Filtrado e identificación de parámetros mediante métodos bayesianos

Guillermo La Mura [a], Eduardo Serrano [b,d], Ricardo Sirne [c]

[a] Escuela de Ciencia y Tecnología - UNSAM

[b] Centro de Matemática Aplicada - UNSAM

[c] Facultad de Ingeniería - Universidad de Buenos Aires

[d] Escuela Superior Técnica -FE-UNDEF

UMA 2016 - Bahía Blanca (ARG)

Índice

1 Introducción

2 Filtrado y estimación

3 Primera aproximación

4 Algoritmo de filtrado y estimación conjunto.

5 Ejemplos

6 Conclusiones

El modelo sistémico

- Consideramos el sistema:

$$\begin{cases} x' & = f(t, x, \theta, u) \\ y & = g(x, u) \\ x_0 & = \text{condición inicial} \end{cases}$$

  donde t es el tiempo, x representa el estado, y la salida observable, θ un vector de parámetros y u la acción externa, controlada.

- La funciones f y g son, en general, no lineales y suaves, de modo que el problema tiene única solución en un rango admisible de parámetros.

- Conocido θ es posible estimar el estado x a partir de las salidas y y las entradas u.
- Conocido θ es posible diseñar u de modo de controlar o ajustar el estado x a ciertas referencias o especificaciones.

Ejemplo

- Sistema LCI:

$$\begin{cases} X' & = A_\theta x + Bu \\ y & = Cx + Du \\ x_0 & = \text{condición inicial} \end{cases}$$

- La observabilidad depende de las matrices A_θ y C y la controlabilidad de A_θ y B.
- En tal caso es posible diseñar un control mediante técnicas PID o por colocación de polos y ceros.

El problema.

- Consideramos ahora el sistema observable:

$$\begin{cases} x' & = f(t, x, \theta, u) \\ z_k & = g(x(t_k)) + \nu_k \\ x_0 & = \text{condición inicial} \end{cases}$$

con las observaciones registradas en una red discreta $t_k = k\Delta_t$, perturbados por ruido blanco.

- Suponiendo que la condición inicial y el parámetro son inciertos y se cuentan con datos
- $z_{0:n} = \{z_k, k = 0 : n\}$ y $u_{0:n} = \{u(t_k), k = 0 : n\}$ se plantean los siguientes problemas:
  - Filtrar la salida, estimando $y_k = y(t_k)$.
  - Estimar el parámetro θ.
  - Reajustar, la acción de control para $t > t_n$.

Problema Mixto

- Focalizamos dos primeros problemas, teniendo en cuenta que el control puede diseñarse a partir de los estimados $\hat{\theta}$ y $\hat{y}_k$, o bien por otras técnicas de control robusto o adaptativo.
- El filtrado y estimación conjunta, a partir de sistemas dados por ecuaciones diferenciales es un problema complejo y de actualidad en la reciente literatatura.

Esquemas bayesianos

- Los métodos bayesianos, óptimos o sub-óptimos permiten encarar el problema de filtrado, conocido el modelo, el parámetro y la estadística del ruido
- En forma dual, a partir de observaciones exactas o con un muy bajo nivel de ruido, se puede estimar el parámetro a partir de las observaciones.
- El problema mixto de estimación y filtrado induce a combinar los dos esquemas.

- El conocido filtro de Kalman, algoritmo bayesiano óptimo, puede aplicarse en modelos discretos lineales el ruido se supone gaussiano.
- Si éste no es el caso, se recurre a algoritmos sub-ótimos, de variada estructura: Kalman extendido, *unscentend* Kalman, filtros de grilla y de partículas, para citar los más conocidos.
- Cuando deben emplearse estas técnicas a partir de modelos dados por ecuaciones diferenciales, debe realizarse una previa discretización.

Ilustrando el problema

- No hay una respuesta general y unánime para el problema mixto o combinado.
- Para ilustrar ideas estudiamos el sencillo problema lineal y unidimensional:

$$\begin{cases} x' & = -\theta x + 1 \\ z_k & = x(t_k) + \nu_k \\ x_0 & = \text{condición inicial} \end{cases}$$

donde $\theta \in (0,1)$, $x_0 \in (0,5)$ inciertos, $\nu_k \sim \mathcal{N}(\prime, \sigma)$, iid y Δ_t,el intervalo de muestreo conocido.

- El paso previo consiste en plantear un modelo discreto.

$$\begin{cases} x_k &= RK\left(f(t_{k-1}, \theta, x_{k-1})\right) \\ z_k &= x_k + \nu_k \\ x_0 &= \text{condición inicial} \end{cases}$$

- Ésto es delicado ya que, en función de las estimaciones, se requiere preservar suficiente exactitud.
- Nuestra opción actual es utilizar un esquema de Runge-Kutta de orden 4, simbolizado por RK.

- En este caso, el sistema es lineal.
- Si θ fuese conocido es posible la redución

$$\begin{cases} x_k &= \tilde{f}_\theta x_{k-1} + 1 \\ z_k &= x_k + \nu_k \\ x_0 &= \text{condición inicial} \end{cases}$$

y aplicarse Kalman en forma eficiente para el filtrado.

