Restabilización en Modelos de Asignación Muchos a Uno

Beatriz A. Millán

Departamento de Matemática-UNSJ
Instituto de Matemática Aplicada-UNSL

21 de Septiembre, 2016

Introducción

.

Introducción

- Los modelos de asignación bilateral han sido ampliamente utilizados en mercados laborales y en programas de elección de colegios.

Introducción

- Los modelos de asignación bilateral han sido ampliamente utilizados en mercados laborales y en programas de elección de colegios.
- Los agentes de un modelo de asignación se dividen en dos subconjuntos disjuntos, por ejemplo firmas y trabajadores. Cada trabajador tiene un orden de preferencia (salario, etc.) sobre las firmas, mientras que éstas ordenan sus trabajadores según algún criterio de aptitud para desarrollar la tarea.

Introducción

- Los modelos de asignación bilateral han sido ampliamente utilizados en mercados laborales y en programas de elección de colegios.
- Los agentes de un modelo de asignación se dividen en dos subconjuntos disjuntos, por ejemplo firmas y trabajadores. Cada trabajador tiene un orden de preferencia (salario, etc.) sobre las firmas, mientras que éstas ordenan sus trabajadores según algún criterio de aptitud para desarrollar la tarea.
- Un resultado es una asignación de trabajadores a las firmas y una de las propiedades más importantes que debe cumplir cualquier solución es la estabilidad. .

- Grandes progresos se han obtenido en mercados centralizados utilizando modelos de asignación bilateral, donde un ente central produce asignaciones estables.

- Grandes progresos se han obtenido en mercados centralizados utilizando modelos de asignación bilateral, donde un ente central produce asignaciones estables.

- Roth y Vande Vate (1992) y Blum, Roth y Rothblum (1997) extienden la teoría en un marco que pueda ser aplicada a mercados laborales descentralizados.

- Grandes progresos se han obtenido en mercados centralizados utilizando modelos de asignación bilateral, donde un ente central produce asignaciones estables.

- Roth y Vande Vate (1992) y Blum, Roth y Rothblum (1997) extienden la teoría en un marco que pueda ser aplicada a mercados laborales descentralizados.

  Muestran como un mercado puede retornar la estabilidad después de que una asignación estable es desestabilizada por el retiro de algunos trabajadores o la entrada de nuevas firmas.

- Grandes progresos se han obtenido en mercados centralizados utilizando modelos de asignación bilateral, donde un ente central produce asignaciones estables.

- Roth y Vande Vate (1992) y Blum, Roth y Rothblum (1997) extienden la teoría en un marco que pueda ser aplicada a mercados laborales descentralizados.

  Muestran como un mercado puede retornar la estabilidad después de que una asignación estable es desestabilizada por el retiro de algunos trabajadores o la entrada de nuevas firmas.

- Estudiamos en modelos de asignación muchos-a-uno, con preferencias para las firmas sustituibles y q-separables, procesos de restabilización de asignaciones que son desestabilizadas por cambios en la población.

Modelo de asignación bilateral muchos-a- uno

- $F = \{f_1, ..., f_n\}$, conjunto de n firmas,
  $W = \{w_1, ..., w_m\}$, conjunto de m de trabajadores.

Modelo de asignación bilateral muchos-a- uno

- $F = \{f_1, ..., f_n\}$, conjunto de n firmas,
  $W = \{w_1, ..., w_m\}$, conjunto de m de trabajadores.
- Cada $f \in F$ tiene una preferencia $P(f)$ sobre 2^W,

$$P(f_1) = \{w_1, w_3\}, \{w_2\}, \{w_1\}.$$

Modelo de asignación bilateral muchos-a- uno

- $F = \{f_1, ..., f_n\}$, conjunto de n firmas,
  $W = \{w_1, ..., w_m\}$, conjunto de m de trabajadores.
- Cada $f \in F$ tiene una preferencia $P(f)$ sobre 2^W,

  $$P(f_1) = \{w_1, w_3\}, \{w_2\}, \{w_1\}.$$

- Cada $w \in W$ tiene una preferencia $P(w)$ sobre $F \cup \{\emptyset\}$.

  $$P(w_1) = f_1, f_3.$$

Modelo de asignación bilateral muchos-a- uno

- $F = \{f_1, ..., f_n\}$, conjunto de n firmas,
  $W = \{w_1, ..., w_m\}$, conjunto de m de trabajadores.
- Cada $f \in F$ tiene una preferencia $P(f)$ sobre 2^W,
  $$P(f_1) = \{w_1, w_3\}, \{w_2\}, \{w_1\}.$$
- Cada $w \in W$ tiene una preferencia $P(w)$ sobre $F \cup \{\emptyset\}$.
  $$P(w_1) = f_1, f_3.$$
- $\mathbf{P} = (P(f_1), ..., P(f_n); P(w_1), ..., P(w_m))$ un perfil de preferencias.

