24}(26 - D)\delta'''(x^1 - y^1)}_{\text{Anomalía conforme}}$$

- En la Teoría de Cuerdas bosónicas, la invarianza bajo reparametrizaciones de la hoja de mundo es una simetría fundamental.
- Si  $h_{\alpha\beta}$  es la métrica en la hoja de mundo, esta simetría implica a restricción

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{2\pi}{\sqrt{h}} \frac{\delta S}{\delta h_{\alpha\beta}} = 0$$

- Cuánticamente, y en coordenadas de cono de luz  $x_{\pm} = (x^0 \pm x^1)$ , el conmutador a tiempos iguales es

$$[T_{++}(x^1), T_{++}(y^1)] = i(T_{++}(x^1) + T_{++}(y^1)) \delta'(x^1 - y^1) + \underbrace{\frac{i}{24} (26 - D) \delta'''(x^1 - y^1)}_{\text{Anomalía conforme}}$$

- la restricción cuántica es

$$T_{++}(x^1) |\varphi\rangle = 0 \iff \underline{D = 26} !!!$$

# V - La ecuación de Korteweg-de Vries

- La ecuación de Korteweg-de Vries

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

# V - La ecuación de Korteweg-de Vries

- La ecuación de Korteweg-de Vries

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

- describe la propagación de una onda solitaria unidimensional en un canal de agua poco profunda.

# V - La ecuación de Korteweg-de Vries

- La ecuación de Korteweg-de Vries

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

- describe la propagación de una onda solitaria unidimensional en un canal de agua poco profunda.
- Esta ecuación **no lineal** tiene como soluciones **ondas no-dispersivas: SOLITONES**.

# V - La ecuación de Korteweg-de Vries

- La ecuación de Korteweg-de Vries

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

- describe la propagación de una onda solitaria unidimensional en un canal de agua poco profunda.
- Esta ecuación **no lineal** tiene como soluciones **ondas no-dispersivas: SOLITONES**.
- Puede ser derivada como una generalización de la ecuación de ondas en 1 dimensión

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

# V - La ecuación de Korteweg-de Vries

- La ecuación de Korteweg-de Vries

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

- describe la propagación de una onda solitaria unidimensional en un canal de agua poco profunda.
- Esta ecuación **no lineal** tiene como soluciones **ondas no-dispersivas: SOLITONES**.
- Puede ser derivada como una generalización de la ecuación de ondas en 1 dimensión

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

- cuya solución general  $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$  corresponde a la relación de dispersión

$$\omega^2 = c^2 k^2 \quad \text{con} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad , \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

- Introduciendo en la ecuación derivadas de orden más alto de modo tal que  $\omega^2(k) \cong c^2 k^2 + \varepsilon k^4$  o,

$$\omega(k) = ck + \frac{1}{2c} k^3 \varepsilon$$

- Introduciendo en la ecuación derivadas de orden más alto de modo tal que  $\omega^2(k) \cong c^2 k^2 + \varepsilon k^4$  o,

$$\omega(k) = ck + \frac{1}{2c} k^3 \varepsilon$$

- y si la velocidad de propagación depende de la amplitud de la onda como

$$c(u) \cong c + \alpha u ,$$

- Introduciendo en la ecuación derivadas de orden más alto de modo tal que  $\omega^2(k) \cong c^2 k^2 + \varepsilon k^4$  o,

$$\omega(k) = ck + \frac{1}{2c} k^3 \varepsilon$$

- y si la velocidad de propagación depende de la amplitud de la onda como

$$c(u) \cong c + \alpha u ,$$

- pasando a un sistema de referencia con velocidad  $c$  haciendo  $x = x' + ct$  obtenemos

$$\frac{\partial u(t, x')}{\partial t} + \alpha u(t, x') \frac{\partial u(t, x')}{\partial x'} - \frac{\varepsilon}{2c} \frac{\partial^3 u(t, x')}{\partial x'^3} = 0$$

- Introduciendo en la ecuación derivadas de orden más alto de modo tal que  $\omega^2(k) \cong c^2 k^2 + \varepsilon k^4$  o,

$$\omega(k) = ck + \frac{1}{2c} k^3 \varepsilon$$

- y si la velocidad de propagación depende de la amplitud de la onda como

$$c(u) \cong c + \alpha u ,$$

- pasando a un sistema de referencia con velocidad  $c$  haciendo  $x = x' + ct$  obtenemos

$$\frac{\partial u(t, x')}{\partial t} + \alpha u(t, x') \frac{\partial u(t, x')}{\partial x'} - \frac{\varepsilon}{2c} \frac{\partial^3 u(t, x')}{\partial x'^3} = 0$$

- Ajustando escalas en  $t, x, u$  recuperamos

- Introduciendo en la ecuación derivadas de orden más alto de modo tal que  $\omega^2(k) \cong c^2 k^2 + \varepsilon k^4$  o,

$$\omega(k) = ck + \frac{1}{2c} k^3 \varepsilon$$

- y si la velocidad de propagación depende de la amplitud de la onda como

$$c(u) \cong c + \alpha u ,$$

- pasando a un sistema de referencia con velocidad  $c$  haciendo  $x = x' + ct$  obtenemos

$$\frac{\partial u(t, x')}{\partial t} + \alpha u(t, x') \frac{\partial u(t, x')}{\partial x'} - \frac{\varepsilon}{2c} \frac{\partial^3 u(t, x')}{\partial x'^3} = 0$$

