

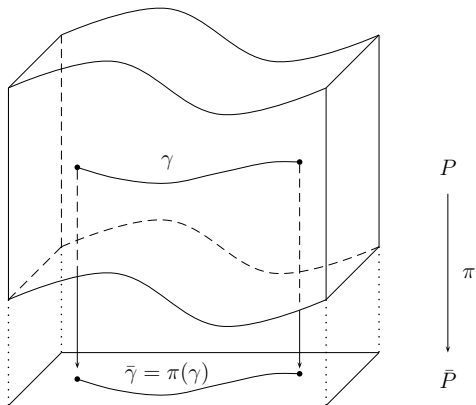
Reducción geométrica y campos de segundo orden

Eduardo García-Toraño Andrés

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNS

(Tom Mestdag – UGENT)

Reducción geométrica



Ejemplo (Poisson): G actúa en $(P, \{\cdot, \cdot\})$ y deja invariante $\{\cdot, \cdot\}$, entonces

$$(\bar{P} = P/G, \{\cdot, \cdot\}_{\text{red}}).$$

Además, hay versión dinámica (relaciona soluciones).

Sólido rígido: $\dot{\Pi} = \Pi \times \mathbb{I}^{-1}\Pi$, siendo $\Pi = \mathbb{I}\Omega$.

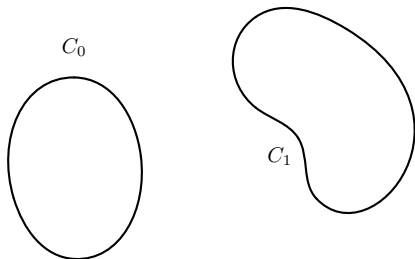
Caso Lagrangiano

Sistema Lagrangiano $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ invariante bajo acción $G \times M \rightarrow M$. Si elegimos una conexión A en $M \rightarrow M/G$ tenemos $TM/G \cong T(M/G) \oplus \tilde{\mathfrak{g}}$.

$$L \in TM \Rightarrow \tilde{L} \in T(M/G) \oplus \tilde{\mathfrak{g}}.$$

$$(L, TM) \longleftrightarrow \begin{cases} \text{P. Variacional} & \delta \int L(q, \dot{q}) dt = 0. \\ \text{Coordenadas} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) = 0. \end{cases}$$

$$(\tilde{L}, T(M/G) \oplus \tilde{\mathfrak{g}}) \longleftrightarrow \begin{cases} \text{P. Variacional} & \delta \int \tilde{L}(x, \dot{x}, \bar{v}) dt = 0, \quad \delta \bar{v} = \frac{D\bar{\eta}}{Dt} + [\bar{v}, \bar{\eta}] + \tilde{B}(\delta x, \dot{x}). \\ \text{Coordenadas} & \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^i} \right) - \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \bar{v}^a} (B_{ji}^a \dot{x}^j + C_{db}^a \bar{v}^d A_i^b) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \bar{v}^b} \right) = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \bar{v}^a} (C_{db}^a \bar{v}^d - C_{db}^a A_i^d \dot{x}^i). \end{cases} \end{cases}$$



Shape Matching C_0, C_1

$$\bar{M} = \text{Emb}(S^1, \mathbb{R}^2) / \text{Diff}(S^1)$$

Para comparar C_0 con C_1 construimos $C(s, t) : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \bar{M}$ con $C(s, 0) = C_0(s)$ y $C(s, 1) = C_1(s)$. C satisfecerá para algún $\ell : T\bar{M} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\int_0^1 \ell(C, \dot{C}) dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Euler-Lagrange}(\ell) = 0.$$

Puede resultar mejor mirar en $\text{Emb}(S^1, \mathbb{R}^2)$ directamente.

Un-reduction: Consideremos sistema Lagrangiano $(\ell, T\bar{M})$ y un fibrado principal $\pi : M \rightarrow \bar{M} = M/G$. Queremos encontrar un sistema Lagrangiano (L, TM, F) (donde F son fuerzas) tal que sus soluciones se proyecten via π en las de $(\ell, T\bar{M})$.

