Asignación eficiente de árbitros en la Liga Nacional de Básquet de la Argentina mediante Programación Matemática

Guillermo Durán[1] Mario Guajardo[2] Facundo Gutiérrez [1]

[1]Instituto del Cálculo, FCEN
Universidad de Buenos Aires

[2]Business and Management Science
Norwegian School of Economics

UMA, Bahía Blanca, Septiembre 2016

Esquema General

Contexto

- Desde la temporada 2014-2015 nuestro grupo de investigación de la UBA trabaja en conjunto con la Asociación de Clubes de Básquet (AdC) para programar los torneos profesionales del básquet argentino.
- Se han programado la Liga Nacional (Primera División) y el Torneo Nacional de Ascenso (Segunda División) en las últimas 3 temporadas.
- Hemos reportado ahorros en km. viajados y costos de viajes que rondan el 30 %.
- Se propone en este trabajo una continuidad de este proyecto: la asignación eficiente de los árbitros a los partidos a ser disputados por medio de Programación Matemática.

Descripción del Problema

- Cada partido es dirigido por un árbitro principal (categoría A) y un árbitro asistente (categoría A1). A los efectos de nuestro modelo asumimos que cada problema es resuelto de manera independiente.
- Queremos hacer la asignación de modo de cumplir con las condiciones impuestas por la AdC, minimizando los costos globales de viaje.

Datos de entrada de nuestro modelo

- Fixture del campeonato.
- Costo del viaje entre cada par de ubicaciones (ya sea domicilios de los árbitros o sedes de los partidos).
- Posibilidad (o no) de dirigir en días consecutivos entre cada par de ubicaciones.

Salida del Modelo

- Asignación arbitral para una cierta ventana de tiempo dada (se realizan asignaciones parciales hasta un día a elección, y se sigue a partir de allí).
- Datos estadísticos de la asignación realizada (por ejemplo: los kilómetros acumulados por árbitro y la cantidad de partidos que dirigió)

Modelo Matemático

Función Objetivo

La solución busca minimizar el costo total de los viajes que realizan todos los árbitros, incluyendo los costos asociados a estadías en hotel.

Restricciones Deportivas

Estas condiciones se cumplen de manera estricta en la asignación:

1. Cantidad mínima de partidos a dirigir por todos los árbitros (hasta un cierto día, eventualmente, durante todo el campeonato)
2. Cantidad mínima de partidos que deben ocurrir para que un árbitro vuelva a dirigir a un equipo.

Modelo Matemático

Restricciones Deportivas

3. Cantidad máxima de días en la gira de un árbitro (días seguidos sin pasar por su domicilio)
4. Dirigir a lo sumo 3 partidos en 5 días para todo árbitro.
5. Prohibiciones entre árbitros y equipos (local y/o visitante)

Formulación del Modelo

Variables Utilizadas

$$x_{itkl} = \begin{cases} 1 & \text{si el árbitro } \mathbf{i} \text{ dirige el día } \mathbf{t} \text{ el partido entre } \mathbf{k} \text{ y } \mathbf{l} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$v_{istkm} = \begin{cases} 1 & \text{si el árbitro } \mathbf{i} \text{ realiza un viaje de largo } \mathbf{s} \text{ el día } \mathbf{t} \\ & \text{desde la localía } \mathbf{k} \text{ hasta la localía } \mathbf{m} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Tenemos **2460** variables 'x' y **18180** variables 'v' en el modelo.

Conjuntos de índices

- $\mathbb{S}$ = conjunto de partidos del campeonato
- $\mathbb{A} = \{1...10\}$(conjunto de árbitros)
- $\mathbb{E} = \{1...20\}$(conjunto de equipos)

Restricciones

1. Cantidad mínima de partidos que debe dirigr un árbitro:

$$\sum_{\substack{(t,k,l)\in\mathbb{S} \\ \text{con } t\leq t_{\text{ventana}} \\ k>0}} x_{itkl} \geq \alpha \quad \forall i \in \mathbb{A}$$

2. Deben ocurrir 3 partidos para que un árbitro pueda dirigir a un mismio equipo:

$$\sum_{(t,k,l)\in\mathbb{S}_{k,q}} x_{itkl} \leq 1 \quad \forall i \in \mathbb{A}, \forall, k \in \mathbb{E}, \forall q \in \{1...15\}$$

Donde cada equipo juega 18 partidos y $\mathbb{S}_{k,q}$ refiere a los partidos q,q+1,q+2 y q+3 del equipo **k** en orden cronológico.

