

Reducción de Routh y sistemas integrables AKS

Sistemas AKS como mecánica lagrangiana reducida

S. Capriotti¹

¹Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur

Reunión Anual UMA, Bahía Blanca, 2016

La charla

Introducción

Sistemas Lagrangianos

Reducción de Routh

Esquema [LC10; GMY16]

Sistemas AKS - Lagrangiano de Fehér

Sistemas AKS via reducción de Routh

Definiciones

Sistemas Lagrangianos

Es un triple (Q, L, F) , donde

- Q es una variedad de dimensión n ,
- $L \in C^\infty(TQ)$ es una función, y
- $F : TQ \rightarrow T^*Q$. Caso particular

$$F \in \Omega^1(Q, T^*Q).$$

Curva crítica

$\gamma : I \rightarrow Q$ es *crítica* para (Q, L, F) sii

$$\delta \int_I L(\dot{\gamma}(t)) dt = - \int_I \langle F(\dot{\gamma}(t)), \delta \gamma(t) \rangle dt$$

para variaciones arbitrarias $\delta \gamma \in \Gamma(\gamma^*(TQ))$.

Definiciones

Sistemas Lagrangianos

Es un triple (Q, L, F) , donde

- Q es una variedad de dimensión n ,
- $L \in C^\infty(TQ)$ es una función, y
- $F : TQ \rightarrow T^*Q$. Caso particular

$$F \in \Omega^1(Q, T^*Q).$$

Curva crítica

$\gamma : I \rightarrow Q$ es *crítica* para (Q, L, F) sii

$$\delta \int_I L(\dot{\gamma}(t)) dt = - \int_I \langle F(\dot{\gamma}(t)), \delta \gamma(t) \rangle dt$$

para variaciones arbitrarias $\delta \gamma \in \Gamma(\gamma^*(TQ))$.

Sistemas Lagrangianos G -invariantes

- G grupo de Lie, $p_G^Q : Q \rightarrow Q/G$ fibrado principal.
- (Q, L, F) G -invariante sii
 - (a) L G -invariante,
 - (b) $F \circ \Phi_g^{TQ} = \Phi_g^{T^*Q} \circ F$ para todo $g \in G$, y
 - (c) $\langle F, \xi_Q \rangle = 0$ para todo $\xi \in \mathfrak{g}$.

Lema:

Existe $f : TQ/G \rightarrow T^*(Q/G)$ tal que

$$\left(p_G^Q\right)^*(f([v_q])) = F(v_q), \quad \forall v_q \in TQ.$$

- Definamos $J_L : TQ \rightarrow \mathfrak{g}^*$ via

$$\langle J_L(v_q), \xi \rangle = \left(\xi_Q^V \right) \Big|_{v_q} \cdot L$$

para todo $v_q \in TQ$, $\xi \in \mathfrak{g}$, $X^V \in \mathfrak{X}(TQ)$ levantamiento vertical.

Cantidad conservada!

Sistemas Lagrangianos G -invariantes

- G grupo de Lie, $p_G^Q : Q \rightarrow Q/G$ fibrado principal.
- (Q, L, F) G -invariante sii
 - (a) L G -invariante,
 - (b) $F \circ \Phi_g^{TQ} = \Phi_g^{T^*Q} \circ F$ para todo $g \in G$, y
 - (c) $\langle F, \xi_Q \rangle = 0$ para todo $\xi \in \mathfrak{g}$.

Lema:

Existe $f : TQ/G \rightarrow T^*(Q/G)$ tal que

$$\left(p_G^Q\right)^*(f([v_q])) = F(v_q), \quad \forall v_q \in TQ.$$

- Definamos $J_L : TQ \rightarrow \mathfrak{g}^*$ via

$$\langle J_L(v_q), \xi \rangle = \left(\xi_Q^V \right) \Big|_{v_q} \cdot L$$

para todo $v_q \in TQ$, $\xi \in \mathfrak{g}$, $X^V \in \mathfrak{X}(TQ)$ levantamiento vertical.

Cantidad conservada!