Modelo de asignación bilateral muchos-a- uno

- $F = \{f_1, ..., f_n\}$, conjunto de n firmas,
  $W = \{w_1, ..., w_m\}$, conjunto de m de trabajadores.
- Cada $f \in F$ tiene una preferencia $P(f)$ sobre 2^W,
  $$P(f_1) = \{w_1, w_3\}, \{w_2\}, \{w_1\}.$$
- Cada $w \in W$ tiene una preferencia $P(w)$ sobre $F \cup \{\emptyset\}$.
  $$P(w_1) = f_1, f_3.$$
- $\mathbf{P} = (P(f_1), ..., P(f_n); P(w_1), ..., P(w_m))$ un perfil de preferencias.
- $(F, W, \mathbf{P})$ modelo de asignación muchos-a-uno.

Una asignación es una función $\mu : F \cup W \longrightarrow 2^{F \cup W}$ tal que, para todo $w \in W$ y $f \in F$:

1. $|\mu(w)| = 1$ y $\mu(w) \subseteq F$ o bien $\mu(w) = \emptyset$.
2. $\mu(f) \in 2^{W}$.
3. $\mu(w) = \{f\}$ si y solo si $w \in \mu(f)$.

Una asignación es una función $\mu : F \cup W \longrightarrow 2^{F \cup W}$ tal que, para todo $w \in W$ y $f \in F$:

1. $|\mu(w)| = 1$ y $\mu(w) \subseteq F$ o bien $\mu(w) = \emptyset$.
2. $\mu(f) \in 2^{W}$.
3. $\mu(w) = \{f\}$ si y solo si $w \in \mu(f)$.

Dados $F = \{f_1, f_2, f_3\}$, W$=\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ representamos μ por:

$$\mu = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \emptyset \\ \{w_3, w_4\} & \{w_1\} & \{\emptyset\} & \{w_2\} \end{pmatrix}.$$

Asignaciones estables

Dado $S \subseteq W$ y $f \in F$ definimos

$$Ch(S, P(f)) = max_{P(f)} Y \subseteq S$$

Asignaciones estables

Dado $S \subseteq W$ y $f \in F$ definimos

$$Ch(S, P(f)) = max_{P(f)} Y \subseteq S$$

Una asignación μ está bloqueada por:

Asignaciones estables

Dado $S \subseteq W$ y $f \in F$ definimos

$$Ch(S, P(f)) = max_{P(f)} Y \subseteq S$$

Una asignación μ está bloqueada por:

- un trabajador w si $\emptyset \; P(w) \; \mu(w)$,
- una firma f si $\mu(f) \neq Ch(\mu(f), P(f))$.

Asignaciones estables

Dado $S \subseteq W$ y $f \in F$ definimos

$$Ch(S, P(f)) = max_{P(f)} Y \subseteq S$$

Una asignación μ está bloqueada por:

- un trabajador w si $\emptyset \, P(w) \, \mu(w)$,
- una firma f si $\mu(f) \neq Ch(\mu(f), P(f))$.

Definición

Una asignación μ es individualmente racional si no está bloqueada por ningún agente

Una asignación μ está bloqueada por el par de agentes (f, w) si

- $w \notin \mu(f)$,
- $w \in Ch(\mu(f) \cup \{w\}, P(f))$ y $f\, P(w)\, \mu(w)$.

Una asignación μ está bloqueada por el par de agentes (f, w) si

- $w \notin \mu(f)$,
- $w \in Ch(\mu(f) \cup \{w\}, P(f))$ y $f \, P(w) \, \mu(w)$.

Definición

Una asignación μ es estable si no está bloqueada por un agente ni por un par de agentes.