- Ajustando escalas en  $t, x, u$  recuperamos



$$\frac{\partial v}{\partial \tau} - 6v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} = 0$$

## Gelfand-Fuks, Virasoro, Bott

- $\text{Vect}(S^1)$  denota el conjunto de todos los campos vectoriales sobre el círculo  $S^1$ ,  $v(\sigma) = f(\sigma) \partial_\sigma$

## Gelfand-Fuks, Virasoro, Bott

- $\text{Vect}(S^1)$  denota el conjunto de todos los campos vectoriales sobre el círculo  $S^1$ ,  $\boxed{v(\sigma) = f(\sigma) \partial_\sigma}$
- $\text{Vect}(S^1)$  es el álgebra de Lie de  $\text{Diff}(S^1)$ , con corchete

$$[f(\sigma) \partial_\sigma, g(\sigma) \partial_\sigma] = \left( \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} g(\sigma) - \frac{\partial g(\sigma)}{\partial \sigma} f(\sigma) \right) \frac{\partial}{\partial \sigma}$$

## Gelfand-Fuks, Virasoro, Bott

- $\text{Vect}(S^1)$  denota el conjunto de todos los campos vectoriales sobre el círculo  $S^1$ ,  $\boxed{v(\sigma) = f(\sigma) \partial_\sigma}$
- $\text{Vect}(S^1)$  es el álgebra de Lie de  $\text{Diff}(S^1)$ , con corchete

$$[f(\sigma) \partial_\sigma, g(\sigma) \partial_\sigma] = \left( \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} g(\sigma) - \frac{\partial g(\sigma)}{\partial \sigma} f(\sigma) \right) \frac{\partial}{\partial \sigma}$$

- Complexificando:  $\text{Vect}(S^1)_{\mathbb{C}} = \text{Vect}(S^1) \otimes \mathbb{C}$ , con base  $\{L_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ,

# Gelfand-Fuks, Virasoro, Bott

- $\text{Vect}(S^1)$  denota el conjunto de todos los campos vectoriales sobre el círculo  $S^1$ ,  $\boxed{v(\sigma) = f(\sigma) \partial_\sigma}$
- $\text{Vect}(S^1)$  es el álgebra de Lie de  $\text{Diff}(S^1)$ , con corchete

$$[f(\sigma) \partial_\sigma, g(\sigma) \partial_\sigma] = \left( \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} g(\sigma) - \frac{\partial g(\sigma)}{\partial \sigma} f(\sigma) \right) \frac{\partial}{\partial \sigma}$$

- Complexificando:  $\text{Vect}(S^1)_{\mathbb{C}} = \text{Vect}(S^1) \otimes \mathbb{C}$ , con base  $\{L_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ,



$$L_n = ie^{in\sigma} \partial_\sigma \longrightarrow \underbrace{[L_n, L_m] = (m - n) L_{m+n}}_{\text{álgebra de Witt}}$$

# Gelfand-Fuks, Virasoro, Bott

- $\text{Vect}(S^1)$  denota el conjunto de todos los campos vectoriales sobre el círculo  $S^1$ ,  $\boxed{v(\sigma) = f(\sigma) \partial_\sigma}$
- $\text{Vect}(S^1)$  es el álgebra de Lie de  $\text{Diff}(S^1)$ , con corchete

$$[f(\sigma) \partial_\sigma, g(\sigma) \partial_\sigma] = \left( \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} g(\sigma) - \frac{\partial g(\sigma)}{\partial \sigma} f(\sigma) \right) \frac{\partial}{\partial \sigma}$$

- Complexificando:  $\text{Vect}(S^1)_{\mathbb{C}} = \text{Vect}(S^1) \otimes \mathbb{C}$ , con base  $\{L_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ,

•

$$L_n = ie^{in\sigma} \partial_\sigma \longrightarrow \underbrace{[L_n, L_m] = (m - n) L_{m+n}}_{\text{álgebra de Witt}}$$

- Ob.:  $\{L_{-1}, L_0, L_1\}$  genera una copia de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

$$[L_0, L_{\pm 1}] = \pm L_{\pm 1} \quad , \quad [L_{-1}, L_1] = 2L_0$$

- El 2-cociclo de **Gelfand-Fuks** es la forma bilineal  
 $\omega : \text{Vect}(S^1) \otimes \text{Vect}(S^1) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\omega(f(\sigma) \partial_\sigma, g(\sigma) \partial_\sigma) := \int_{S^1} f'(\sigma) g''(\sigma) d\sigma$$

- El 2-cociclo de **Gelfand-Fuks** es la forma bilineal  
 $\omega : \text{Vect}(S^1) \otimes \text{Vect}(S^1) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\omega(f(\sigma) \partial_\sigma, g(\sigma) \partial_\sigma) := \int_{S^1} f'(\sigma) g''(\sigma) d\sigma$$

- y define la *extensión central* de  $\text{Vect}(S^1)$ :  $\mathfrak{vir} := \text{Vect}^\wedge(S^1)$ , denominada **álgebra de Virasoro**.