Solución en [BEGH]: Interpretar la ecuación para ℓ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{x}^i} \right) - \left(\frac{\partial \ell}{\partial x^i} \right) = 0, \quad (\text{siendo } (x^i, \dot{x}^i) \in T\bar{M})$$

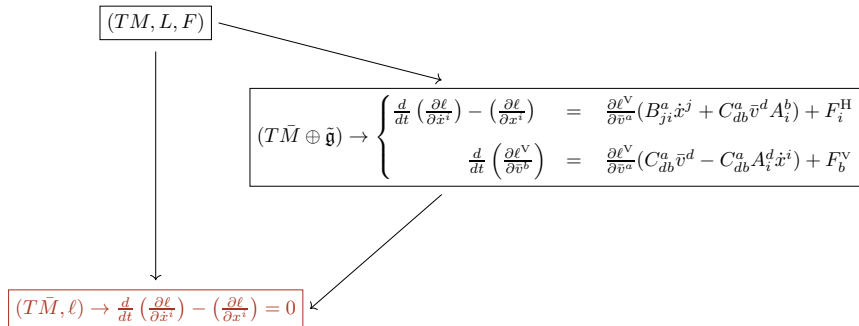
como la ecuación horizontal de la reducción de Lagrange-Poincaré para algún L a determinar. Para ello queremos que se tenga $\tilde{L} = \ell + \ell^V$, y así:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^i} \right) - \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^i} \right) = (\dots) + F_i^H \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{x}^i} \right) - \left(\frac{\partial \ell}{\partial x^i} \right) = (\dots) + F_i^H$$

Para cancelar el segundo miembro, permiten que L tenga fuerzas:

$$(\dots) + F_i^H = 0.$$

Datos iniciales: sistema Lagrangiano $(\ell, T\bar{M})$, fibrado principal $M \rightarrow \bar{M} = M/G$.



[BEGH]: Construyen sistema Lagrangiano $L = L^V + L^H$ con fuerzas F de manera que se verifique $\tilde{L} = \ell^V + \ell$ y

$$\frac{\partial \ell^V}{\partial \bar{v}^a} (B_{ji}^a \dot{x}^j + C_{db}^a \bar{v}^d A_i^b) + F_i^H = 0.$$

1) Tanto las ecuaciones de ℓ en $T\bar{M}$ como las del sistema “un-reduced” en TM se formulan en fibrados tangentes. Sin embargo cuando se aplica el método anterior ([BEGH]), uno precisa trabajar en un algebroide:

$$TM/G = T\bar{M} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}$$

2) La estructura básica que comparten el sistema dado y el sistema “un-reduced” es que vienen dados por campos de segundo orden (SODE).

Objetivo de esta charla: Estudiar “un-reduction” en el contexto de SODE. Más precisamente: *Dada un SODE en $\bar{M}$,*

$$\bar{\Gamma} = \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + f^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i},$$

se trata de encontrar un SODE Γ en M cuyas soluciones (curvas integrales) se proyecten en las de $\bar{\Gamma}$.

Campos de segundo orden (SODE)

Definición Un SODE en M es un campo Γ en TM tal que

$$T\tau_M \circ \Gamma = id_M, \quad (T\tau_M : M \rightarrow M).$$

Algunas propiedades:

1) En coordenadas, si $(q^i, \dot{q}^i)$ son coordenadas en TM , un SODE tiene la forma

$$\Gamma = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + f^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}, \quad (f^i \text{ función en } M).$$

2) Γ es un SODE si, y sólo si, sus curvas integrales son de la forma $(c, \dot{c})$ para $c : I \rightarrow M$.

3) Para el caso $\pi : M \rightarrow \bar{M} = M/G$. Si Γ es SODE en M , entonces

$$\bar{\Gamma} = TT\pi \circ \Gamma$$

es SODE en $\bar{M}$. (Ojo: dada $\bar{\Gamma}$ y una conexión en $T\pi$, $\bar{\Gamma}^H$ no es un SODE.)

Consideramos una conexión principal en $\pi : M \rightarrow \bar{M} = M/G$. Usamos coordenadas adaptadas:

$$\pi(x^i, x^a) = x^i.$$

Tenemos el referencial $\{X_i, \tilde{E}_a\}$ en M , siendo:

- $\{E_a\}$ generadores infinitesimales para una base $\{E_a\}$ de $\mathfrak{g}$.
- X_i levantamientos horizontales de campos $\frac{\partial}{\partial x^i}$ en $\bar{M}$.

Consideramos coordenadas (v^i, v^a) en TM de manera que se tenga para cada $v_m \in T_m M$:

$$v_m = v^i X_i + v^a \tilde{E}_a.$$

Lema Γ es un SODE en M si, y sólo si,

$$\Gamma = v^i X_i^C + v^a \tilde{E}_a^C + F^i X_i^V + F^a \tilde{E}_a^V,$$

siendo F^i, F^a funciones en TM .