- Si el ruido no fuera significativo, la estimación de θ se plantea:

$$\begin{cases} \tilde{\theta}_{k+1} & = \tilde{\theta}_k \\ x_{k+1} & = \tilde{f}_{\tilde{\theta}} x_k + 1 \\ x_0 & = \text{condición inicial} \end{cases}$$

  aplicando Kalman en este modelo dual.
- Sin embargo, simulando y utilizando estos esquemas Kalman alternativamente a partir de los datos observados, con ruido, y de estimaciones iniciales aproximadas del estado y del parámetro, no se obtienen los resultados positivos.

Propuesta

- Puede profundizarse el estudio del caso, pero proponemos avanzar en otra dirección.
- Proponemos utilizar un esquema combinado de grillas.
- Exponemos el esquema para sistemas unidimensionales, mono-paramétricos.

Esquema

- Para el sistema unidimensional

$$\begin{cases} x' & = f(t, x, \theta, u) \\ z_k & = x(t_k) + \nu_k \\ x_0 & = \text{condición inicial} \end{cases}$$

con $\theta \in J$, $x_0 \in I$ inciertos $\nu_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$, iid para cada $k \geq 0$:

  - Datos disponibles: $t_{0:k}$, $z_{0:k}$, $u_{0:k}$.
  - Grilla de estados: $X_k = \{x_k^i; i = 1 : N\}$
  - Grilla de parámetros: $\Theta_k = \{\theta_k^j; j = 1 : M\}$
  - Pesos grilla de estados : $W_k = \{w_k^i : i = 1 : N\}$
  - Pesos grilla de parámetros : $V_k = \{v_k^j; j = 1 : M\}$

Observaciones:

- Se suponen conocidas las distribuciones a priori de $\theta \in J$ y de $x_0 \in I$.
- Se supone $w_k^i \sim \mathcal{P}(x_k = x_k^i / z_{0:k})$
- Se supone $v_k^j \sim \mathcal{P}(\theta = \theta_j / x_{k+1})$.
- Al no haber ruido en el modelo: $\mathcal{P}(x_k^i / x_{k-1}^j) = \delta_{i,j}$.
- Asimismo $\mathcal{P}(\theta_k^i / \theta_{k-1}^j) = \delta_{i,j}$.

Algortimo: Inicio

- Establecer grillas iniciales X_0 y Θ_0.
- definir los pesos iniciales W_0 y V_0. Pueden ser uniformes o ajustarse a una hipótesis previa.
- Continuar para cada $k > 0$.

Algoritmo: Estimación de estado

- Con cada θ^j_{k-1}, con el esquema discreto generar una grilla: $X_{k-1} \xrightarrow{RK,\theta^j_{k-1}} X_{j,k}$
- Grilla media $X_k = \sum_j X_{j,k} v^j_{k-1}$
- A partir de la relación $z_k - x^i_k \sim \mathcal{N}(0,\sigma)$ definir distribución $\pi^i_k = \mathcal{P}(z_k / x_k = x^i_k)$
- actualizar pesos W_k :

$$w^i_k = \frac{w^i_{k-1}\pi_k i}{\sum_j w^j_{k-1}\pi^j_k}$$

- Estimar estado $\hat{x}_k = \sum_i x^i_k w^i_k$
- Eventual resampleo.

Algoritmo: Estimación de parámetro

- A partir del estado estimado $\hat{x}_{k-1}$ anterior y cada θ^j_{k-1} generar estados $\hat{x}_{k-1} \xrightarrow{RK,\theta^j_{k-1}} \tilde{x}^j_k$
- Apartir de la relación $\hat{x}_k - \tilde{x}^j_k \sim \mathcal{N}(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma})$ definir distribución γ^j_k tomando $\tilde{\mu} = mean(\hat{x}_k - \tilde{x}_k)$ y $\tilde{\sigma} = sdt(\hat{x}_k - \tilde{x}_k)$
- Actualizar pesos V_k :

$$v^j_k = \frac{v^j_{k-1}\gamma_k j}{\sum_j v^i_{k-1}\gamma^i_k}$$

- Estimar parámetro $\hat{\theta}_k = \sum_j \theta^j_{k-1}\gamma^j_k$
- Mantener grilla de parámetros constante $\Theta_k = \Theta_{k-1}$ o eventualmente resamplear.