- El 2-cociclo de **Gelfand-Fuks** es la forma bilineal  
 $\omega : \text{Vect}(S^1) \otimes \text{Vect}(S^1) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\omega(f(\sigma) \partial_\sigma, g(\sigma) \partial_\sigma) := \int_{S^1} f'(\sigma) g''(\sigma) d\sigma$$

- y define la *extensión central* de  $\text{Vect}(S^1)$ :  $\text{vir} := \text{Vect}^\wedge(S^1)$ , denominada **álgebra de Virasoro**.
- cuyo corchete de Lie es

$$[(f\partial_\sigma, a), (g\partial_\sigma, b)] = (f'g - g'f) \partial_\sigma - \omega(f\partial_\sigma, g\partial_\sigma)$$

- El 2-cociclo de **Gelfand-Fuks** es la forma bilineal  
 $\omega : \text{Vect}(S^1) \otimes \text{Vect}(S^1) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\omega(f(\sigma)\partial_\sigma, g(\sigma)\partial_\sigma) := \int_{S^1} f'(\sigma)g''(\sigma)d\sigma$$

- y define la *extensión central* de  $\text{Vect}(S^1)$ :  $\text{vir} := \text{Vect}^\wedge(S^1)$ , denominada **álgebra de Virasoro**.
- cuyo corchete de Lie es

$$[(f\partial_\sigma, a), (g\partial_\sigma, b)] = (f'g - g'f)\partial_\sigma - \omega(f\partial_\sigma, g\partial_\sigma)$$

- El 2-cociclo de **Gelfand-Fuks** es básicamente único ya que  $H^2(\text{Vect}(S^1), \mathbb{R})$  es de dimensión 1.

- El álgebra de Virasoro es el álgebra de Lie del grupo de ***Virasoro-Bott***  $\widehat{\text{Diff}}(S^1)$ .

- El álgebra de Virasoro es el álgebra de Lie del grupo de **Virasoro-Bott**  $\widehat{\text{Diff}}(S^1)$ .
- $\widehat{\text{Diff}}(S^1)$  se construye como extensión central de  $\text{Diff}(S^1)$  por el **2-cociclo de Bott**  $B : \text{Diff}(S^1) \times \text{Diff}(S^1) \longrightarrow S^1$  :

$$B(\varphi, \psi) = \frac{1}{2} \int_{S^1} \ln(\varphi \circ \psi)' d \ln \psi'$$

- El álgebra de Virasoro es el álgebra de Lie del grupo de **Virasoro-Bott**  $\widehat{\text{Diff}}(S^1)$ .
- $\widehat{\text{Diff}}(S^1)$  se construye como extensión central de  $\text{Diff}(S^1)$  por el **2-cociclo de Bott**  $B : \text{Diff}(S^1) \times \text{Diff}(S^1) \longrightarrow S^1$  :

$$B(\varphi, \psi) = \frac{1}{2} \int_{S^1} \ln(\varphi \circ \psi)' d \ln \psi'$$

- Introduciendo la notación

$$\ell : S^1 \longrightarrow S^1 / \ell(\varphi)(\sigma) = \ln \varphi'(\sigma) \quad , \quad d\ell(\varphi)|_\sigma = \frac{\varphi''(\sigma)}{\varphi'(\sigma)} d\sigma$$

- El álgebra de Virasoro es el álgebra de Lie del grupo de **Virasoro-Bott**  $\widehat{\text{Diff}}(S^1)$ .
- $\widehat{\text{Diff}}(S^1)$  se construye como extensión central de  $\text{Diff}(S^1)$  por el **2-cociclo de Bott**  $B : \text{Diff}(S^1) \times \text{Diff}(S^1) \longrightarrow S^1$  :

$$B(\varphi, \psi) = \frac{1}{2} \int_{S^1} \ln(\varphi \circ \psi)' d \ln \psi'$$

- Introduciendo la notación

$$\ell : S^1 \longrightarrow S^1 / \ell(\varphi)(\sigma) = \ln \varphi'(\sigma) \quad , \quad d\ell(\varphi)|_\sigma = \frac{\varphi''(\sigma)}{\varphi'(\sigma)} d\sigma$$

- B puede escribirse como

$$B(\varphi, \psi) = \frac{1}{2} \int_{S^1} \ell(\varphi \circ \psi) d\ell(\psi) \quad .$$

## La acción coadjunta del grupo de Virasoro-Bott.

- Consideramos como espacio vectorial dual de  $\mathfrak{vir}$  como

$$\mathfrak{vir}_S^* = \Omega^1(S^1) \otimes_{C_{\mathbb{R}}^\infty(S^1)} \Omega^1(S^1) \oplus \mathbb{R}$$

## La acción coadjunta del grupo de Virasoro-Bott.

- Consideramos como espacio vectorial dual de  $\mathfrak{vir}$  como

$$\mathfrak{vir}_s^* = \Omega^1(S^1) \otimes_{C_{\mathbb{R}}^\infty(S^1)} \Omega^1(S^1) \oplus \mathbb{R}$$