Una asignación μ está bloqueada por el par de agentes (f, w) si

- $w \notin \mu(f)$,
- $w \in Ch(\mu(f) \cup \{w\}, P(f))$ y $f \; P(w) \; \mu(w)$.

Definición

Una asignación μ es estable si no está bloqueada por un agente ni por un par de agentes.

$S(F, W, \mathbf{P})$ conjunto de asignaciones estables.

Definición

Una preferencia $P(f)$ *de la firma* f *es sustituible si para cualquier* $S \subseteq W$ *tal que* $w, w' \in S$ *y* $w \neq w'$, *si* $w \in Ch(S, P(f))$ *entonces* $w \in Ch(S \setminus \{w'\}, P(f))$.

Definición

Una preferencia $P(f)$ de la firma f es sustituible si para cualquier $S \subseteq W$ tal que $w, w' \in S$ y $w \neq w'$, si $w \in Ch(S, P(f))$ entonces $w \in Ch(S \setminus \{w'\}, P(f))$.

Un perfil $\mathbf{P}$ es sustituible si $P(f)$ es sustituible para cada firma f.

Definición

Una preferencia $P(f)$ de la firma f es sustituible si para cualquier $S \subseteq W$ tal que $w, w' \in S$ y $w \neq w'$, si $w \in Ch(S, P(f))$ entonces $w \in Ch(S \setminus \{w'\}, P(f))$.

Un perfil $\mathbf{P}$ es sustituible si $P(f)$ es sustituible para cada firma f.

Teorema

Sea $\mathbf{P}$ sustituible. Entonces $S(F, W, \mathbf{P}) \neq \emptyset$ y existen $\mu_F, \mu_W \in S(F, W, \mathbf{P})$ tal que para todo $\mu \in S(F, W, \mathbf{P})$:

$$\mu_F(f) R(f) \mu(f) R(f) \mu_W(f) \quad \text{para todo } f \in F \text{ y}$$

$$\mu_W(f) R(w) \mu(f) R(w) \mu_F(f) \quad \text{para todo } w \in W.$$

Sea $(F, W, \mathbf{P})$ un modelo de asignación muchos-a-uno, con $\mathbf{P}$ un perfil de preferencias sustituible.

Sea $(F, W, \mathbf{P})$ un modelo de asignación muchos-a-uno, con $\mathbf{P}$ un perfil de preferencias sustituible.

Definición

Una preferencia $P(f)$ de la firma f es q-separable si:

1. *para cualquier conjunto de trabajadores S tal que $|S| \leq q_f$ y $w \notin S$ tenemos que $S \cup \{w\} P(f) S$ si y solo si $wP(f)\emptyset$, y*
2. *$\emptyset P(f) S$ para todo S tal que $|S| \leq q_f$.*

Sea $(F, W, \mathbf{P})$ un modelo de asignación muchos-a-uno, con $\mathbf{P}$ un perfil de preferencias sustituible.

Definición

Una preferencia $P(f)$ de la firma f es q-separable si:

1. *para cualquier conjunto de trabajadores S tal que $|S| \leq q_f$ y $w \notin S$ tenemos que $S \cup \{w\} P(f) S$ si y solo si $wP(f)\emptyset$, y*
2. *$\emptyset P(f) S$ para todo S tal que $|S| \leq q_f$.*

Denotamos con $q = (q_f)_{f \in F}$ la lista de cuotas.

Martinez, Neme, Masso y Oviedo (2001):

Teorema

Sea $\mathbf{P}$ *un perfil de preferencias sustituible y q-separable. Entonces* $(S(F, W, \mathbf{P}), \succeq_W)$ *es un reticulado.*

Martinez, Neme, Masso y Oviedo (2001):

Teorema

Sea $\mathbf{P}$ *un perfil de preferencias sustituible y q-separable. Entonces* $(S(F,W,\mathbf{P}),\succeq_W)$ *es un reticulado.*

Corolario

Sea $\mathbf{P}$ *un perfil de preferencias sustituible y q-separable. Entonces* $(S(F,W,\mathbf{P}),\succeq_F^B)$ *es un reticulado.*

Asignaciones cuasi-estables

Retiro de trabajadores del mercado o creación de firmas.

