

Análisis de puntos de impasse en circuitos no lineales en conexión serie

Diana Kleiman^(a), **María Etchechoury**^(b), **Paul Puleston**^(c)

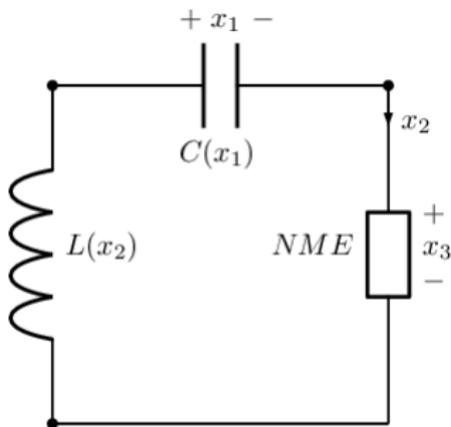
(a) Departamento de Ciencias Básicas, Fac. de Ingeniería, UNLP

(b) Departamento de Matemática, Fac. de Cs. Exactas, UNLP

(c) CONICET y LEICI, Fac. de Ingeniería, UNLP

LXV Reunión de la Unión Matemática Argentina
Bahía Blanca, Argentina, Septiembre 2016

Circuito no lineal en serie



- C es la capacidad dependiente del voltaje x_1
- L es la inductancia que depende de la corriente $i = x_2$
- $v = x_3$ es el voltaje del NME (*Nonlinear Memoryless Element*)

Circuito no lineal en serie

El circuito de la figura se describe por una EDICL:

$$\begin{pmatrix} C(x_1) & 0 & 0 \\ 0 & L(x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - x_3 \\ x_2 - \Psi(x_3) \end{pmatrix}$$

$C, L : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, funciones analíticas reales, en general no lineales.

$x_2 = \Psi(x_3)$ analítica real **no constante**, en general no lineal, representa la relación $v - i$ (voltaje - corriente).

Circuito no lineal en serie: modelo reducido

El modelo original del circuito puede reducirse a un sistema equivalente de orden 2 en las variables x_1 y x_3 [1], llamando $x = (x_1, x_3)$:

$$a(x)\dot{x} = f(x),$$

$$a(x) = \begin{pmatrix} C(x_1) & 0 \\ 0 & L(\Psi(x_3)) \cdot \frac{d\Psi(x_3)}{dx_3} \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} \Psi(x_3) \\ -x_1 - x_3 \end{pmatrix}$$

[1] Cendra H. and E.M. (2006), *Desingularization of implicit analytic differential equations*, J. Phys.A: Math.Gen. 39 10975-11001.

Nuestro trabajo ...

- Definimos conjunto singular y en particular puntos singulares de impasse. Consideramos la clasificación de singularidades en esenciales o no esenciales para usar resultados generales existentes.
- Encontramos una condición necesaria y suficiente para que las singularidades esenciales sean puntos de impasse del *circuito no lineal genérico en serie*.
- Ilustramos los resultados hallados en un ejemplo concreto.

Preliminares

Una *ecuación diferencial implícita -EDI-*, de primer orden, definida sobre una variedad M puede representarse de manera general como

$$\varphi(x, \dot{x}) = 0 \quad (1)$$

donde $x: I \rightarrow M$ es una función, con I un intervalo real, $I = (t_0, t_1)$, $I = (t_0, t_1]$, $I = [t_0, t_1)$ o $I = [t_0, t_1]$, $x(t)$ es continua en I , diferenciable en el interior de I y $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t)$.

Una *curva solución* de (1) es una función $x: I \rightarrow M$ tal que $(x(t), \dot{x}(t))$ satisface la ecuación para todo t en el interior de I .

Además, si $t_0 \in I$ entonces $(x(t_0), \dot{x}(t_0^+))$ satisface la ecuación y si $t_1 \in I$ entonces $(x(t_1), \dot{x}(t_1^-))$ satisface la ecuación.