- donde  $\Omega^{\otimes 2}(S^1)$  es el espacio de diferenciales cuadráticas sobre  $S^1$ , cuyos objetos son

$$\eta = g(\sigma) (d\sigma)^2 \quad / \quad g(\sigma) \in C^\infty(S^1)$$

## La acción coadjunta del grupo de Virasoro-Bott.

- Consideramos como espacio vectorial dual de  $\mathfrak{vir}$  como

$$\mathfrak{vir}_s^* = \Omega^1(S^1) \otimes_{C_{\mathbb{R}}^\infty(S^1)} \Omega^1(S^1) \oplus \mathbb{R}$$

- donde  $\Omega^{\otimes 2}(S^1)$  es el espacio de diferenciales cuadráticas sobre  $S^1$ , cuyos objetos son

$$\eta = g(\sigma) (d\sigma)^2 \quad / \quad g(\sigma) \in C^\infty(S^1)$$

- Para  $(\eta, a) \in \mathfrak{vir}_s^*$  y  $(v, b) \in \mathfrak{vir}$ ,

$$\langle (\eta, a), (v, b) \rangle := \int_0^{2\pi} g(\sigma) f(\sigma) d\sigma + ab$$

## La acción coadjunta del grupo de Virasoro-Bott.

- Consideramos como espacio vectorial dual de  $\mathfrak{vir}$  como

$$\mathfrak{vir}_s^* = \Omega^1(S^1) \otimes_{C_{\mathbb{R}}^\infty(S^1)} \Omega^1(S^1) \oplus \mathbb{R}$$

- donde  $\Omega^{\otimes 2}(S^1)$  es el espacio de diferenciales cuadráticas sobre  $S^1$ , cuyos objetos son

$$\eta = g(\sigma)(d\sigma)^2 \quad / \quad g(\sigma) \in C^\infty(S^1)$$

- Para  $(\eta, a) \in \mathfrak{vir}_s^*$  y  $(v, b) \in \mathfrak{vir}$ ,

$$\langle (\eta, a), (v, b) \rangle := \int_0^{2\pi} g(\sigma) f(\sigma) d\sigma + ab$$

- $\implies$  acciones coadjuntas de  $\mathfrak{vir}$  y  $\widehat{\text{Diff}}(S^1)$  sobre  $\mathfrak{vir}_s^*$ :

$$\begin{aligned} \widehat{\text{ad}}_v^*(\eta, a) &= \left( (2g(\sigma)f'(\sigma) + g'(\sigma)f(\sigma) + af'''(\sigma))(d\sigma)^2, 0 \right) \\ \widehat{\text{Ad}}_\varphi^*(\eta, a) &= \left( (g(\varphi(\sigma))(\varphi'(\sigma))^2 + aS_\sigma(\varphi))(d\sigma)^2, a \right) \end{aligned}$$

## Formulación hamiltoniana

- $\mathfrak{vir}_S^*$  tiene una estructura de Lie-Poisson

$$\{F, H\}(\eta, a) = \langle (\eta, a), [dF, dH] \rangle$$

## Formulación hamiltoniana

- $\mathfrak{vir}_S^*$  tiene una estructura de Lie-Poisson

$$\{F, H\}(\eta, a) = \langle (\eta, a), [dF, dH] \rangle$$

- campos vectoriales hamiltonianos

$$V_F(\eta, a) = \widehat{\text{ad}}_{dF}^*(\eta, a)$$

## Formulación hamiltoniana

- $\mathfrak{vir}_s^*$  tiene una estructura de Lie-Poisson

$$\{F, H\}(\eta, a) = \langle (\eta, a), [dF, dH] \rangle$$

- campos vectoriales hamiltonianos

$$V_F(\eta, a) = \widehat{\text{ad}}_{dF}^*(\eta, a)$$

- Introduzcamos el producto interno biparamétrico sobre  $\mathfrak{vir}_s$

$$\langle (u\partial_\sigma, b), (v\partial_\sigma, c) \rangle_{\alpha, \beta} := \int_{S^1} (\alpha uv + \beta u'v') d\sigma + bc$$

## Formulación hamiltoniana

- $\mathfrak{vir}_s^*$  tiene una estructura de Lie-Poisson

$$\{F, H\}(\eta, a) = \langle (\eta, a), [dF, dH] \rangle$$

- campos vectoriales hamiltonianos

$$V_F(\eta, a) = \widehat{\text{ad}}_{dF}^*(\eta, a)$$

- Introduzcamos el producto interno biparamétrico sobre  $\mathfrak{vir}_s$

$$\langle (u\partial_\sigma, b), (v\partial_\sigma, c) \rangle_{\alpha, \beta} := \int_{S^1} (\alpha uv + \beta u'v') d\sigma + bc$$

- $\star \alpha = 1$  and  $\beta = 0$ , es el producto interno usual de  $L^2$ ,

## Formulación hamiltoniana

- $\mathfrak{vir}_s^*$  tiene una estructura de Lie-Poisson

$$\{F, H\}(\eta, a) = \langle (\eta, a), [dF, dH] \rangle$$

- campos vectoriales hamiltonianos

$$V_F(\eta, a) = \widehat{\text{ad}}_{dF}^*(\eta, a)$$

- Introduzcamos el producto interno biparamétrico sobre  $\mathfrak{vir}_s$

$$\langle (u\partial_\sigma, b), (v\partial_\sigma, c) \rangle_{\alpha, \beta} := \int_{S^1} (\alpha uv + \beta u'v') d\sigma + bc$$

- $\star \alpha = 1$  and  $\beta = 0$ , es el producto interno usual de  $L^2$ ,
- $\star \alpha = \beta = 1$ , corresponde a la *clase de Sobolev*  $H^1$ .