Restricciones

3. Al menos una vez cada 12 días un árbitro debe pasar por su domicilio ($\mathbf{k} = \mathbf{l} = 0$, denota el domicilio de un árbitro):

$$\sum_{q \leq t \leq q+12} x_{it00} \geq 1 \quad \forall i \in \mathbb{A}, \forall q \in \{1 \ldots t_{\text{ventana}} - 12\}$$

4. Dirigir a lo sumo 3 partidos en una ventana de 5 días:

$$\sum_{\substack{(t,k,l) \in \mathbb{S} \\ \text{con } q \leq t < q+5}} x_{itkl} \leq 3 \quad \forall i \in \mathbb{A}, \forall q \in \{1 \ldots t_{\text{ventana}} - 5\}$$

Restricciones

5. Prohibiciones entre equipos y árbitros:

$$\sum_{(t,k,l)\in\mathbb{S}} x_{itkl} = 0 \quad \forall (i,k) \in \mathbb{Q}$$

Donde $\mathbb{Q} = \{(i,k):$ el árbitro **i** no puede dirigir al equipo **k**$\}$

Restricciones

Las restricciones anteriores tenían un carácter deportivo. Sin embargo, uno tiene que tener en cuenta que el modelo respete otras condiciones de la realidad.

6. No dirigir 2 partidos en un mismo día:

$$\sum_{(t,k,l)\in\mathbb{S}} x_{itkl} \leq 1 \quad \forall i \in \mathbb{A}, \forall t \in \{1 \ldots t_{\text{ventana}}\}$$

7. Asignar los árbitros a cada partido:

$$\sum_{i\in\mathbb{A}} x_{itkl} = 1 \quad \forall (t,k,l) \in \mathbb{S} \text{ con } t \leq t_{\text{ventana}}$$

Restricciones

8. Viajes de un día:

$$\forall i \in \mathbb{A}, \forall t \leq (t_{\text{ventana}} - 1) \text{ y } (t,k,l) \in \mathbb{S}, (1,t,k,m,n) \in \mathbb{P}:$$

$$\begin{cases} x_{itkl} + x_{i,t+1,mn} & \leq & 1 + v_{i1tkm} \\ 2 \cdot v_{i1tkm} & \leq & x_{itkl} + x_{i,t+1,mn} \end{cases}$$

Se puede resumir en que un árbitro realiza un viaje enre k y m desde tiempo t a $t+1$ si y solo si arbitra en k a tiempo t y en m a tiempo $t+1$. Cada ecuación representa una de las implicaciones. Aquí $\mathbb{P}$ denota el conjunto de los viajes posibles entre sedes.

Restricciones

9. Viajes de dos días:

$$\forall i \in \mathbb{A}, \forall t \leq (t_{\text{ventana}} - 2) \text{ y } (t, k, l) \in \mathbb{S}, (2, t, k, m, n) \in \mathbb{P} :$$

$$\begin{cases} x_{itkl} + x_{i,t+2,mn} & \leq & 1 + v_{i2tkm} + \sum_{(1,t,k,b,c) \in \mathbb{P}} v_{i1tkb} \\ 2 \cdot v_{i2tkm} & \leq & x_{itkl} + x_{i,t+2,mn} \end{cases}$$

Misma idea que antes, pero teniendo el cuidado de que el viaje desde k a tiempo t hasta m a tiempo $t+2$ puede deberse a que el árbitro dirigió a tiempo $t+1$ en alguna sede b intermedia (no necesariamente pasó directamente de k a m).

Restricciones

10 Pasar por alguna ubicación cada 2 días (tanto sede de algún equipo como domicilio propio de un árbitro)

$$\sum_{(t,k,l)\in\mathbb{S}} x_{itkl} + \sum_{(t+1,m,n)\in\mathbb{S}} x_{i,t+1,mn} \geq 1 \quad \forall i \in \mathbb{A}, \forall t \leq t_{\text{ventana}} - 1$$

Esta restricción es necesaria para poder modelar los viajes de los árbitros y poder hacer el seguimiento de cada árbitro a la hora de calcular los costos.