Preliminares

Una *ecuación diferencial implícita cuasilineal* -EDICL- definida sobre M puede representarse de manera general como

$$a(x)\dot{x} = f(x),$$

M variedad de dimensión m , F espacio vectorial de dimensión d ,
 $a : TM \rightarrow F$ una aplicación suave con $a(x, \dot{x}) \equiv a(x)\dot{x}$ lineal en \dot{x} ,
 $f : M \rightarrow F$ una aplicación suave.

Puntos singulares

Consideramos la EDICL

$$a(x)\dot{x} = f(x) \quad (2)$$

En general:	Circuito:
M variedad conexa, $\dim M = m$	$M = \mathbb{R}^2$, $m = \dim M = 2$
$a(x)$, $f(x)$ analíticas	$f(x) = \begin{pmatrix} \Psi(x_3) \\ -x_1 - x_3 \end{pmatrix}$
$a(x) : M \longrightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$	$a(x) = \begin{pmatrix} C(x_1) & 0 \\ 0 & L(\Psi(x_3)) \cdot \frac{d\Psi(x_3)}{dx_3} \end{pmatrix}$
$\det a(x)$ no idénticamente nulo en M	$\det a(x) = C(x_1)L(\Psi(x_3)) \frac{d\Psi(x_3)}{dx_3}$ no idénticamente nulo en \mathbb{R}^2
$M_s = \{x \in M : \det a(x) = 0\}$ <i>conjunto singular</i>	$M_s = \left\{ (x_1, x_3) : \frac{d\Psi(x_3)}{dx_3} = 0 \right\}$
$M_r = M - M_s$ <i>conjunto regular</i>	$M_r = \left\{ (x_1, x_3) : \frac{d\Psi(x_3)}{dx_3} \neq 0 \right\}$

Puntos singulares de impasse

Dado un punto $x_0 \in M_s$, decimos que una curva solución de (2),

$x(t)$ con $t \in (t_0, t_1)$ y $x(t) \in M_r$ para todo $t \in (t_0, t_1)$,

tiene un *punto de impasse de entrada* en x_0 (resp. *punto de impasse de salida*) si:

- $x(t) \rightarrow x_0$ cuando $t \rightarrow t_1^-$ (resp. $t \rightarrow t_0^+$)
- no existe $\dot{x}(t_1^-)$ (resp. no existe $\dot{x}(t_0^+)$).

Si existe una curva solución $x(t)$ que tiene un punto de impasse (de entrada o de salida) en x_0 , decimos que $x(t)$ es una *solución de impasse* de (2) por x_0 .



Puntos singulares de impasse

Para analizar la existencia de puntos de impasse introducimos la ecuación

$$h(x)\dot{x} = g(x) \quad (3)$$

que se obtiene premultiplicando (2) por la matriz $(\text{adj } a(x))^t$.

En general:	Circuito:
$h(x) = \det a(x)$ $g(x) = (\text{adj } a(x))^t f(x)$	$h(x_1, x_3) = C(x_1)L(\Psi(x_3))\frac{d\Psi(x_3)}{dx_3}$ $g(x_1, x_3) = \begin{pmatrix} L(\Psi(x_3)) \cdot \frac{d\Psi(x_3)}{dx_3} \cdot \Psi(x_3) \\ C(x_1) \cdot (-x_1 - x_3) \end{pmatrix}$

Puntos singulares esenciales o no esenciales

La siguiente clasificación de singularidades corresponde al análisis del campo $\frac{g(x)}{h(x)}$ y se basa en el estudio de la existencia de una extensión continua de dicho campo [2]: $M_s = M_s^e \cup M_s^{ne}$

En general:	Circuito:
$M_s = \{x \in M : h(x) = 0\}$	$M_s = \left\{ (x_1, x_3) : \frac{d\Psi(x_3)}{dx_3} = 0 \right\}$
$M_s^e = \{x \in M_s : g(x) \neq 0\}$ <i>singularidades esenciales</i>	$M_s^e = \left\{ (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 : \frac{d\Psi(x_3)}{dx_3} = 0, \right.$ $\left. x_3 \neq -x_1 \right\}$
$M_s^{ne} = M_s - M_s^e$ <i>singularidades no esenciales</i>	