Dos conexiones principales

Para caracterizar Γ a partir de $\bar{\Gamma}$ usamos la conexión en π . Denotamos

$$\omega : TM \rightarrow V\pi \subset TM \text{ (Proyector),} \quad \varpi : TM \rightarrow \mathfrak{g} \text{ (1-forma).}$$

Primera Conexión: La conexión en $T\pi : TM \rightarrow T\bar{M}$ obtenida con el levantamiento completo de ω , $\omega^C : TTM \rightarrow VT\pi \subset TTM$

$$\omega^C(X_i^C) = 0, \quad \omega^C(X_i^V) = 0, \quad \omega^C(\tilde{E}_a^C) = \tilde{E}_a^C, \quad \omega^C(\tilde{E}_a^V) = \tilde{E}_a^V.$$

Se conoce como la conexión de Vilms [1967–Vilms]. (Vale en general: dada ω conexión en $P \rightarrow Q$ fibrado, ω^C es conexión en $TP \rightarrow TQ$.)

Segunda Conexión: La conexión en $p : TM \rightarrow TM/G$ con el levantamiento vertical de ϖ . Su proyector $\Omega : TTM \rightarrow VTp \subset TTM$ verifica

$$\Omega(X_i^C) = 0, \quad \Omega(X_i^V) = 0, \quad \Omega(\tilde{E}_a^C) = \tilde{E}_a^C, \quad \Omega(\tilde{E}_a^V) = 0.$$

Hemos visto antes que el SODE más general en M era:

$$\Gamma = v^i X_i^C + v^a \tilde{E}_a^C + F^i X_i^V + F^a \tilde{E}_a^V,$$

Lema Denotemos mediante $\bar{\Gamma}^H$ el levantado horizontal de un SODE $\bar{\Gamma}$ en $\bar{M}$. Se tiene

$$\bar{\Gamma}^H = \left(\dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + f^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \right)^H = \dot{x}^i X_i^C + f^i X_i^V$$

Obsérvese que no es un SODE: falta la parte " $v^a \tilde{E}_a^C$ ".

Lema Sea Γ_0 un SODE arbitrario en M . Entonces

$$X_\omega = \Omega(\Gamma_0) = v^a \tilde{E}_a^C.$$

Obsérvese que X_ω es independiente de $\bar{\Gamma}$.

Un-reducing un SODE

Tenemos $\pi : M \rightarrow \bar{M}$ y $\bar{\Gamma}$ SODE en $\bar{M}$.

$$\bar{\Gamma} = \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + f^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \xrightarrow{\text{Unreduction?}} \Gamma = v^i X_i^C + v^a \tilde{E}_a^C + F^i X_i^V + F^a \tilde{E}_a^V,$$

Ahora, sabemos que $TT\pi \circ \Gamma = \bar{\Gamma}$, i.e. $F^i = f^i$.

Por lo tanto el Γ más general es

$$\Gamma = \underbrace{v^i X_i^C + f^i X_i^V}_{\bar{\Gamma}^H} + \underbrace{v^a \tilde{E}_a^C}_{X_\omega} + F^a \tilde{E}_a^V$$

donde

- $\bar{\Gamma}^H$: levantado horizontal con respecto a la conexión de Vilms.
- $X_\omega = \Omega(\Gamma_0)$: Parte vertical de un SODE arbitrario Γ_0 en M respecto a Ω .
- $F^a \tilde{E}_a^V$: Término libre.

Definición Sea $\bar{\Gamma}$ un SODE en $\bar{M} = M/G$ y ω una conexión en π . El “primary unreduced SODE” de $(\bar{\Gamma}, \omega)$ es el SODE en M dado por

$$\Gamma_1 = \bar{\Gamma}^H + X_\omega.$$

En coordenadas

$$\bar{\Gamma} = \dot{x}^i \partial / \partial x^i + f^i \partial / \partial \dot{x}^i \longrightarrow \Gamma_1 = v^i X_i^C + f^i X_i^V + v^a \tilde{E}_a^C + 0 \tilde{E}_a^V.$$

Proposición

- 1) Γ_1 es G -invariante (pero no TG -invariante).
- 2) Las curvas integrales c of Γ_1 se proyectan, via $\pi : M \rightarrow M/G$, en las curvas integrales $\bar{c}$ de $\bar{\Gamma}$.
- 3) Γ_1 es el único SODE que se proyecta en $\bar{\Gamma}$ y que satisface $\omega^C(\Gamma) = X_\omega$.
- 4) Γ_1 es el único SODE que se proyecta en $\bar{\Gamma}$ y que es tangente a la distribución horizontal de ω .