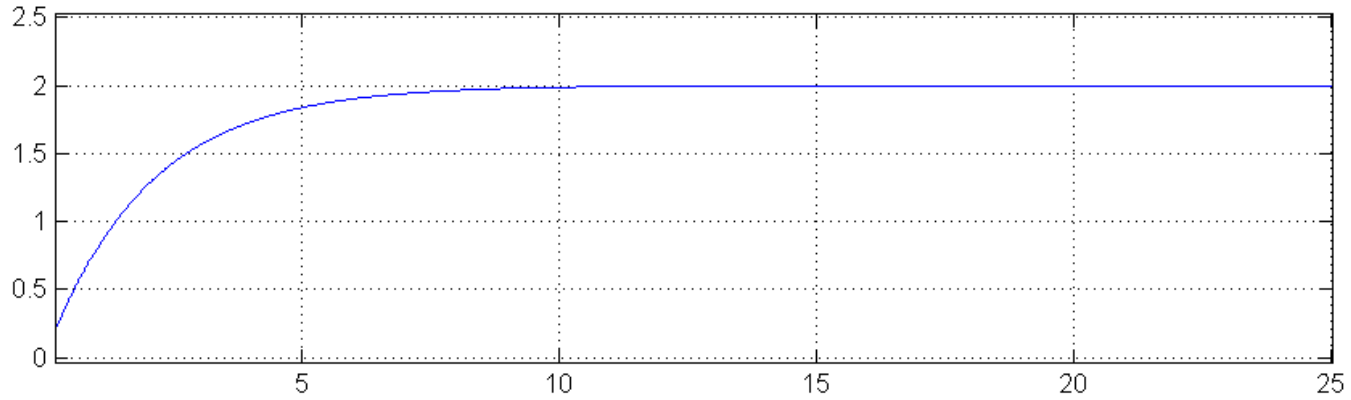
Ejemplo 1.

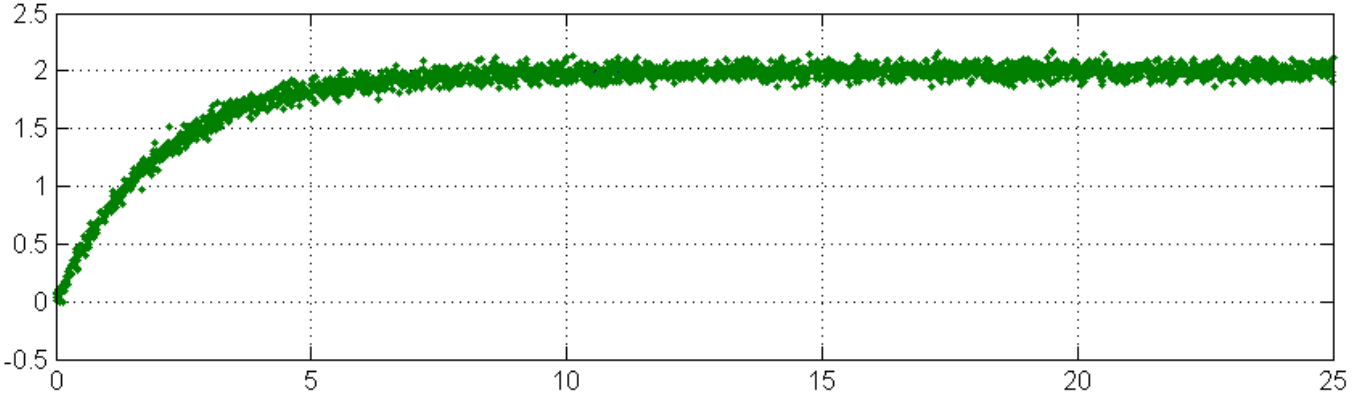
- Modelo:

$$\begin{cases} x' &= -\theta x + 1 \\ z_k &= x(t_k) + \nu_k \\ x_0 &= \text{condición inicial} \end{cases}$$

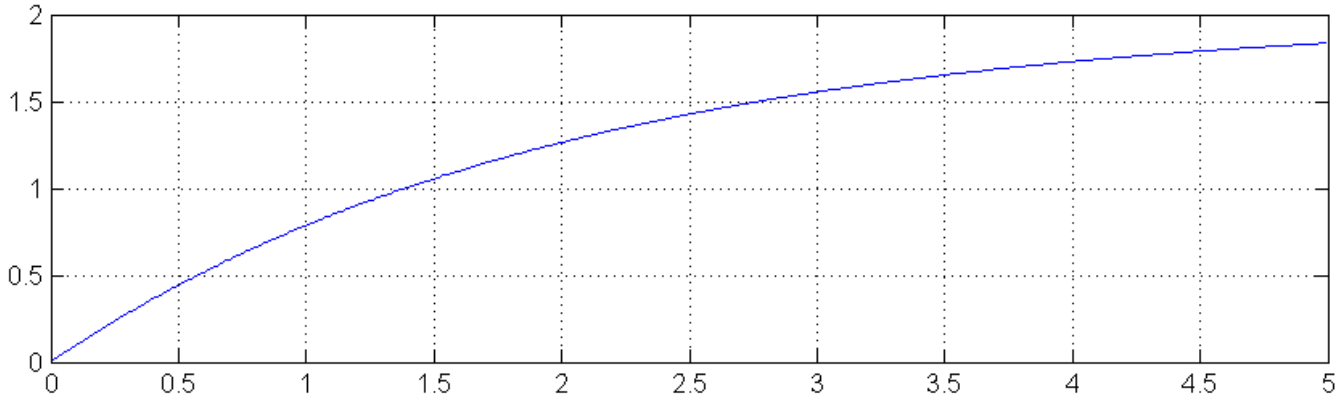
  con $\theta = 1/2$, $x_0 = 1$, $u \equiv 1$ y $\sigma = 0.05$
- Se genera la señal pura y perturbada.
- Se filtra estado y estima parámetro.
- Grillas iniciales $\Theta_0 = 0.1 : 0.05 : 0.9$ y $X_0 = 0.1 : 0.01 : 5$

