Curvatura de una conexión discreta: Una propuesta

Javier Fernandez [1], Marcela Zuccalli[2], Mariana Juchani[2,3]

[1]**Instituto Balseiro, UNCu-CNEA**
[2]**Dto. de Matemática, UNLP**
[3]**CONICET**

Reunión anual de la UMA
Septiembre 2016

- Sea G un grupo de Lie actuando sobre una variedad Q por $l^Q : G \times Q \to Q$ tal que,
- $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ un G-fibrado principal.
- Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G. El fibrado vertical $\mathcal{V}$ está definido para cada $q \in Q$ por $\mathcal{V}(q) := T_q l^Q_G(q) = \{\xi_Q(q) : \xi \in \mathfrak{g}\}$

Definición

*Una **conexión** $\mathcal{A}$ sobre un G-fibrado principal π consiste en una elección de un subespacio $Hor_{\mathcal{A}}(q) \subset T_qQ$ tal que:*

(1) $T_qQ = \mathcal{V}(q) \oplus Hor_{\mathcal{A}}(q)$

(2) $Hor_{\mathcal{A}}(q)$ *es G-equivariante.*

(3) $Hor_{\mathcal{A}}(q)$ *depende de q de forma diferenciable.*

Es decir, cada $v_q \in T_qQ$ se descompone de manera única como:

$$v_q = \underbrace{\xi_Q(q)}_{\in \mathcal{V}(q)} + \underbrace{v_q - \xi_Q(q)}_{\in Hor_{\mathcal{A}}(q)}$$

Definición

Asociada a una conexión sobre un G-fibrado principal, se tiene una 1***-forma de conexión*** *con valores en* $\mathfrak{g}$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} : TQ & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ v_q & \mapsto & \xi \end{array}$$

donde $v_q - \xi_Q(q) \in Hor_{\mathcal{A}}(q)$

Teorema

La forma de conexión $\mathcal{A}$ de una conexión satiface las siguientes propiedades:

(1) $\mathcal{A}(\xi_Q(q)) = \xi$, *para todo* $\xi \in \mathfrak{g}$

(2) $\mathcal{A}$ *es* G*-equivariante.*

equivalentemente, dada una aplicación $\mathcal{A} : TQ \to \mathfrak{g}$ *que cumple con las propiedades (1) y (2) define una única conexión cuya* 1*-forma de conexión es* $\mathcal{A}$*.*

Conexión discreta

- $Q \times Q$ una versión discreta TQ.
- Sea la acción diagonal $l_g^{Q\times Q}(q_0, q_1) := (l_g^Q(q_0), l_g^Q(q_1))$ sobre $Q \times Q$.
- $\mathcal{V}_d(q) := \{(q, l_g^Q(q)) \in Q \times Q : g \in G\}$
- Para un par $(q_0, q_1) \in Q \times Q$,

$$(q_0, q_1) = \underbrace{(q_0, l_g^Q(q_0))}_{\in \mathcal{V}_d} \cdot \underbrace{(q_0, q_2)}_{horizontal}$$

Donde la composición de un vertical y un par arbitrario (con base en el mismo punto q_0) esta definido por

$$(q_0, l_g^Q(q_0)) \cdot (q_0, q_1) := (q_0, l_g^Q(q_1)).$$

Definición

Sea $Hor \subset Q \times Q$ una subvariedad $l^{Q\times Q}$-invariante que contiene la diagonal $\Delta_Q \subset Q \times Q$.
Hor define una una conexión discreta $\mathcal{A}_d$ sobre el fibrado principal $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ si $(id_Q \times \pi)|_{Hor} : Hor \longrightarrow Q \times Q/G$ es un difeomorfismo local inyectivo.

Dominio de una conexión discreta

- Sea $Hor_{\mathcal{A}_d}$ una conexión discreta sobre un G-fibrado principal, se define

$$\mathfrak{U} := \{(q_0, l_g^Q(q_1)) \in Q \times Q : (q_0, q_1) \in Hor_{\mathcal{A}_d}, g \in G\}$$

$\mathfrak{U}$ resulta abierto y lo llamamos ***dominio*** de $\mathcal{A}_d$.

Para cualquier $(q_0, q_1) \in \mathfrak{U}$, existe un único $g \in G$ tal que

$$(q_0, q_1) = \underbrace{(q_0, l_g^Q(q_0))}_{\in \mathcal{V}_{\mathcal{A}_d}} \cdot \underbrace{(q_0, l_{g^{-1}}^Q(q_1))}_{\in Hor_{\mathcal{A}_d}}$$

Definición

Dada una conexión discreta $\mathcal{A}_d$ con dominio $\mathfrak{U}$ sobre el G-fibrado principal $\pi : Q \to Q/G$, se define su ***forma de conexión disreta asociada*** *como*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}_d : \mathfrak{U} \subset Q \times Q & \longrightarrow & G \\ (q_0, q_1) & \mapsto & g \end{array}$$