- $\langle, \rangle_{\alpha, \beta}$  permite asociar a cada elemento de  $\mathfrak{vir}_s$  un elemento en  $\mathfrak{vir}_s^*$  :

$$u\partial_\sigma \longmapsto (\alpha u - \beta u'') (d\sigma)^2$$

- $\langle , \rangle_{\alpha, \beta}$  permite asociar a cada elemento de  $\mathfrak{vir}_s$  un elemento en  $\mathfrak{vir}_s^*$  :

$$u\partial_\sigma \longmapsto (\alpha u - \beta u'') (d\sigma)^2$$

- Consideremos la función de Hamilton

$$H(u) = \left\langle \left( (\alpha u - \beta u'') (d\sigma)^2, a \right), (u\partial_\sigma, b) \right\rangle$$

- $\langle , \rangle_{\alpha, \beta}$  permite asociar a cada elemento de  $\mathfrak{vir}_s$  un elemento en  $\mathfrak{vir}_s^*$  :

$$u\partial_\sigma \longmapsto (\alpha u - \beta u'') (d\sigma)^2$$

- Consideremos la función de Hamilton

$$H(u) = \left\langle \left( (\alpha u - \beta u'') (d\sigma)^2, a \right), (u\partial_\sigma, b) \right\rangle$$

- y la ecuación de movimiento en la órbita

$$\frac{d}{dt}(\eta, a) = \widehat{\text{ad}}_u^*(\eta, a)$$

- $\langle , \rangle_{\alpha, \beta}$  permite asociar a cada elemento de  $\mathfrak{vir}_s$  un elemento en  $\mathfrak{vir}_s^*$  :

$$u\partial_\sigma \longmapsto (\alpha u - \beta u'') (d\sigma)^2$$

- Consideremos la función de Hamilton

$$H(u) = \left\langle \left( (\alpha u - \beta u'') (d\sigma)^2, a \right), (u\partial_\sigma, b) \right\rangle$$

- y la ecuación de movimiento en la órbita

$$\frac{d}{dt}(\eta, a) = \widehat{\text{ad}}_u^*(\eta, a)$$

- que resulta en

$$\frac{d}{dt}(\alpha u - \beta u'') = 2\alpha uu' - 2\beta u'u'' + \alpha uu' - \beta uu''' + au'''$$

- $\alpha = 1, \beta = 0$   $\longrightarrow$  **KdV**

$$u_t - 3uu' - au''' = 0$$

- $\alpha = 1, \beta = 0$   $\longrightarrow$  ***KdV***

$$u_t - 3uu' - au''' = 0$$

- $\alpha = 1, \beta = 1$   $\longrightarrow$  ***Camassa-Holm***

$$u_t - u_t'' = 3uu' - 2u'u'' - uu''' + au'''$$

## VI - Modelo de Wess-Zumino-Novikov-Witten

- Sea  $G$  un grupo de Lie equipado con una forma bilineal Ad-invariante  $(\cdot, \cdot)_g$ , y  $LG = \text{Map}(S^1, G)$  (*grupo de lazos*),

## VI - Modelo de Wess-Zumino-Novikov-Witten

- Sea  $G$  un grupo de Lie equipado con una forma bilineal Ad-invariante  $(\cdot, \cdot)_g$ , y  $LG = \text{Map}(S^1, G)$  (*grupo de lazos*),
- el **modelo de WZNW** es una teoría de campos en  $1+1$ -dimensiones descrito por la acción

$$S_{WZNW} = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\partial_t g g^{-1}, \partial_\sigma g g^{-1})_g}_{\text{modelo } \sigma\text{-no lineal}} \pm \underbrace{\frac{1}{12} \int_B (dg g^{-1} \wedge [dg g^{-1}, dg g^{-1}])_g}_{\text{término de Wess-Zumino}}$$

## VI - Modelo de Wess-Zumino-Novikov-Witten

- Sea  $G$  un grupo de Lie equipado con una forma bilineal Ad-invariante  $(\cdot, \cdot)_{\mathfrak{g}}$ , y  $LG = \text{Map}(S^1, G)$  (*grupo de lazos*),
- el **modelo de WZNW** es una teoría de campos en  $1+1$ -dimensiones descrito por la acción

$$S_{WZNW} = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\partial_t g g^{-1}, \partial_\sigma g g^{-1})_{\mathfrak{g}}}_{\text{modelo } \sigma\text{-no lineal}} \pm \underbrace{\frac{1}{12} \int_B (dg g^{-1} \wedge [dg g^{-1}, dg g^{-1}])_{\mathfrak{g}}}_{\text{término de Wess-Zumino}}$$

- donde  $B$  es una variedad de dimensión 3 cuyo borde es  $\Sigma$ ,  $\partial B = \Sigma$ ,