Asignaciones cuasi-estables

Retiro de trabajadores del mercado o creación de firmas.

$$(F', W', \mathbf{P}')$$

Asignaciones cuasi-estables

Retiro de trabajadores del mercado o creación de firmas.

$$(F', W', \mathbf{P}') \xrightarrow[W \subseteq W' \text{ y } F' \subseteq F]{}$$

Asignaciones cuasi-estables

Retiro de trabajadores del mercado o creación de firmas.

$$(F', W', \mathbf{P}') \xrightarrow[W \subseteq W' \text{ y } F' \subseteq F]{} (F, W, \mathbf{P})$$

Asignaciones cuasi-estables

Retiro de trabajadores del mercado o creación de firmas.

$$(F', W', \mathbf{P}') \xrightarrow[W \subseteq W' \text{ y } F' \subseteq F]{} (F, W, \mathbf{P})$$

μ' Estable

Asignaciones cuasi-estables

Retiro de trabajadores del mercado o creación de firmas.

$$(F', W', \mathbf{P}') \xrightarrow[W \subseteq W' \text{ y } F' \subseteq F]{} (F, W, \mathbf{P})$$

μ' Estable $\longrightarrow$

Asignaciones cuasi-estables

Retiro de trabajadores del mercado o creación de firmas.

$$(F', W', \mathbf{P}') \xrightarrow[W \subseteq W' \text{ y } F' \subseteq F]{} (F, W, \mathbf{P})$$

$$\mu' \ \text{Estable} \longrightarrow \text{¿ } \mu \text{ ?}$$

Asignaciones cuasi-estables

Retiro de trabajadores del mercado o creación de firmas.

$$(F', W', \mathbf{P}') \xrightarrow{\hspace{3cm}} (F, W, \mathbf{P})$$

$W \subseteq W'$ y $F' \subseteq F$

μ' Estable $\xrightarrow{\hspace{3cm}}$ ¿ μ ? Firma-cuasi-estable

Asignaciones cuasi-estables

Retiro de trabajadores del mercado o creación de firmas.

$$(F', W', \mathbf{P}') \xrightarrow[W \subseteq W' \text{ y } F' \subseteq F]{} (F, W, \mathbf{P})$$

μ' Estable $\longrightarrow$ ¿ μ ? Firma-cuasi-estable

Sea μ una asignación y $f \in F$, $W_{f,\mu} = \{w \in W : fP(w)\mu(w)\}$.

Asignaciones cuasi-estables

Retiro de trabajadores del mercado o creación de firmas.

$$(F', W', \mathbf{P'}) \xrightarrow{\hspace{3cm}} (F, W, \mathbf{P})$$

$$W \subseteq W' \text{ y } F' \subseteq F$$

$$\mu' \text{ Estable} \xrightarrow{\hspace{3cm}} ¿\ \mu\ ? \text{ Firma-cuasi-estable}$$

Sea μ una asignación y $f \in F$, $W_{f,\mu} = \{w \in W : fP(w)\mu(w)\}$.

Definición

Una asignación μ es firma-cuasi-estable si es I.R. y para toda $f \in F$, $S \subseteq W_{f,\mu}$ con $S \neq \emptyset$, $\mu(f) \subseteq Ch(\mu(f) \cup S, P(f))$.

Algoritmo Set Offering (SO)

Retiro de trabajadores del mercado o la creación de firmas

Algoritmo Set Offering (SO)

Retiro de trabajadores del mercado o la creación de firmas

- Cantala (2003) muestra que el mercado alcanza nuevamente la estabilidad. Diseña un algoritmo que imita el proceso de restabilización de un mercado descentralizado.

Algoritmo Set Offering (SO)

Retiro de trabajadores del mercado o la creación de firmas

- Cantala (2003) muestra que el mercado alcanza nuevamente la estabilidad. Diseña un algoritmo que imita el proceso de restabilización de un mercado descentralizado.

$\downarrow$ Extendemos

Algoritmo Set Offering (SO)

Retiro de trabajadores del mercado o la creación de firmas

- Cantala (2003) muestra que el mercado alcanza nuevamente la estabilidad. Diseña un algoritmo que imita el proceso de restabilización de un mercado descentralizado.

$\downarrow$ Extendemos

- Mostramos una forma simple de calcular el resultado de la ejecución de dicho algoritmo.