Singularidades esenciales de impasse

Para $x \in M$, se definen $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$ así:

$$\varphi_0(x) = h(x)$$

$$\varphi_1(x) = \nabla \varphi_0(x) \cdot g(x)$$

\vdots

$$\varphi_k(x) = \nabla \varphi_{k-1}(x) \cdot g(x)$$

\vdots

$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots \in \mathcal{C}^\omega(M)$ generan una cadena de ideales

$\mathcal{J}_k = \langle \varphi_0, \dots, \varphi_k \rangle$, con $\mathcal{J}_0 \subseteq \mathcal{J}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{J}_k \subseteq \dots$

El anillo $\mathcal{C}^\omega(M)$ es Noetheriano, luego

existe $\tilde{k} \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{J}_{\tilde{k}}$ es el ideal final.

Singularidades esenciales de impasse

El siguiente resultado establece una condición necesaria y suficiente para que una *singularidad esencial* de la ecuación $a(x)\dot{x} = f(x)$ (2) sea un *punto de impasse*. [3]

TEOREMA 1: Sea la ecuación (2) y un punto $x_0 \in M_s^e$. Si $\mathcal{J}_{\tilde{k}}$ es el ideal final y su conjunto de ceros es

$$Z(\mathcal{J}_{\tilde{k}}) = \{x \in M : \varphi_0(x) = 0, \varphi_1(x) = 0, \dots, \varphi_{\tilde{k}}(x) = 0\}$$

entonces:

x_0 es un punto de impasse de (2) sii $x_0 \notin Z(\mathcal{J}_{\tilde{k}})$.

[3] Zorba, G. (2013) *Existencia de Soluciones de Ecuaciones Diferenciales Implícitas*. Tesis Doctoral, Depto de Matemática, Fac. de Cs. Exactas, UNLP.

Singularidades esenciales de impasse en el circuito

El siguiente resultado establece una condición necesaria y suficiente para que una *singularidad esencial* de la ecuación $a(x)\dot{x} = f(x)$ (2), obtenida a partir del *circuito no lineal en serie*, sea un *punto de impasse*.

TEOREMA 2: Sea la ecuación (2) y una singularidad esencial $x = (x_1, x_3) \in M_s^e$ entonces:

Existe $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{d^n \Psi(x_3)}{dx_3} \neq 0$ sii x es un punto de impasse de (2).

Singularidades esenciales de impasse en el circuito

Para dar una idea de la demostración consideramos las equivalencias

Del TEOREMA 1: $x \in M_s^e$,

x no es un punto de impasse sii

$$x \in \{x \in M : \varphi_0(x) = 0, \varphi_1(x) = 0, \dots, \varphi_{\tilde{k}}(x) = 0\}.$$

Del TEOREMA 2:

$$x = (x_1, x_3) \in M_s^e = \left\{ (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2 : \frac{d\Psi(x_3)}{dx_3} = 0, x_3 \neq -x_1 \right\},$$

x no es un punto de impasse sii $\frac{d^n \Psi(x_3)}{dx_3} = 0$ para todo $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

Singularidades esenciales de impasse en el circuito

$$\varphi_0(x) = C(x_1)L(\Psi(x_3))\frac{d\Psi(x_3)}{dx_3},$$

$$\varphi_1(x) = \kappa_{1,1}(x_1, x_3) \left[\frac{d\Psi(x_3)}{dx_3} \right]^2 + \kappa_{1,2}(x_1, x_3) \frac{d^2\Psi(x_3)}{dx_3^2}$$

donde $\kappa_{1,2}(x_1, x_3) = C^2(x_1) (-x_1 - x_3)^1 L(\Psi(x_3)) \neq 0$,

$$\varphi_2(x) = \kappa_{2,1}(x_1, x_3) \left[\frac{d\Psi(x_3)}{dx_3} \right]^2 + \kappa_{2,2}(x_1, x_3) \left[\frac{d^2\Psi(x_3)}{dx_3^2} \right]^2 + \\ + \kappa_{2,3}(x_1, x_3) \frac{d^3\Psi(x_3)}{dx_3^3}$$