## VI - Modelo de Wess-Zumino-Novikov-Witten

- Sea  $G$  un grupo de Lie equipado con una forma bilineal Ad-invariante  $(\cdot, \cdot)_{\mathfrak{g}}$ , y  $LG = \text{Map}(S^1, G)$  (*grupo de lazos*),
- el **modelo de WZNW** es una teoría de campos en  $1+1$ -dimensiones descrito por la acción

$$S_{WZNW} = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\partial_t g g^{-1}, \partial_{\sigma} g g^{-1})_{\mathfrak{g}}}_{\text{modelo } \sigma\text{-no lineal}} \pm \underbrace{\frac{1}{12} \int_B (dg g^{-1} \wedge [dg g^{-1}, dg g^{-1}])_{\mathfrak{g}}}_{\text{término de Wess-Zumino}}$$

- donde  $B$  es una variedad de dimensión 3 cuyo borde es  $\Sigma$ ,  $\partial B = \Sigma$ ,
- y  $(dg g^{-1} \wedge [dg g^{-1}, dg g^{-1}])_{\mathfrak{g}}$  es la 3-forma bi-invariante en  $LG$ .  $dg g^{-1}$  son las formas de Maurer-Cartan.

## VI - Modelo de Wess-Zumino-Novikov-Witten

- Sea  $G$  un grupo de Lie equipado con una forma bilineal Ad-invariante  $(\cdot, \cdot)_{\mathfrak{g}}$ , y  $LG = \text{Map}(S^1, G)$  (*grupo de lazos*),
- el **modelo de WZNW** es una teoría de campos en  $1+1$ -dimensiones descrito por la acción

$$S_{WZNW} = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\partial_t g g^{-1}, \partial_{\sigma} g g^{-1})_{\mathfrak{g}}}_{\text{modelo } \sigma\text{-no lineal}} \pm \underbrace{\frac{1}{12} \int_B (dg g^{-1} \wedge [dg g^{-1}, dg g^{-1}])_{\mathfrak{g}}}_{\text{término de Wess-Zumino}}$$

- donde  $B$  es una variedad de dimensión 3 cuyo borde es  $\Sigma$ ,  $\partial B = \Sigma$ ,
- y  $(dg g^{-1} \wedge [dg g^{-1}, dg g^{-1}])_{\mathfrak{g}}$  es la 3-forma bi-invariante en  $LG$ .  $dg g^{-1}$  son las formas de Maurer-Cartan.
- Este modelo está íntimamente ligado a las **anomalías** y **bosonización no abeliana**.

- Si  $\Sigma = S^1 \times \mathbb{R}$ , con coordenadas  $(t, \sigma)$ , donde  $\sigma \in S^1$ , la ecuación de movimiento es

$$\partial_t(g^{-1}\partial_t g) - \partial_\sigma(g^{-1}\partial_\sigma g) \pm [g^{-1}\partial_t g, g^{-1}\partial_\sigma g] = 0$$

- Si  $\Sigma = S^1 \times \mathbb{R}$ , con coordenadas  $(t, \sigma)$ , donde  $\sigma \in S^1$ , la ecuación de movimiento es

$$\partial_t(g^{-1}\partial_t g) - \partial_\sigma(g^{-1}\partial_\sigma g) \pm [g^{-1}\partial_t g, g^{-1}\partial_\sigma g] = 0$$

- con soluciones

$$g^+ = g_L(\sigma + t)g_R(\sigma - t)$$

$$g^- = g_R(\sigma - t)g_L(\sigma + t)$$

- Si  $\Sigma = S^1 \times \mathbb{R}$ , con coordenadas  $(t, \sigma)$ , donde  $\sigma \in S^1$ , la ecuación de movimiento es

$$\partial_t(g^{-1}\partial_t g) - \partial_\sigma(g^{-1}\partial_\sigma g) \pm [g^{-1}\partial_t g, g^{-1}\partial_\sigma g] = 0$$

- con soluciones

$$g^+ = g_L(\sigma + t)g_R(\sigma - t)$$

$$g^- = g_R(\sigma - t)g_L(\sigma + t)$$

- que satisfacen

$$\partial_t g_L = \partial_\sigma g_L \quad , \quad \partial_t g_R = -\partial_\sigma g_R$$

- Si  $\Sigma = S^1 \times \mathbb{R}$ , con coordenadas  $(t, \sigma)$ , donde  $\sigma \in S^1$ , la ecuación de movimiento es

$$\partial_t(g^{-1}\partial_t g) - \partial_\sigma(g^{-1}\partial_\sigma g) \pm [g^{-1}\partial_t g, g^{-1}\partial_\sigma g] = 0$$

- con soluciones

$$g^+ = g_L(\sigma + t)g_R(\sigma - t)$$

$$g^- = g_R(\sigma - t)g_L(\sigma + t)$$

- que satisfacen

$$\partial_t g_L = \partial_\sigma g_L \quad , \quad \partial_t g_R = -\partial_\sigma g_R$$

- $g_L$  y  $g_R$  son los ***modos quirales*** de propagación, izquierdo y derecho, respectivamente.