Algoritmo Set Offering (SO)

Retiro de trabajadores del mercado o la creación de firmas

- Cantala (2003) muestra que el mercado alcanza nuevamente la estabilidad. Diseña un algoritmo que imita el proceso de restabilización de un mercado descentralizado.

$\big\downarrow$ Extendemos

- Mostramos una forma simple de calcular el resultado de la ejecución de dicho algoritmo.

- Describimos la relación entre la asignación estable inicial y la asignación estable alcanzada , después del proceso de restabilización.

Algoritmo Set Offering (SO)

Entrada Sea $(F, W, \mathbf{P})$ un modelo y μ una asignación.

Etapa inicial

(a) $\mu^0 = \mu$ y $i = 1$.

(b) para todo $f \in F$ sea $A_f^0 = \{w \in W : w \notin \mu^0(f)$ y existe $S \in 2^W$ tal que $|S| < q_f$ y $S \cup \{w\} P(f) S\}$.

Etapa de iteración

(1) Para todo $f \in F$, $S_f^{i-1} = Ch(A_f^{i-1} \cup \mu^{i-1}(f), P(f)) \setminus \mu^{i-1}(f)$.

(2) Si no existe $f \in F$ tal que $S_f^{i-1} \neq \emptyset$ paramos con resultado μ^{i-1}, de lo contrario cada firma f hace una oferta a los trabajadores en S_f^{i-1}.

(3) Para cada $w \in W$ que recibe una oferta en el paso (2) , sea $T_w^{i-1} = \{f \in F : f = \mu^{i-1}(w) \text{ o } w \in S_f^{i-1}\}$ y definimos $\mu^i(w)$ como el elemento más preferido según $P(w)$ en T_w^{i-1}.
Para todo $w' \in W$ que no recibe una oferta en el paso (2), $\mu^i(w') = \mu^{i-1}(w')$.

(4) Finalmente $A_f^i = A_f^{i-1} \setminus S_f^{i-1}$ para toda firma f.

(5) Para $i = i + 1$, ir a (1).

(3) Para cada $w \in W$ que recibe una oferta en el paso (2) , sea $T_w^{i-1} = \{f \in F : f = \mu^{i-1}(w)$ o $w \in S_f^{i-1}\}$ y definimos $\mu^i(w)$ como el elemento más preferido según $P(w)$ en T_w^{i-1}.
Para todo $w' \in W$ que no recibe una oferta en el paso (2), $\mu^i(w') = \mu^{i-1}(w')$.

(4) Finalmente $A_f^i = A_f^{i-1} \setminus S_f^{i-1}$ para toda firma f.

(5) Para $i = i + 1$, ir a (1).

Teorema

Si la entrada del algoritmo SO es una asignación firma-cuasi-estable entonces las asignaciones intermedias del algoritmo son firma-cuasi-estables y la asignación resultante es estable.

Dada una asignación μ, definimos el conjunto:

$$S_W(\mu) = \{\mu' \in S(F, W, \mathbf{P}) : \mu' \succeq_W \mu\}.$$

Dada una asignación μ, definimos el conjunto:

$$S_W(\mu) = \{\mu' \in S(F, W, \mathbf{P}) : \mu' \succeq_W \mu\}.$$

Teorema

Sea $\mu \in FQS(F, W, \mathbf{P})$. Entonces $(SO)(\mu) \in S_W(\mu)$ y $\mu' \succeq_W (SO)(\mu)$ para todo $\mu' \in S_W(\mu)$.

Dada una asignación μ, definimos el conjunto:

$$S_W(\mu) = \{\mu' \in S(F, W, \mathbf{P}) : \mu' \succeq_W \mu\}.$$

Teorema

Sea $\mu \in FQS(F, W, \mathbf{P})$. Entonces $(SO)(\mu) \in S_W(\mu)$ y $\mu' \succeq_W (SO)(\mu)$ para todo $\mu' \in S_W(\mu)$.

Lema

Sea $\mu \in FQS(F, W, \mathbf{P})$. Entonces $S_W(\mu)$ es un sub-reticulado no vacío de $S(F, W, \mathbf{P})$.

Teorema

Si $\mu \in FQS(F, W, \mathbf{P})$ *entonces* $(SO)(\mu) = \overline{\curlywedge}_W S_W(\mu)$.

Teorema

Si $\mu \in FQS(F, W, \mathbf{P})$ *entonces* $(SO)(\mu) = \overline{\curlywedge}_W S_W(\mu)$.