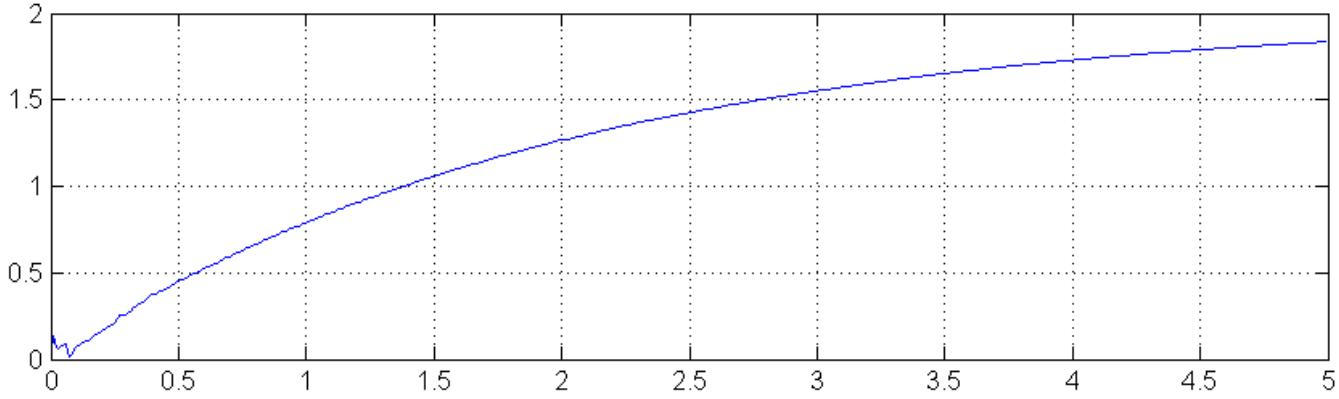
Ejemplo 1: señal pura y con ruido



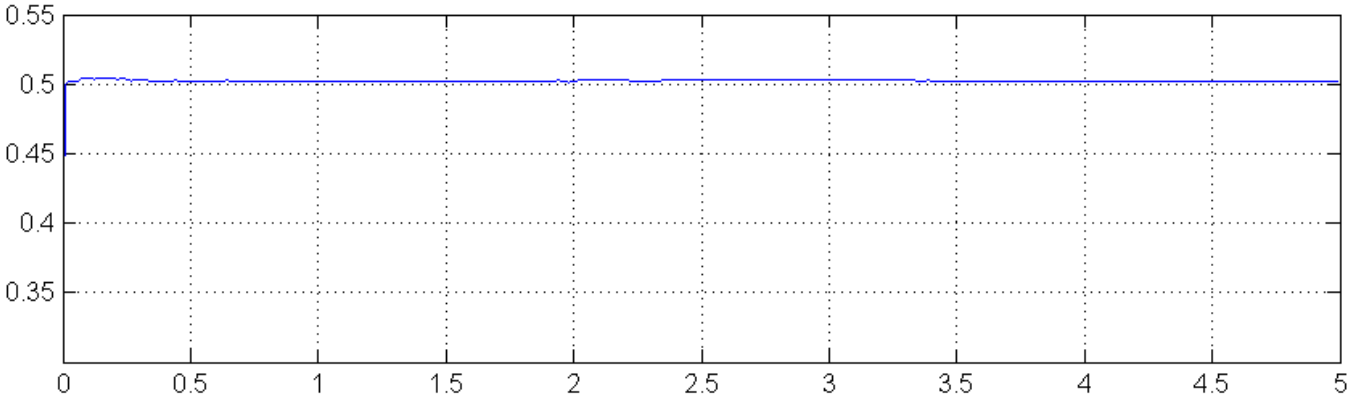


Ejemplo 1: filtrado de estado





Ejemplo 1: estimación de parámetro (dos niveles de detalle)