Sistemas Lagrangianos G -invariantes

- G grupo de Lie, $p_G^Q : Q \rightarrow Q/G$ fibrado principal.
- (Q, L, F) G -invariante sii
 - (a) L G -invariante,
 - (b) $F \circ \Phi_g^{TQ} = \Phi_g^{T^*Q} \circ F$ para todo $g \in G$, y
 - (c) $\langle F, \xi_Q \rangle = 0$ para todo $\xi \in \mathfrak{g}$.

Lema:

Existe $f : TQ/G \rightarrow T^*(Q/G)$ tal que

$$\left(p_G^Q\right)^*(f([v_q])) = F(v_q), \quad \forall v_q \in TQ.$$

- Definamos $J_L : TQ \rightarrow \mathfrak{g}^*$ via

$$\langle J_L(v_q), \xi \rangle = \left(\xi_Q^V \right) \Big|_{v_q} \cdot L$$

para todo $v_q \in TQ$, $\xi \in \mathfrak{g}$, $X^V \in \mathfrak{X}(TQ)$ levantamiento vertical.

Cantidad conservada!

Esquema de reducción

Idea: Reducir el sistema mecánico en una superficie de nivel de J_L .

- Sea $\mu \in \mathfrak{g}$ valor regular de J_L , G_μ su grupo de isotropía.
- ω_Q forma de conexión sobre $Q \rightarrow Q/G$.

Prop: $TQ/G_\mu \simeq T(Q/G) \times Q/G_\mu \times \tilde{\mathfrak{g}}$ via

$$[v_q]_\mu \longmapsto \left(T p_G^Q(v_q), [q]_\mu, [q, \omega_Q(v_q)] \right).$$

Entonces tenemos

$$\begin{array}{ccc} T(Q/G_\mu \times \tilde{\mathfrak{g}}) & \xrightarrow{\quad p_1 \quad} & TQ/G_\mu \\ & \searrow \phi_\mu & \parallel \\ & & T(Q/G) \times Q/G_\mu \times \tilde{\mathfrak{g}} \end{array}$$

si $\bar{p}([q]_\mu) := [q]$ y

$$\phi_\mu : V \in T_{([q]_\mu, [q, \xi])}(Q/G_\mu \times \tilde{\mathfrak{g}}) \mapsto (T\bar{p}(V), [q]_\mu, [q, \xi]).$$

Esquema de reducción

Idea: Reducir el sistema mecánico en una superficie de nivel de J_L .

- Sea $\mu \in \mathfrak{g}$ valor regular de J_L , G_μ su grupo de isotropía.
- ω_Q forma de conexión sobre $Q \rightarrow Q/G$.

Prop: $TQ/G_\mu \simeq T(Q/G) \times Q/G_\mu \times \tilde{\mathfrak{g}}$ via

$$[v_q]_\mu \longmapsto \left(T p_G^Q(v_q), [q]_\mu, [q, \omega_Q(v_q)] \right).$$

Entonces tenemos

$$\begin{array}{ccc} T(Q/G_\mu \times \tilde{\mathfrak{g}}) & \xrightarrow{p_1} & TQ/G_\mu \\ & \searrow \phi_\mu & \parallel \\ & & T(Q/G) \times Q/G_\mu \times \tilde{\mathfrak{g}} \end{array}$$

si $\bar{p}([q]_\mu) := [q]$ y

$$\phi_\mu : V \in T_{([q]_\mu, [q, \xi])}(Q/G_\mu \times \tilde{\mathfrak{g}}) \mapsto (T\bar{p}(V), [q]_\mu, [q, \xi]).$$

Esquema de reducción II

- Routhiano $R_\mu := L - \langle \mu, \omega_Q \rangle$ G_μ -invariante $\Rightarrow \bar{R}_\mu \in C^\infty(TQ/G_\mu)$.
- La 2-forma $G_\mu := \langle \mu, d\omega_Q \rangle$ se reduce a $\beta_\mu \in \Omega^2(Q/G_\mu)$.