- Consideremos la 3-forma  $\Omega$  sobre  $B$ ,

$$\Omega = \int_B (dg \, g^{-1} \wedge [dg \, g^{-1}, dg \, g^{-1}])_{\mathfrak{g}} = (g^{-1} dg \wedge [g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg])_{\mathcal{G}}$$

- Consideremos la 3-forma  $\Omega$  sobre  $B$ ,

$$\Omega = \int_B (dg g^{-1} \wedge [dg g^{-1}, dg g^{-1}])_{\mathfrak{g}} = (g^{-1} dg \wedge [g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg])_{\mathcal{G}}$$

- que es invariante por izquierda, cerrada

$$d\Omega = 0$$

- Consideremos la 3-forma  $\Omega$  sobre  $B$ ,

$$\Omega = \int_B (dg g^{-1} \wedge [dg g^{-1}, dg g^{-1}])_{\mathfrak{g}} = (g^{-1} dg \wedge [g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg])_{\mathcal{G}}$$

- que es invariante por izquierda, cerrada

$$d\Omega = 0$$

- pero ***no exacta***. Sin embargo, en cada parche podemos encontrar una 2-forma  $\beta$  tal que  $d\beta = \Omega$ .

- Consideremos la 3-forma  $\Omega$  sobre  $B$ ,

$$\Omega = \int_B (dg g^{-1} \wedge [dg g^{-1}, dg g^{-1}])_{\mathfrak{g}} = (g^{-1} dg \wedge [g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg])_{\mathcal{G}}$$

- que es invariante por izquierda, cerrada

$$d\Omega = 0$$

- pero **no exacta**. Sin embargo, en cada parche podemos encontrar una 2-forma  $\beta$  tal que  $d\beta = \Omega$ .
- Sea  $B$  tal que  $H^3(B) \neq 0$ , y  $\gamma$  un 2-ciclo, entonces

$$W := \int_{\gamma} d^{-1}\Omega$$

- Consideremos la 3-forma  $\Omega$  sobre  $B$ ,

$$\Omega = \int_B (dg g^{-1} \wedge [dg g^{-1}, dg g^{-1}])_{\mathfrak{g}} = (g^{-1} dg \wedge [g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg])_{\mathfrak{g}}$$

- que es invariante por izquierda, cerrada

$$d\Omega = 0$$

- pero **no exacta**. Sin embargo, en cada parche podemos encontrar una 2-forma  $\beta$  tal que  $d\beta = \Omega$ .
- Sea  $B$  tal que  $H^3(B) \neq 0$ , y  $\gamma$  un 2-ciclo, entonces

$$W := \int_{\gamma} d^{-1}\Omega$$

- depende del parche que contiene a  $\gamma$  : si la 2-forma  $\beta$  es tal que  $d\beta = \Omega$

$$\implies W = \int_{\gamma} \beta$$

- Consideremos la 3-forma  $\Omega$  sobre  $B$ ,

$$\Omega = \int_B (dg g^{-1} \wedge [dg g^{-1}, dg g^{-1}])_{\mathfrak{g}} = (g^{-1} dg \wedge [g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg])_{\mathfrak{g}}$$

- que es invariante por izquierda, cerrada

$$d\Omega = 0$$

- pero **no exacta**. Sin embargo, en cada parche podemos encontrar una 2-forma  $\beta$  tal que  $d\beta = \Omega$ .
- Sea  $B$  tal que  $H^3(B) \neq 0$ , y  $\gamma$  un 2-ciclo, entonces

$$W := \int_{\gamma} d^{-1}\Omega$$

- depende del parche que contiene a  $\gamma$  : si la 2-forma  $\beta$  es tal que  $d\beta = \Omega$

$$\implies W = \int_{\gamma} \beta$$

- En otro parche que también contenga a  $\gamma$ , será otra 2-forma  $\beta'$  tal que  $d\beta' = \Omega$ .

- Consideremos la 3-forma  $\Omega$  sobre  $B$ ,

$$\Omega = \int_B (dg g^{-1} \wedge [dg g^{-1}, dg g^{-1}])_{\mathfrak{g}} = (g^{-1} dg \wedge [g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg])_{\mathfrak{g}}$$

- que es invariante por izquierda, cerrada

$$d\Omega = 0$$

- pero **no exacta**. Sin embargo, en cada parche podemos encontrar una 2-forma  $\beta$  tal que  $d\beta = \Omega$ .
- Sea  $B$  tal que  $H^3(B) \neq 0$ , y  $\gamma$  un 2-ciclo, entonces

$$W := \int_{\gamma} d^{-1}\Omega$$

- depende del parche que contiene a  $\gamma$ : si la 2-forma  $\beta$  es tal que  $d\beta = \Omega$

$$\implies W = \int_{\gamma} \beta$$

- En otro parche que también contenga a  $\gamma$ , será otra 2-forma  $\beta'$  tal que  $d\beta' = \Omega$ .
- $\implies$   $W$  es una funcional multivaluada.