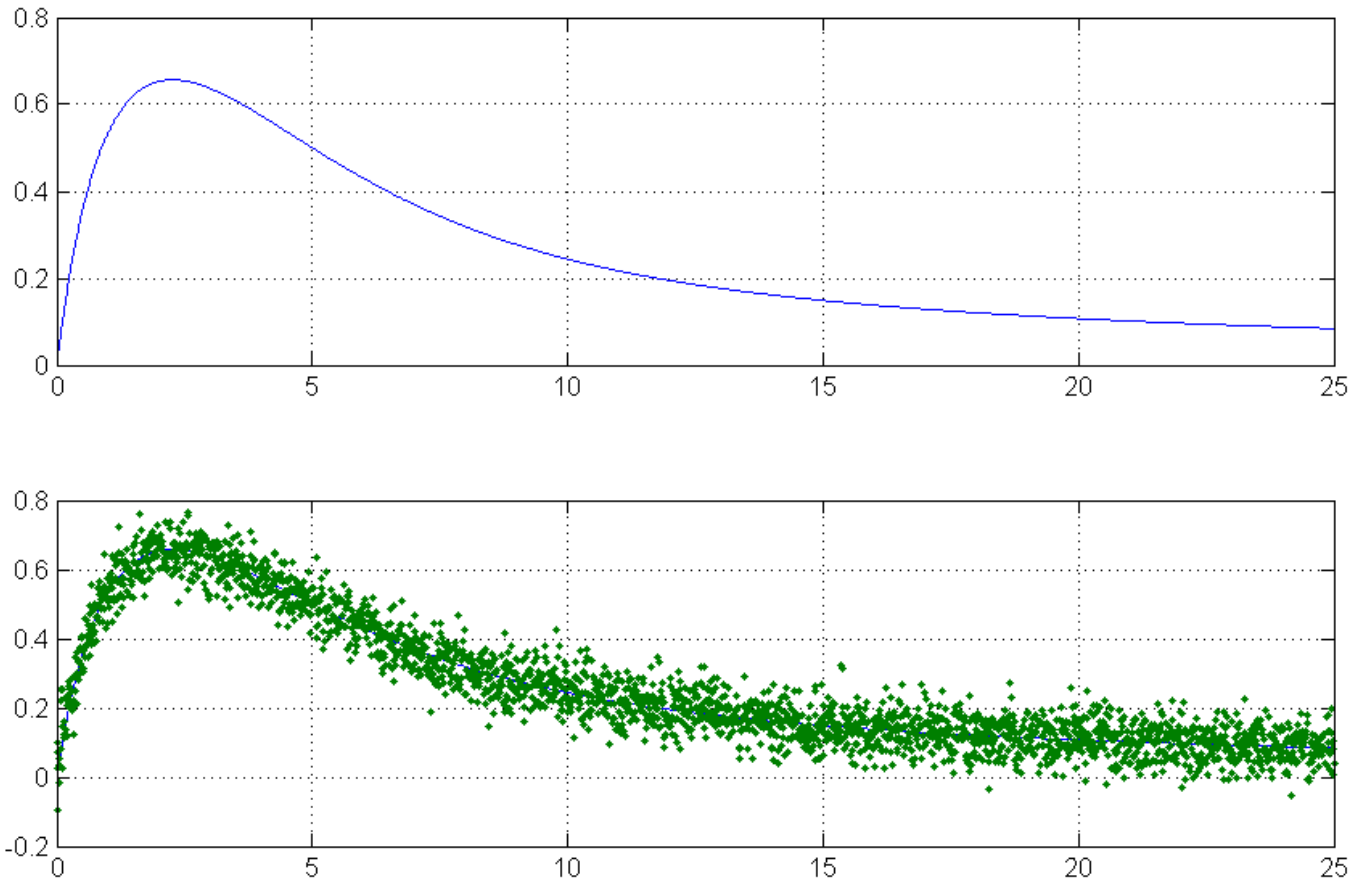
Ejemplo 2.

- Modelo:

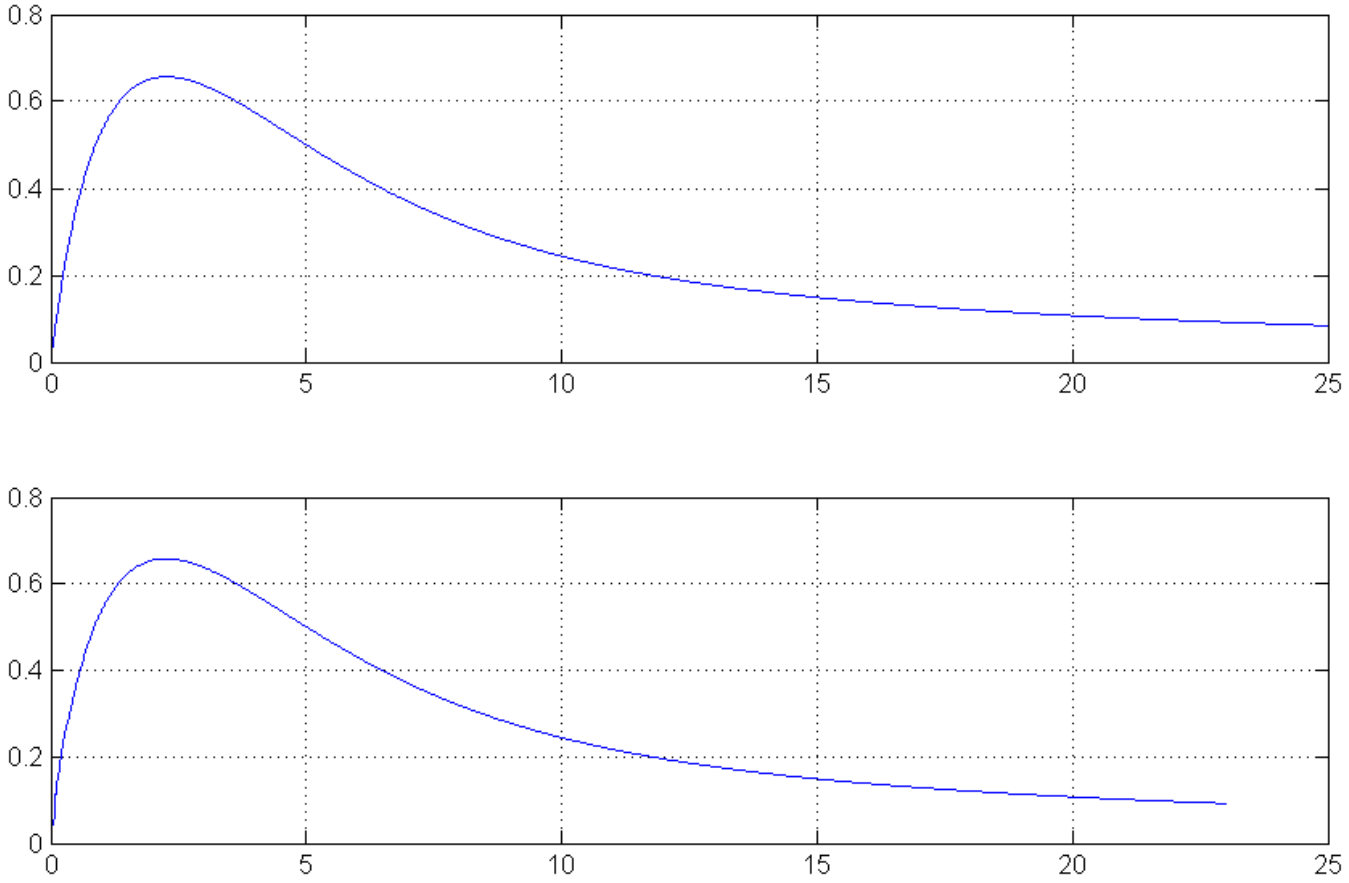
$$\begin{cases} x' & = -0.5 \sin x + \frac{2\theta}{1+x} \\ z_k & = x(t_k) + \nu_k \\ x_0 & = \text{condición inicial} \end{cases}$$

  con $\theta = 1/2$, $x_0 = 1$, y $\sigma = 0.05$
- Se genera la señal pura y perturbada.
- Se filtra estado y estima parámetro.
- Grillas iniciales $\Theta_0 = 0.1 : 0.05 : 0.9$ y $X_0 = -0.5 : 0.01 : 0.5$-