Teorema [LC10]

- Una curva crítica del sistema lagrangiano (Q, L, F) con momento μ proyecta sobre una curva crítica del sistema $(Q/G_\mu \times \tilde{\mathfrak{g}}, p_1^* \bar{R}_\mu, f + \beta_\mu)$.
- Si una curva crítica del sistema lagrangiano $(Q/G_\mu \times \tilde{\mathfrak{g}}, p_1^* \bar{R}_\mu, f + \beta_\mu)$ es proyección de una curva $\gamma: I \rightarrow TQ$, entonces γ es solución del sistema lagrangiano (Q, L, F) con momento μ .

Esquema de reducción II

- Routhiano $R_\mu := L - \langle \mu, \omega_Q \rangle$ G_μ -invariante $\Rightarrow \bar{R}_\mu \in C^\infty(TQ/G_\mu)$.
- La 2-forma $G_\mu := \langle \mu, d\omega_Q \rangle$ se reduce a $\beta_\mu \in \Omega^2(Q/G_\mu)$.

Teorema [LC10]

- Una curva crítica del sistema lagrangiano (Q, L, F) con momento μ proyecta sobre una curva crítica del sistema $(Q/G_\mu \times \tilde{\mathfrak{g}}, p_1^* \bar{R}_\mu, f + \beta_\mu)$.
- Si una curva crítica del sistema lagrangiano $(Q/G_\mu \times \tilde{\mathfrak{g}}, p_1^* \bar{R}_\mu, f + \beta_\mu)$ es proyección de una curva $\gamma: I \rightarrow TQ$, entonces γ es solución del sistema lagrangiano (Q, L, F) con momento μ .

Esquema de reducción II

- Routhiano $R_\mu := L - \langle \mu, \omega_Q \rangle$ G_μ -invariante $\Rightarrow \bar{R}_\mu \in C^\infty(TQ/G_\mu)$.
- La 2-forma $G_\mu := \langle \mu, d\omega_Q \rangle$ se reduce a $\beta_\mu \in \Omega^2(Q/G_\mu)$.

Teorema [LC10]

- Una curva crítica del sistema lagrangiano (Q, L, F) con momento μ proyecta sobre una curva crítica del sistema $(Q/G_\mu \times \tilde{\mathfrak{g}}, p_1^* \bar{R}_\mu, f + \beta_\mu)$.
- Si una curva crítica del sistema lagrangiano $(Q/G_\mu \times \tilde{\mathfrak{g}}, p_1^* \bar{R}_\mu, f + \beta_\mu)$ es proyección de una curva $\gamma: I \rightarrow TQ$, entonces γ es solución del sistema lagrangiano (Q, L, F) con momento μ .

Sistemas AKS Lagrangianos

- $K = K_+ K_-$ grupo de Lie factorizable.
- **Idea:** Formulación de un modelo mecánico^a de la reducción hamiltoniana de teorías de campo tipo WZNW^b.
- Su lagrangiano es

$$\begin{aligned}
 L_F(g, \dot{g}, \alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}) &= \\
 &= \frac{1}{2} \langle \dot{g} g^{-1} + \alpha + \text{Ad}_g \beta, \dot{g} g^{-1} + \alpha + \text{Ad}_g \beta \rangle - \langle \alpha, \mu \rangle - \langle \beta, \nu \rangle \\
 &\in C^\infty(TK \times \mathfrak{k}_+ \times \mathfrak{k}_-),
 \end{aligned}$$

donde $\mu \in \mathfrak{k}_+^*, \nu \in \mathfrak{k}_-^*$.

- Este lagrangiano es invariante por la acción de $(K_+)_\mu \times (K_-)_\nu$ dada por

$$(k_+, k_-) \cdot (g, \alpha, \beta) = (k_+ g k_-^{-1}, \text{Ad}_{k_+} \alpha, \text{Ad}_{k_-} \beta).$$

- **La dinámica en el cociente es un sistema AKS.**

^aL. Fehér y A. Gábor. "Adler–Kostant–Symes systems as Lagrangian gauge theories". En: *Physics Letters A* 301.1–2 (2002), págs. 58 -64. issn: 0375-9601.

^bL. Fehér y col. "On Hamiltonian reductions of the Wess-Zumino-Novikov- Witten theories". En: *Phys. Rept.* 222 (1992), págs. 1-64.