Teorema

Sea $\mu \in FQS(F, W, \mathbf{P})$. *Entonces* $(SO)(\mu) = \mu \veebar_W \mu_F$.

$(F', W', \mathbf{P}')$

$$(F', W', \mathbf{P}') \xrightarrow[W \subseteq W' \text{ y } F' \subseteq F]{}$$

$$(F', W', \mathbf{P}') \xrightarrow[W \subseteq W' \text{ y } F' \subseteq F]{} (F, W, \mathbf{P})$$

$$(F', W', \mathbf{P}') \xrightarrow[W \subseteq W' \text{ y } F' \subseteq F]{} (F, W, \mathbf{P})$$

$$\mu'$$

$$(F', W', \mathbf{P}') \longrightarrow (F, W, \mathbf{P})$$

$W \subseteq W'$ y $F' \subseteq F$

$$\mu' \longrightarrow$$

$$(F', W', \mathbf{P}') \longrightarrow (F, W, \mathbf{P})$$

$W \subseteq W'$ y $F' \subseteq F$

$$\mu' \longrightarrow \mu$$

$$(F', W', \mathbf{P}') \xrightarrow{\hspace{4cm}} (F, W, \mathbf{P})$$

$W \subseteq W'$ y $F' \subseteq F$

$$\mu' \longrightarrow \mu \longrightarrow$$

$$(F', W', \mathbf{P}') \longrightarrow (F, W, \mathbf{P})$$

$W \subseteq W'$ y $F' \subseteq F$

$$\mu' \longrightarrow \mu \longrightarrow (SO)(\mu)$$

$$(F', W', \mathbf{P}') \xrightarrow{\hspace{3cm}} (F, W, \mathbf{P})$$

$W \subseteq W'$ y $F' \subseteq F$

$$\mu' \longrightarrow \mu \longrightarrow (SO)(\mu)$$

Lema

Sean $\mu' \in S(F', W', \mathbf{P}')$ y μ la asignación inducida por μ' en $(F, W, \mathbf{P})$. Entonces $\mu' \succeq_{F'}^{\mathbf{P}'_{\mathbf{B}}} (SO)(\mu)$

$$(F', W', \mathbf{P}') \longrightarrow (F, W, \mathbf{P})$$

$$W \subseteq W' \text{ y } F' \subseteq F$$

$$\mu' \longrightarrow \mu \longrightarrow (SO)(\mu)$$

Lema

Sean $\mu' \in S(F', W', \mathbf{P}')$ *y* μ *la asignación inducida por* μ' *en* $(F, W, \mathbf{P})$. *Entonces* $\mu' \succeq_{F'}^{\mathbf{P}'_{\mathbf{B}}} (SO)(\mu)$

Corolario

Sean $\mu' \in S(F', W', \mathbf{P})$, μ *la asignación inducida por* μ' *en* $(F, W, \mathbf{P})$ *y* $f \in F \setminus F'$. *Entonces* $[(SO)(\mu)](f) = \mu_F(f)$.

Corolario

Sean $\mu'_1, \mu'_2 \in S(F', W', \mathbf{P}')$ *y* μ_1, μ_2 *inducidas en* $(F, W, \mathbf{P})$. *Si* $\mu'_1 \succeq_W^{\mathbf{P}'} \mu'_2$ *entonces* $(SO)(\mu_1) \succeq_W^{\mathbf{P}} (SO)(\mu_2)$

Corolario

Sean $\mu'_1, \mu'_2 \in S(F', W', \mathbf{P}')$ *y* μ_1, μ_2 *inducidas en* $(F, W, \mathbf{P})$. *Si* $\mu'_1 \succeq_W^{\mathbf{P}'} \mu'_2$ *entonces* $(SO)(\mu_1) \succeq_W^{\mathbf{P}} (SO)(\mu_2)$

Teorema

Sean μ'_W *la asignación óptima para los trabajadores en* $(F', W', \mathbf{P}')$ *y* μ_W *la asignación óptima para los trabajadores en* $(F, W, \mathbf{P})$. *Entonces*

$$\mu_W \succeq_W^{\mathbf{P}} \mu'_W \quad , \quad \mu'_W \succeq_{F'}^{\mathbf{P}'_{\mathbf{B}}} \mu_W .$$