Teorema

Sea $\mathcal{A}_d$ *una conexión discreta sobre el* G*-fibrado principal* $\pi : Q \to Q/G$ *con dominio* $\mathfrak{U}$*. Entonces,* $\forall\ (q_0, q_1) \in \mathfrak{U}$ *y* g_0*,* $g_1 \in G$*,*

$$\mathcal{A}_d(l^Q_{g_0}(q_0), l^Q_{g_1}(q_1)) = g_1 \mathcal{A}_d(q_0, q_1) g_0^{-1} \tag{1}$$

Además, $Hor_{\mathcal{A}_d} = \{(q_0, q_1) \in \mathfrak{U} : \mathcal{A}_d(q_0, q_1) = e\}$*.*
Inversamete, dada una función suave $\mathcal{A} : \mathcal{U} \to G$ *con* $\mathcal{U} \subset Q \times Q$ *un conjunto abierto que contiene a la diagonal* $\Delta_Q \subset Q \times Q$ *y es invariante bajo la acción producto de* $G \times G$ *en* $Q \times Q$*, tal que la función* $\mathcal{A}$ *cumple (1), entonces*

$$Hor := \{(q_0, q_1) \in \mathcal{U} : \mathcal{A}(q_0, q_1) = e\}$$

define una conexión discreta con dominio $\mathcal{U}$ *y con forma de conexión discreta asociada* $\mathcal{A}$*.*

Teorema

Sea $(Q, \langle , \rangle_Q)$ una variedad de Riemann donde el grupo de Lie G actua por isometrías y $\pi : Q \to Q/G$ es un G-fibrado principal. Entonces, existe una conexión discreta $\mathcal{A}_d^{\langle , \rangle_Q}$ sobre π.

Bajo las mismas hipótesis...

- Tomamos la conexión $\mathcal{A}$ definida por $Hor(q) := \mathcal{V}(q)^{\perp}$.
- Se define $\kappa(q, l_g^Q(q)) = g$ para $q \in Q$.

Se puede definir una conexión discreta $\mathcal{A}_d : \mathfrak{U} \longrightarrow G$ como

$$\mathcal{A}_d(q_0, q_1) := \kappa(\widetilde{\gamma}(1), q_1)$$

donde γ es la única geodésica que une $\pi(q_0)$ con $\pi(q_1)$ y $\widetilde{\gamma}$ es su levantamiento horizontal.

- Sea $Q := M \times G$, M variedad diferencial conexa y G un grupo de Lie.
- Sea la G-acción sobre Q definida por $l_g^Q(x, g') = (x, gg')$
- Entonces $p_1 : Q \longrightarrow M$ es el G-fibrado principal trivial.

$\mathcal{A}_d^e : Q \times Q \longrightarrow G$ dada por

$$\mathcal{A}_d^e((x_0, g_0), (x_1, g_1)) = g_1 g_0^{-1}$$

define una conexión discreta sobre el G-fibrado principal trivial, $\mathcal{A}_d^e$ es llamada conexión discreta trivial.

Definición

Sea $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ *un fibrado principal con una conexión* $\mathcal{A}$.
La curvatura asociada a la conexión $\mathcal{A}$, *se define como:*

$$\mathcal{B}(u_q, v_q) = \boldsymbol{d}\mathcal{A}(Hor_{\mathcal{A}}(u_q), Hor_{\mathcal{A}}(v_q))$$

para $u_q, v_q \in T_qQ$.
Donde $\boldsymbol{d}$ *denota la derivada exterior.*

Conexiones planas

Definición

*Una conexión $\mathcal{A}$ sobre un G-fibrado principal $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ es llamada **plana** si $\forall x \in Q/G$ existe un entorno U y un isomorfismo*

$$\Psi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$$

tal que $T_q\Psi(Hor_{\mathcal{A}}(q)) = T_{\Psi(q)}(U \times \{a\})$, donde $\Psi(q) = (x, a)$.

Teorema

Sea $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ *un* G*-fibrado principal. Una conexión* $\mathcal{A}$ *es plana si y solo su forma de curvatura es nula.*

Conexiones discretas simétricas

Definición

Una conexión $\mathcal{A}_d$ *definida por* $Hor \subset Q \times Q$ *es simétrica si y solo si* $(q_0, q_1) \in Hor \iff (q_1, q_0) \in Hor$.

Definición

Sea $\mathcal{A}_d$ *una conexión discreta simétrica con dominio* $\mathfrak{U}$ *sobre el fibrado principal* $\pi : Q \longrightarrow Q/G$. *Sea*

$$\mathfrak{U}^3 := \{(q_0, q_1, q_2) \in Q^3 : (q_i, q_j) \in \mathfrak{U} \forall i, j = 0, 1, 2\}$$

Definimos la curvatura de $\mathcal{A}_d$ *como* $\mathcal{B}_d : \mathfrak{U}^{(3)} \longrightarrow G$ *por*

$$\mathcal{B}_d(q_0, q_1, q_2) := \mathcal{A}_d(q_2, q_0)\mathcal{A}_d(q_1, q_2)\mathcal{A}_d(q_0, q_1)$$

$\mathcal{A}_d$ ***es plana*** *si* $\mathcal{B}_d = e$ *sobre* $\mathfrak{U}^3$.