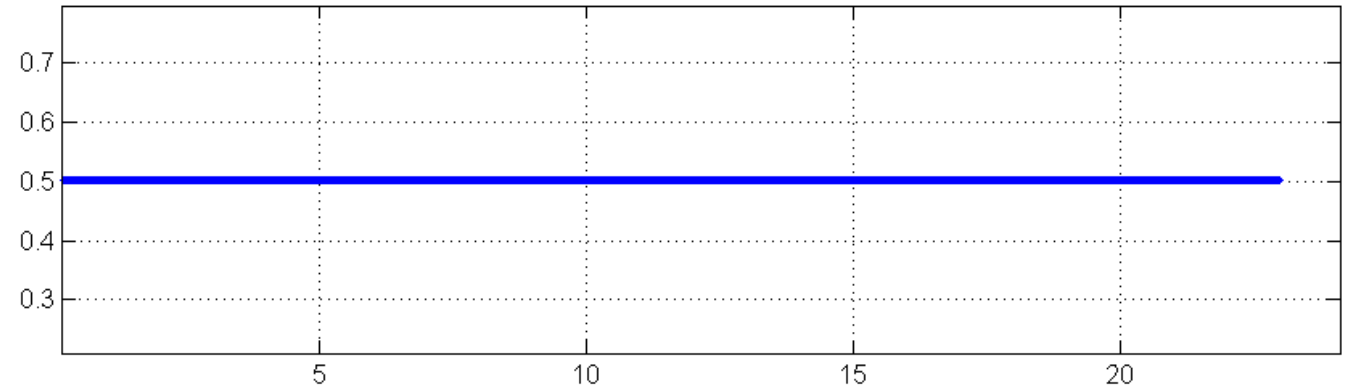
Ejemplo 2: señal pura y con ruido

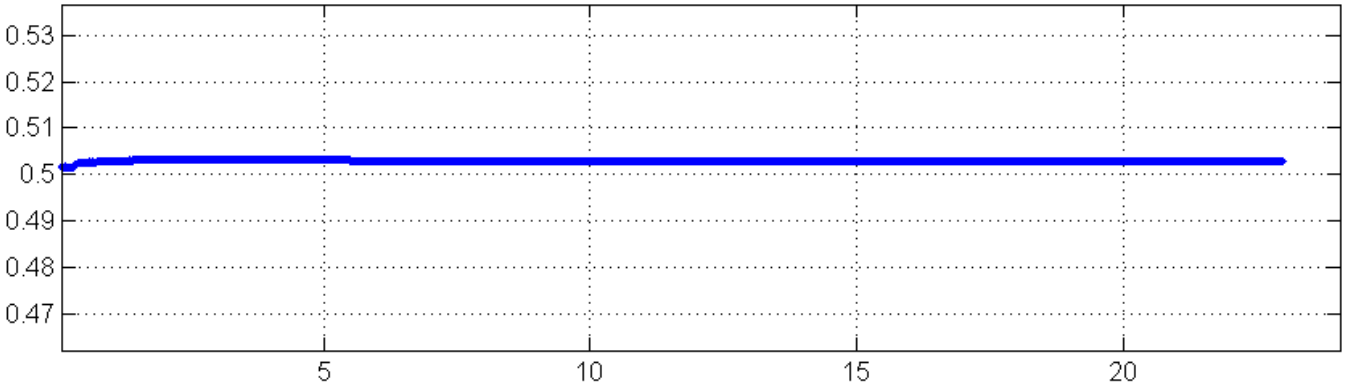


Ejemplo 2: filtrado de estado



Ejemplo 2: estimación de parámetro (dos niveles de detalle)





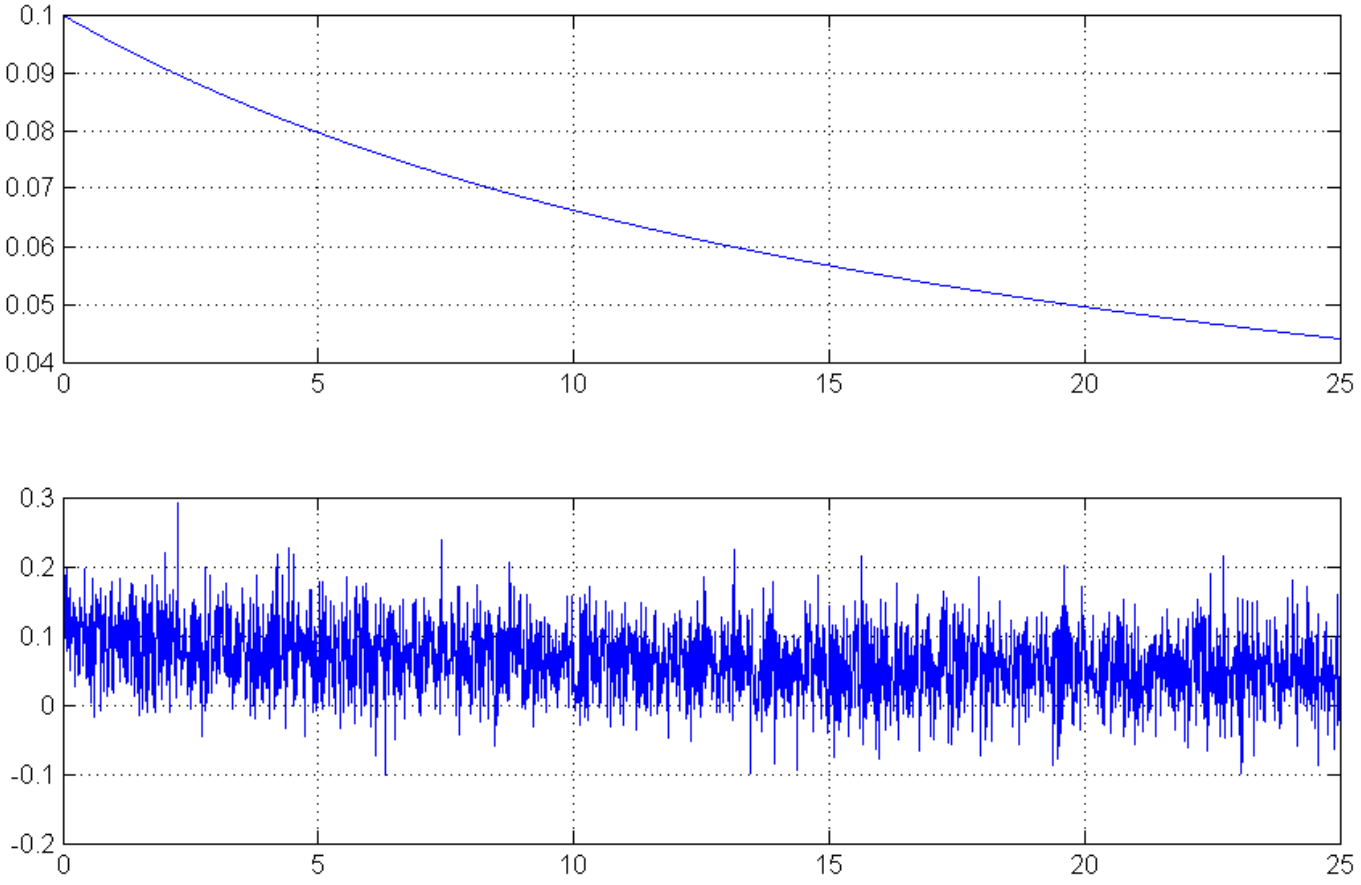
Ejemplo 3.