Además, el modelo tiene otras restricciones que se utilizan para fijar los datos en tiempos distintos a la ventana actual donde se está realizando la asignación (11 restricciones más).

Función Objetivo

Como vimos se busca minimizar el costo total de los viajes que realizan los árbitros.

Parámetros de entrada

- d_{km} = costo del viaje entre las sedes de los equipos **k** y **l**
- r_{ik} = costo del viaje entre las sedes del árbitro **i** y el equipo **k**
- zA_i = zona del árbitro **i**
- zE_k = zona del equipo **k**
- c = costo de hotel

Se modela el gasto en hotel incurriendo en un gasto de c cuando un árbitro realiza un viaje entre dos zonas distintas (sin salir ni llegar a su domicilio).

Función Objetivo

$$\min : \overbrace{\sum_{i \in \mathbb{A}} \sum_{\substack{(s,t,k,m,n) \in \mathbb{P} \\ k>0 \\ m>0}} v_{istkm} \cdot d_{km}}^{\text{viaje entre equipos}} + \overbrace{\sum_{i \in \mathbb{A}} \sum_{\substack{(s,t,k,m,n) \in \mathbb{P} \\ k>0 \\ m=0}} v_{istkm} \cdot r_{ik}}^{\text{viajes que llegan a un domicilio}} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{i \in \mathbb{A}} \sum_{\substack{(s,t,k,m,n) \in \mathbb{P} \\ k=0 \\ m>0}} v_{istkm} \cdot r_{im}}_{\text{viajes que salen de un domicilio}} + \underbrace{\sum_{i \in \mathbb{A}} \sum_{\substack{(2,t,k,m,n) \in \mathbb{P} \\ k>0 \\ m>0 \\ zA_i \neq zE_k}} v_{i2tkm} \cdot c}_{\text{costo de hotel}}$$

¿Cómo funciona el modelo?

Pasos que se realizan

1. Se elige el día hasta el que se desea calcular la asignación (lo que llamamos antes como t_{ventana})
2. También se elige la cantidad mínima de partidos que debe haber dirigido un árbitro hasta ese día (α)
3. Se corre el modelo hasta 5 días más adelante que el día elegido, obteniendo una asignación óptima en esta ventana de días (aquí se usa CPLEX).
4. Se toma la solución hasta el día original (estos dos pasos se hacen por cuestiones de continuidad en la solución)
5. Se fijan estos datos, y queda listo para generar una nueva asignación hasta el próximo día a elegir.

Resultados y Conclusión

Asignación de Fase Regional 2015-2016 obtenida por el modelo

A lo largo del campeonato se consigue una asignación arbitral que no solo cumple con las restricciones vistas anteriormente sino que además incurre en un costo de $ 417.470, recorriendo los árbitros en su totalidad 294.672 kilómetros.

Asignación real de la Fase Regional 2015-2016 sometida al modelo

Fijando en el mismo modelo la designación arbitral de la Fase Regional, se obtiene un total de $575.764 y 419.400 kilómetros a lo largo del campeonato, lo cual significa una mejora de 27,5 % en cuanto a gastos y 29,7 % en distancias siempre a favor del modelo. Además, la asignación que ocurrió en la realidad no cumplió con todas las restricciones pedidas.

Resultados y Conclusión

Días	Partidos	Tiempo de Corrida
15	43	¿¿¿???
14	39	2758 seg $\sim$ 45 min
13	38	745 seg $\sim$ 12,5 min
12	34	54,3 seg
11	31	48,16 seg
10	28	8,32 seg
9	25	4,84 seg
8	22	2,86 seg
7	21	1,52 seg
6	17	0,2 seg

Conclusión

El modelo resulta satisfactorio y permite ayudar al experto a tener una herramienta más con la cual tomar decisiones. Además de una mejora en los costos, el uso del modelo permite tener un mayor control sobre la calidad deportiva de las asignaciones mediante el uso de restricciones duras como las que vimos.