- Sea $Q := M \times G$, M variedad diferencial conexa y G un grupo de Lie actuando de manera trivial sobre Q.
- Entonces $p_1 : Q \longrightarrow M$ es el G-fibrado principal trivial.

La conexión discreta trivial sobre el G-fibrado principal

$$\mathcal{A}_d^e((x_0, g_0), (x_1, g_1)) = g_1 g_0^{-1}$$

Tiene curvatura:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_d(q_0, q_1, q_2) &:= \mathcal{A}_d^e(q_2, q_0)\mathcal{A}_d^e(q_1, q_2)\mathcal{A}_d^e(q_0, q_1) \\ &= (g_0 g_2^{-1})(g_2 g_1^{-1})(g_1 g_0^{-1}) \\ &= e \end{aligned}$$

Definición

Sea $\mathcal{A}_d$ una conexión discreta simétrica con dominio $\mathfrak{U}$ sobre un G-fibrado principal $\pi : Q \longrightarrow Q/G$.
*Decimos que $\mathcal{A}_d$ es **localmente plana en** $q \in Q$ si existe un conjunto abierto $U_q \subset Q/G$ tal que*

$$\mathcal{B}_d(q, q_1, q_2) = e$$

$\forall\ (q_1, q_2) \in \mathfrak{U} \cap (\pi^{-1}(U_q) \times \pi^{-1}(U_q))$.
Decimos que $\mathcal{A}_d$ es localmente plana si y solo si es localmente plana para cada $q \in Q$.

- Sea $Q := M \times G$, con M una variedad Riemaniana, G un grupo de Lie dotado de una métrica G-invariante.
- Se define sobre Q la métrica producto, la cual resulta G-invariante con la acción trivial de G sobre Q.
- Entonces $p_1 : Q \longrightarrow M$ es el fibrado principal trivial.
- Sea la conexión $\mathcal{A}$ definida por $Hor_{\mathcal{A}}((x,a)) = \mathcal{V}((x,a))^{\perp}$, entonces se tiene que $Hor_{\mathcal{A}}((x,a)) = T_{(x,a)}(M \times \{a\})$ y la conexión $\mathcal{A}$ es plana.

Tomando la conexión discreta $\mathcal{A}_d(q_0, q_1) := \kappa(\widetilde{\gamma}(1), q_1)$

- Se observa que $B_d(q_0, q_1, q_2) = e$, al menos localmente.

- Sean Q una variedad Riemanniana y G un grupo de Lie que actúa por isometrías.
- $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ un G-fibrado principal.
- $\mathcal{A}$ la conexión definida por $Hor_{\mathcal{A}}(q) := \mathcal{V}(q)^{\perp}$ y supongamos que es plana.

Tomando la conexión discreta $\mathcal{A}_d : \mathfrak{U} \longrightarrow Q$ como

$$\mathcal{A}_d(q_0, q_1) := \kappa(\tilde{\gamma}(1), q_1)$$

- Se tiene, $\mathcal{B}_d(q_0, q_1, q_2) = e$, al menos localmente.
- Para cada $q \in Q$ existe un entorno abierto $U \subset Q/G$ tal que:
  - Existe sobre $U \times G$ una métrica Riemanniana G-invariante,
  - $p_1 : U \times G \longrightarrow U$ es una submersión Riemanniana.
  - La conexión discreta $\mathcal{A}_d^{U\times G}((x_0, g_0), (x_1, g_1)) := \kappa(\tilde{\gamma}(1), (x_1, g_1))$ resulta la conexión discreta trivial al igual que $\mathcal{A}_d^{Q|_U}$.

Proposición

Sea $\mathcal{A}_d$ una conexión discreta simétrica con dominio $\mathfrak{U}$ sobre un G-fibrado principal $\pi : Q \longrightarrow Q/G$. Para cada $q \in Q$, son equivalentes:

(1) *$\mathcal{A}_d$ es localmente plano en q.*

(2) *Existe un conjunto abierto $U_q \subset Q/G$ que contiene a $\pi(q)$ y un isomorfismo de G-fibrados principales*

$$F : U_q \times G \longrightarrow \pi^{-1}(U_q)$$

tal que $\mathcal{A}_d$ es la imagen bajo F de la conexión discreta trivial $\mathcal{A}_d^{U_q \times G}$ sobre el G-fibrado principal trivial $U_q \times G$.

Bibliografía

- H. Cendra, J. Marsden y T. Ratiu, *Lagrangian reduction by stages*, Mem. Amer. Math. Soc. **152**(722), x+108 (2001)
- J.Fernández, C. Tori y M. Zuccalli *Lagrangian reduction of discrete mechanical systems*, J. Geom. Mech. 2 (2010), no. 1, 69-111.
- J. Fernández y M. Zuccalli. *A geometric approach to discrete connections on principal bundles*, J. Geom. Mech. 5 (2013), no. 4, 433-444, También, arXiv:1311.0260.
- S. Kobayashi y K. Nomizu *Fondations of differential geometry*, vol I.
- M. Leok, J. Marsden y A. Weinstein, (2005). *A discrete theory of connections on principal bundles*, arXiv:math/0508338.