- Modelo:

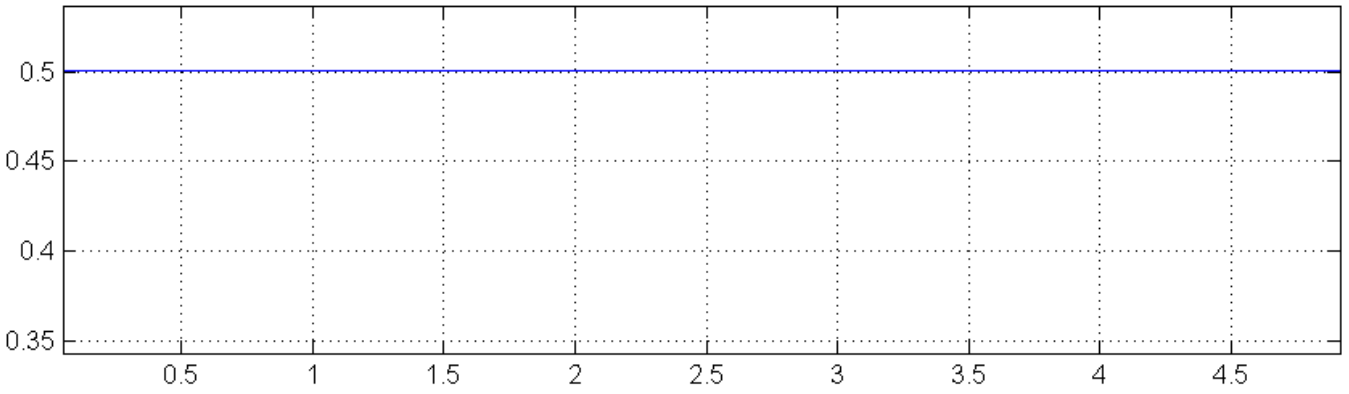
$$\begin{cases} x' & = x(1 - \exp(ax)) \\ z_k & = x(t_k) + \nu_k \\ x_0 & = \text{condición inicial} \end{cases}$$

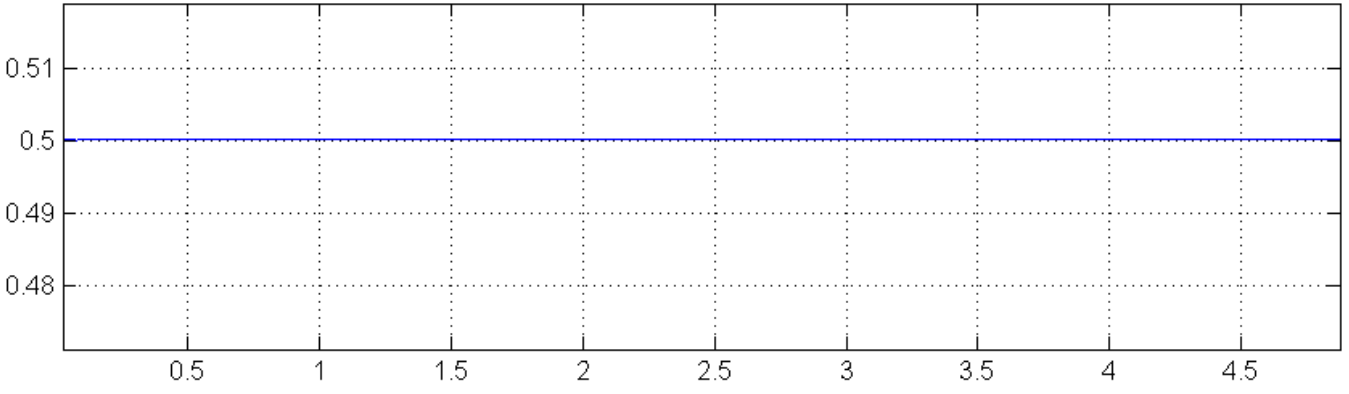
  con $\theta = 1/2$, $x_0 = 1$ y $\sigma = 0.05$
- Se genera la señal pura y perturbada.
- Se estima parámetro.
- Grillas iniciales $\Theta_0 = 0.1 : 0.05 : 0.9$ y $X_0 = .1 : 0.01 : 2$

Ejemplo 3: señal pura y con ruido



Ejemplo 3: estimación de parámetro (dos niveles de detalle)





- Se plantea el problema del filtrado de estado y estimación conjunta del parámetro en sistemas modelados por ecuaciones diferenciales.
- Se propone un algoritmo bayesiano mixto, basado en los esquemas de grilla, para modelos uni-dimesionales y uni-paramétricos, en general no lineales.
- Se incorporan apropiados procedimientos de resampleo.
- Se prosigue el desarrollo para modelos n-dimensionales y varios parámetros inciertos.