La forma más general de Γ que es “un-reduction” es:

$$\Gamma = \underbrace{v^i X_i^C + f^i X_i^V + v^a \tilde{E}_a^C}_{\Gamma_1 = \bar{\Gamma}^H + X_\omega} + \overbrace{F^a \tilde{E}_a^V}^{\text{Libre}}$$

Proposición Sea V un campo en TM que es $T\pi$ vertical y tal que $\Omega(V) = 0$. Entonces $\Gamma_2 = \Gamma_1 + V$ es un SODE cuyas curvas integrales c se proyectan en las curvas integrales $\bar{c}$ de $\bar{\Gamma}$.

Notar que un tal V es precisamente del tipo $V^a \tilde{E}_a^V$.

Tenemos caracterizadas todas los SODE Γ_2 que son “un-reduction’s” de una $\bar{\Gamma}$ dada. Son precisamente del tipo

$$\Gamma = \Gamma_1 + V.$$

Luego si $\bar{\Gamma}$ está dada por ℓ , la solución de [BEGH] debe de ser uno de estos Γ_2 .

Caso de una métrica (Lagrangiano)

Consideramos $(\bar{M}, \bar{g})$, siendo $\bar{\Gamma}_{\bar{g}}$ el spray geodésico. Queremos obtener una métrica (M, g) tal que Γ_g se proyecte en $\bar{\Gamma}_{\bar{g}}$ módulo alguna fuerza.

La construcción en [BEGH] es como sigue:

- 1) Se toma una forma bi-invariante, simétrica y no degenerada en $\mathfrak{g}$:

$$T : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}.$$

- 2) Con la conexión consideran

$$L(\cdot) = \bar{g}(\varpi(\cdot), \varpi(\cdot)) + T(\varpi(\cdot), \varpi(\cdot)) \rightsquigarrow g.$$

Su spray geodésico en Γ_g .

- 3) Ahora Γ_g no se proyecta en $\bar{\Gamma}_{\bar{g}}$. Sustraen lo que denominan “distorsión por curvatura” A , de manera que obtienen

$$\Gamma_2 = \Gamma_g - A.$$

Pero resulta que en nuestro language, de hecho $\Gamma_g - A = \Gamma_1$.

Sea G grupo de Lie. Tenemos conexión afín:

$$\nabla_{\zeta_L}^G \eta_L = \frac{1}{2}[\zeta, \eta]_L,$$

siendo η_L, ζ_L los campos invariantes a izquierda correspondientes a $\eta, \zeta \in \mathfrak{g}$.

- ∇^G no es una conexión métrica: de hecho su spray Γ^G no tiene porque ser variacional.
- Las curvas integrales $(c, \dot{c})$ de Γ^G que pasan por $(g, \eta) \in G \times \mathfrak{g}$ vienen dadas mediante

$$c(t) = g \exp(t\eta).$$

Ahora si N es subgrupo normal de G , $K = G/N$ es un grupo de Lie con su propia conexión canónica ∇^K , y por lo tanto podemos considerar spray Γ^K .

Pregunta: ¿Cuál es la relación entre Γ^K y Γ^G ? (Nótese que no podemos utilizar [BEGH] ya que no son sprays variacionales).

Respuesta: Elegimos en $\mathfrak{g}$ un producto escalar Ad_N -invariante, y tomamos $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}^\perp$. Definimos una conexión principal en $G \rightarrow K = G/N$:

$$\varpi(v_g) = P_{\mathfrak{n}}(TL_{g^{-1}}v_g).$$

donde $P_{\mathfrak{n}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{n}$ es el proyector respecto a la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}^\perp$.

Teorema *El spray Γ^G en G es primary un-reduced SODE de (Γ^K) en $K = G/N$ y la conexión ϖ .*

Definición Un SODE Γ en M se dice *submersivo* si existe un fibrado $\pi : M \rightarrow \bar{M}$ tal que Γ se proyecta en un SODE $\bar{\Gamma}$ en $\bar{M}$.

Nótese que la fibración π no está especificada. Sin embargo, si π viene dado (pero $\bar{\Gamma}$ no), entonces que Γ sea submersivo significa precisamente que Γ es un SODE que se proyecta en $\bar{\Gamma}$ (es decir, Γ se obtiene por “un-reduction”).

En nuestro formalismo, es sencillo probar el siguiente resultado de [KT]:

Proposición Sea $M \rightarrow \bar{M}$ un fibrado principal y Γ un SODE en M . Supongamos que se verifican:

- 1) $[\Gamma, \tilde{\xi}^C] = 0$ (i.e., Γ es G -invariant),
- 2) $[\tilde{\xi}^V, \Gamma] - \tilde{\xi}^C$ is tangent to $\mathfrak{g}^V$ (i.e., del tipo $\tilde{E}_a^V$).

Entonces Γ es submersivo.

Gracias