- Sin embargo,  $\delta W$  es unívocamente definida:

$$\langle \delta W_{\beta}, \nu \rangle = \int_{\gamma} \mathbf{L}_{\nu} \beta = \int_{\gamma} \iota_{\nu} d\beta = \int_{\gamma} \iota_{\nu} \Omega$$

- Sin embargo,  $\delta W$  es unívocamente definida:

$$\langle \delta W_\beta, \nu \rangle = \int_\gamma \mathbf{L}_\nu \beta = \int_\gamma \iota_\nu d\beta = \int_\gamma \iota_\nu \Omega$$

- que en coordenadas  $(t, \sigma)$  resulta

$$\langle \delta W_\beta, \nu \rangle = 3 \int_\gamma (g^{-1} \nu, [g^{-1} \dot{g}, g^{-1} g'])_{\mathfrak{g}} dt dx$$

- Sin embargo,  $\delta W$  es unívocamente definida:

$$\langle \delta W_\beta, \nu \rangle = \int_\gamma \mathbf{L}_\nu \beta = \int_\gamma \iota_\nu d\beta = \int_\gamma \iota_\nu \Omega$$

- que en coordenadas  $(t, \sigma)$  resulta

$$\langle \delta W_\beta, \nu \rangle = 3 \int_\gamma (g^{-1} \nu, [g^{-1} \dot{g}, g^{-1} g'])_{\mathfrak{g}} dt dx$$

- La contribución a las ecuación de movimiento es proporcional a

$$\partial_0 (g^{-1} \partial_0 g) - \partial_1 (g^{-1} \partial_1 g) = \underbrace{k [g^{-1} \partial_0 g, g^{-1} \partial_1 g]}_{\text{originado en } \Omega}$$

- Sin embargo,  $\delta W$  es unívocamente definida:

$$\langle \delta W_\beta, \nu \rangle = \int_\gamma \mathbf{L}_\nu \beta = \int_\gamma \iota_\nu d\beta = \int_\gamma \iota_\nu \Omega$$

- que en coordenadas  $(t, \sigma)$  resulta

$$\langle \delta W_\beta, \nu \rangle = 3 \int_\gamma (g^{-1} \nu, [g^{-1} \dot{g}, g^{-1} g'])_{\mathfrak{g}} dt dx$$

- La contribución a las ecuación de movimiento es proporcional a

$$\partial_0 (g^{-1} \partial_0 g) - \partial_1 (g^{-1} \partial_1 g) = \underbrace{k [g^{-1} \partial_0 g, g^{-1} \partial_1 g]}_{\text{originado en } \Omega}$$

- que es un término puramente cinético!

- De hecho, considerado como un sistema hamiltoniano sobre  $T^*LG$ , ese término deriva de la forma simpléctica centralmente extendida

$$\omega_c|_{(g,\mu)} = \underbrace{\omega_o|_{(g,\mu)}}_{\text{forma canónica}} - \frac{1}{2} \underbrace{c_k}_{2 \text{ cociclo}} \circ (dgg^{-1} \wedge dgg^{-1}) \circ P_1^{\otimes 2}$$

- De hecho, considerado como un sistema hamiltoniano sobre  $T^*LG$ , ese término deriva de la forma simpléctica centralmente extendida

$$\omega_c|_{(g,\mu)} = \underbrace{\omega_o|_{(g,\mu)}}_{\text{forma canónica}} - \frac{1}{2} \underbrace{c_k}_{2 \text{ cociclo}} \circ (dgg^{-1} \wedge dgg^{-1}) \circ P_1^{\otimes 2}$$

- que tiene la forma explícita

$$c_k(X, Y) = \frac{k}{2\pi} \int_{S^1} (X(s), Y'(s))_g ds$$

- De hecho, considerado como un sistema hamiltoniano sobre  $T^*LG$ , ese término deriva de la forma simpléctica centralmente extendida

$$\omega_c|_{(g,\mu)} = \underbrace{\omega_o|_{(g,\mu)}}_{\text{forma canónica}} - \frac{1}{2} \underbrace{c_k}_{2 \text{ cociclo}} \circ (dgg^{-1} \wedge dgg^{-1}) \circ P_1^{\otimes 2}$$

- que tiene la forma explícita

$$c_k(X, Y) = \frac{k}{2\pi} \int_{S^1} (X(s), Y'(s))_{\mathfrak{g}} ds$$

★★★



I. M. Gelfand, D. B. Fuks, *Cohomology of the Lie algebra of vector fields on a circle*, Funct. Anal. Appl. 2 (1962), 342-343.



D. Korteweg, G. de Vries, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, Philosophical Magazine 39 (240): 422-443(1895).



B. Khesin, R. Wendt, *The geometry of infinite-dimensional groups*, Springer-Verlag, Berlin (2009).



A. Kirillov , *The orbits of the group of diffeomorphisms of the circle, and local Lie superalgebras*, Funct. Anal. Appl. 15:2 (1981), 135-136.



S.P. Novikov, *The Hamiltonian formalism and a many-valued analogue of Morse theory* ,Russ. Math. Surveys 37 (1982), 1-56.



C. Roger, *Extentions centrales d'algebres de Lie et des groupes de Lie de dimension infinie, algebre de Virasoro et generalizations*, Rep. Math. Phys. 35 (1995) 225-266.



G. Tuynman, W. Wiegerinck, *Central extensions and physics*, J.Geom. Phys. 4 (1987) 207-258.

MUCHAS GRACIAS!