

Soluciones de cruce por puntos de equilibrio singulares.

Aplicación a un circuito RLC no lineal

UMA 2016. LXV Reunión de Comunicaciones Científicas
Bahía Blanca, Argentina, Septiembre 2016

Cecilia González(*), María Etchechoury(**)

(*) Departamento de Ciencias Básicas. Facultad de Ingeniería.

(**) Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias
Exactas.

Universidad Nacional de La Plata.

Objetivos del trabajo

En este trabajo estudiamos la existencia de soluciones de cruce por equilibrios singulares en un *circuito RLC no lineal* que se representa por medio de una ecuación diferencial algebraica -EDA-.

Introducción

Una *ecuación diferencial implícita -EDI-* definida sobre una variedad M puede representarse de manera general como

$$F(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0,$$

Las *ecuaciones diferenciales implícitas cuasilineales autónomas o ecuaciones diferenciales algebraicas -EDAs-* son un caso particular de EDI:

$$A(x)\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

donde $A \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times n})$ y $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Introducción

Algunas definiciones:

- $x \in \mathbb{R}^n$ es un **punto singular** de la EDA (1) si verifica $\det(A(x)) = 0$.
- $M_s = \{x : \det A(x) = 0\}$: **conjunto singular** asociado a (1).
- $x^* \in \mathbb{R}^n$ es **punto de equilibrio** de la EDA (1) si verifica $f(x^*) = 0$.
- $x^* \in \mathbb{R}^n$ es **punto de equilibrio singular** de (1) si $x^* \in M_s$ y $f(x^*) = 0$.
- Una *solución de cruce* es una solución de (1) que "cruza" el conjunto singular en tiempo finito.
- Un *punto de cruce* es un punto singular por el que pasa una solución de cruce.

Introducción

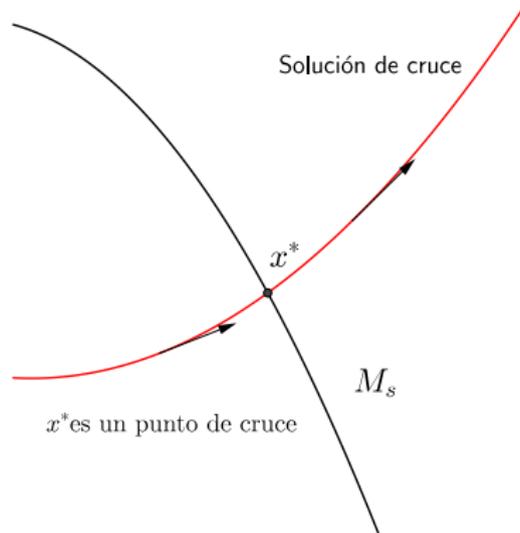
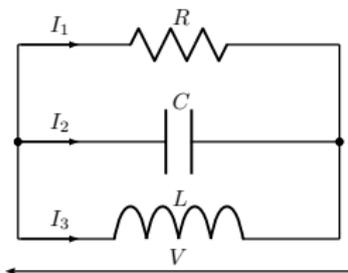


Figure: Trayectoria que cruza el conjunto singular en x^*

Circuito RLC no-lineal

Circuito RLC no lineal

Una resistencia (1), un capacitor (2) y un inductor (3) en paralelo.



I_i es la **corriente** en la i -ésima rama

V es la **caída de voltaje** (común) en cada rama

$C(V)$ es la **capacidad** y $L(I_3)$ es la **inductividad**;

$C, L : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ funciones suficientemente suaves.

Circuito RLC no-lineal

Por la ley de Kirchhoff para las corrientes: $I_1 + I_2 + I_3 = 0$

La evolución en el tiempo de la caída de voltaje y las corrientes en las ramas del capacitor e inductor están dados por:

$$I_2 = C(V)\dot{V} \quad V = L(I_3)\dot{I}_3.$$

En la rama de la resistencia (1), I_1 y V están relacionados por una ecuación de la forma $\psi(I_1, V) = 0$, donde $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suficientemente suave.

Circuito RLC no-lineal

Consideramos $x_i = I_i$ para $i = 1, 2, 3$ y $x_4 = V$. Las ecuaciones que gobiernan la evolución del voltaje y la corriente tienen la forma:

$$A(x)\dot{x} = f(x) \quad (2)$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L(x_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C(x_4) \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ \psi(x_1, x_4) \\ x_4 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Si $\psi(x_1, x_4)$ es tal que $\frac{\partial \psi((x_1, x_4))}{\partial x_4} \neq 0$ en un entorno del punto de equilibrio, aplicando el Teorema de la Función Implícita, existe una función φ continuamente diferenciable, tal que $x_4 = \varphi(x_1)$. Los equilibrios singulares de (2) son de la forma $x^* = (x_1^*, 0, -x_1^*, 0)$ con $\varphi(x_1^*) = 0$

Algoritmo de reducción

Dada M , variedad de dimensión m y una EDA cuasilineal (2), se demuestra que esta ecuación puede transformarse en una EDA cuasilineal equivalente $\tilde{A}(x)\dot{x} = \tilde{f}(x)$ y que resulta de rango localmente constante sobre una variedad analítica \tilde{N} .

Existe una proyección de \tilde{N} en M tal que las soluciones de la EDA reducida se proyectan como soluciones de la EDA original.