donde $\kappa_{2,3}(x_1, x_3) = C^3(x_1) (-x_1 - x_3)^2 L(\Psi(x_3)) \neq 0$,

⋮

$$\varphi_n(x) = \kappa_{n,1}(x_1, x_3) \left[\frac{d\Psi(x_3)}{dx_3} \right]^2 + \kappa_{n,2}(x_1, x_3) \frac{d^2\Psi(x_3)}{dx_3^2} + \dots + \\ + \kappa_{n,n}(x_1, x_3) \frac{d^n\Psi(x_3)}{dx_3^n} + \kappa_{n,n+1}(x_1, x_3) \frac{d^{n+1}\Psi(x_3)}{dx_3^{n+1}}$$

donde $\kappa_{n,n+1}(x_1, x_3) = C^{n+1}(x_1) (-x_1 - x_3)^n L(\Psi(x_3)) \neq 0$.

Singularidades esenciales de impasse en el circuito

COROLARIO. Todas las singularidades esenciales del sistema (2) son puntos de impasse.

Demostración. Sea

$$x_0 = (x_{01}, x_{03}) \in M_s^e = \left\{ (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2 : \frac{d\Psi(x_3)}{dx_3} = 0, x_3 \neq -x_1 \right\}.$$

Supongamos por el absurdo que x_0 no es un punto de impasse de (2), por el Teorema 2 se cumple que $\frac{d^n \Psi(x_{03})}{dx_3^n} = 0$ para todo $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$

$\frac{d\Psi(x_3)}{dx_3}$ es una función analítica y $\frac{d^n \Psi(x_{03})}{dx_3^n} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, resulta que $\frac{d\Psi(x_3)}{dx_3} = 0$ para todo $x_3 \in \mathbb{R}$. Luego $\Psi(x_3)$ es una función constante en \mathbb{R} , contrario a lo supuesto en el modelo del circuito.

Por lo tanto todas las singularidades esenciales de (2) son puntos de impasse.

Ejemplo ilustrativo: circuito no lineal diodo-túnel

Consideramos el modelo de un circuito diodo-túnel con

$$C(x_1) = \frac{0,2x_1^2+0,3}{x_1^2+1}, \quad L(x_2) = \frac{3,8x_2^2+4,2}{x_2^2+1} \quad \text{y} \quad x_2 = \Psi(x_3) = x_3^3 - 9x_3^2 + 24x_3.$$

$$M_s = \left\{ (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2 : \frac{d\Psi(x_3)}{dx_3} = 0 \right\} =$$

$$= \{(x_1, 2) : x_1 \in \mathbb{R}\} \cup \{(x_1, 4) : x_1 \in \mathbb{R}\}$$

$$M_s^e = \left\{ (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2 : \frac{d\Psi(x_3)}{dx_3} = 0, x_3 \neq -x_1 \right\} =$$

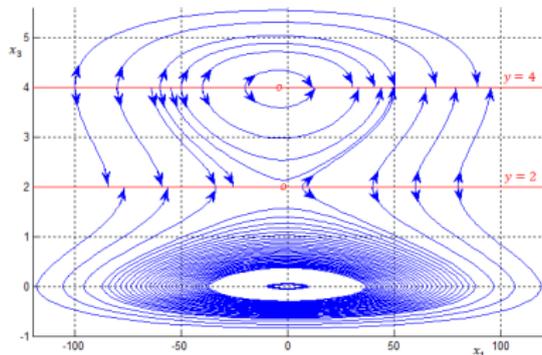
$$= \{(x_1, 2) : x_1 \in \mathbb{R}, x_1 \neq -2\} \cup \{(x_1, 4) : x_1 \in \mathbb{R}, x_1 \neq -4\}$$

Por el Corolario del Teorema 2:

Todas las singularidades esenciales son puntos de impasse.

Ejemplo ilustrativo: circuito en serie diodo-túnel

En la siguiente figura mostramos la gráfica de M_s^e y algunas soluciones de impasse.



Puntos de impasse en $(x_1, 2)$, con $x_1 \neq -2$; $(x_1, 4)$, con $x_1 \neq 4$.

MUCHAS GRACIAS