Aplicando el algoritmo, la ecuación (2) se reduce a $\tilde{A}(x)\dot{x} = \tilde{f}(x)$ (3) con:

$$\tilde{A}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -L(-x_1 - x_2) & -L(-x_1 - x_2) \\ C(\varphi(x_1))\varphi'(x_1) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \varphi(x_1) \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Si $\varphi(x_1^*) = 0$ y $\varphi'(x_1^*) = 0$, $x^* = (x_1^*, 0)$ es un equilibrio singular.

Existencia de una variedad de cruce

Proposición (1)

Sea la EDA cuasilineal $A(x)\dot{x} = f(x)$, $A \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times n})$ y $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ en un entorno del punto de equilibrio singular no crítico x^* , es decir: $f(x^*) = 0$, $\det A(x^*) = 0$, $\nabla \det A(x^*) \neq 0$.
Sea v_λ el autovector correspondiente al autovalor no nulo λ de la matriz $A_0 = \text{Adj}A(x^*)J(x^*)$, donde J es la matriz jacobiana de f .
Si se cumple la condición $\text{rg} \begin{pmatrix} \text{Adj}A(x^*)J(x^*) \\ \nabla \det A(x^*) \end{pmatrix} = 2$ entonces existe una variedad unidimensional tangente en x^* a v_λ . Además, si v_λ no es normal con $\nabla \det A(x^*)$, el equilibrio singular x^* es un punto de cruce.

Proposición (2)

Consideremos la ecuación $\dot{x} = g(x) = \text{Adj}A(x)f(x)$, donde x^* es un punto de equilibrio. Si se cumple la condición $\text{rg} \begin{pmatrix} \text{Adj}A(x^*)J(x^*) \\ \nabla \det A(x^*) \end{pmatrix} = 2$, existe una variedad unidimensional tangente en x^* al vector v_λ , correspondiente al autovalor no nulo de la matriz $A_0 = \text{Adj}A(x^*)J(x^*)$. La ecuación de la variedad es la solución $y = h(z)$ de la ecuación diferencial $0 = A_1h(z) + g_1(h(z), z) - h'(z) [\lambda z + g_2(h(z), z)]$ para $\|z\| < \delta$.

Existencia de una variedad de cruce en el circuito

Aplicamos la Proposición (1) al sistema reducido (3) del circuito RLC. Se cumple la condición

$$\text{rango} \begin{pmatrix} \text{adj}A(x^*)J(x^*) \\ \nabla \det A(x^*) \end{pmatrix} = 2$$

y luego, existe una variedad unidimensional W_1 tangente al autovector no nulo.

Existencia de una variedad de cruce en el circuito

En este caso, la matriz A_0 es

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & L(-x_1^*) \\ 0 & -L(-x_1^*) \end{pmatrix}$$

Los autovalores son $\lambda_0 = 0$ y $\lambda_1 = -L(-x_1^*)$

Los autovectores correspondientes son $v_0 = (1, 0)$ y $v_1 = (1, -1)$

El espacio tangente a W_1 en x^* está generado por el autovector v_1 .

Puesto que v_1 no es ortogonal con

$$\nabla \det A(x^*) = (-L(-x_1^* - x_2^*)C(\varphi(x_1^*))\varphi''(x_1^*), 0)$$

en el sistema (3), x^* es un punto de cruce.

Ejemplo

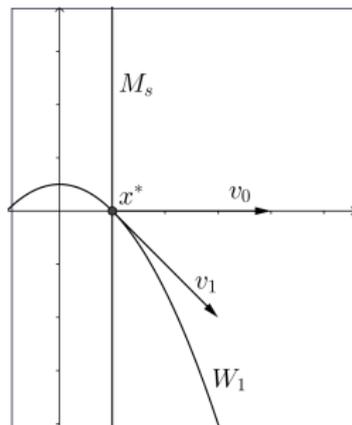
Sea $\varphi(x) = (x - a)^2(x - b)$ con $a \neq b$, y $L = C = \text{cte}$.

Puesto que en $x^* = (a, 0)$, $\varphi'(x) = (x - a)(3x - 2b - a)$ se anula y $\varphi''(x) = 2(3x - b - 2a)$ no se anula, x^* es punto de equilibrio singular no crítico.

La variedad de unidimensional W_1 de ecuación $y = h(z)$ es tangente en $(a, 0)$ al vector $v_1 = (1, -1)$ y es solución de la ecuación:

$$0 = -C(h(z) + z)^3(h(z) + z + a - b)(3h(z) + 3z + 2a - 2b) + h'(z) [-Lz + C(h(z) + z)^3(h(z) + z + a - b)(3h(z) + 3z + 2a - 2b)]$$

Ejemplo



$$M_s : x = \frac{b+2a}{3}$$

La variedad de cruce W_1 es tangente al vector $v_1 = (1, -1)$

Bibliografía

- [1] R. RIAZA, *Stability Issues in Regular and Noncritical Singular DAEs*, Acta Applicandae Mathematicae 73: 301-336, 2002.
- [2] H. CENDRA, M. ETCHECHOURY , *Desingularization of implicit analytic differential equations* , J. Phys. A: Math. Gen. 39 10975-11001, 2006.
- [3] H. KHALIL, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, 2da edición, 1996.

MUCHAS GRACIAS