Grupos factorizables y Lagrangianos

- Definimos $M := K \times K_+ \times K_-$.
- Se trivializa TK , TK_- por izquierda, TK_+ por derecha.
- $L'(g, \zeta, g_+, \alpha, g_-, \beta) := (1/2) \langle \zeta, \zeta \rangle$.
- $G := K_+ \times K_-$ actúa sobre M via

$$(h_+, h_-) \cdot (g, g_+, g_-) = (h_+ g h_-^{-1}, g_+ h_+^{-1}, h_- g_-).$$

- $p_G^M : M \rightarrow M/G \simeq K$ fibrado principal.

Lema: L' es G -invariante.

$\implies$ Aplicamos reducción de Routh!

- Para $(\mu, \nu) \in \mathfrak{k}_+ \times \mathfrak{k}_-$ definimos

$$R_{(\mu, \nu)} := L' - \langle (\mu, \nu), \omega \rangle$$

donde $\omega \in \Omega^1(M, \mathfrak{k}_+ \times \mathfrak{k}_-)$ es una forma de conexión plana

$$\omega|_{(g, g_+, g_-)}(\zeta, \alpha, \beta) = (-\alpha, \beta).$$

Grupos factorizables y Lagrangianos

- Definimos $M := K \times K_+ \times K_-$.
- Se trivializa TK , TK_- por izquierda, TK_+ por derecha.
- $L'(g, \zeta, g_+, \alpha, g_-, \beta) := (1/2) \langle \zeta, \zeta \rangle$.
- $G := K_+ \times K_-$ actúa sobre M via

$$(h_+, h_-) \cdot (g, g_+, g_-) = (h_+ g h_-^{-1}, g_+ h_+^{-1}, h_- g_-).$$

- $p_G^M : M \rightarrow M/G \simeq K$ fibrado principal.

Lema: L' es G -invariante.

$\implies$ Aplicamos reducción de Routh!

- Para $(\mu, \nu) \in \mathfrak{k}_+ \times \mathfrak{k}_-$ definimos

$$R_{(\mu, \nu)} := L' - \langle (\mu, \nu), \omega \rangle$$

donde $\omega \in \Omega^1(M, \mathfrak{k}_+ \times \mathfrak{k}_-)$ es una forma de conexión plana

$$\omega|_{(g, g_+, g_-)}(\zeta, \alpha, \beta) = (-\alpha, \beta).$$

Reducción de Routh

- Identificación

$$T\chi_1 \times \chi_2 \times \chi_3 : \\ T\left(\frac{M}{K_+ \times K_-}\right) \times \frac{M}{(K_+)_{\mu} \times (K_-)_{\nu}} \times \widetilde{\mathfrak{k}_+ \times \mathfrak{k}_-} \rightarrow K \times \mathfrak{k} \times \mathcal{O}_{\mu}^+ \times \mathcal{O}_{\nu}^- \times \mathfrak{k}_+ \times \mathfrak{k}_-$$

con

$$\chi_1 : [g, g_+, g_-] \in \frac{M}{K_+ \times K_-} \longmapsto g_+ g g_-$$

$$\chi_2 : [g, g_+, g_-]_{(\mu, \nu)} \in \frac{M}{(K_+)_{\mu} \times (K_-)_{\nu}} \mapsto (g_+ g g_-, \text{Ad}_{g_+}^* \mu, \text{Ad}_{g_-}^* \nu)$$

$$\chi_3 : [g, g_+, g_-, \alpha, \beta] \in \widetilde{\mathfrak{k}_+ \times \mathfrak{k}_-} \longmapsto (g_+ g g_-, \text{Ad}_{g_+} \alpha, \text{Ad}_{g_-} \beta).$$

- Un element genérico de este espacio será

$$(g', \zeta', \eta_+, \eta_-, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}).$$

con $\eta_+ := \text{Ad}_{g_+}^* \mu, \eta_- := \text{Ad}_{g_-}^* \nu$.

Reducción de Routh

- Identificación

$$T\chi_1 \times \chi_2 \times \chi_3 : \\ T\left(\frac{M}{K_+ \times K_-}\right) \times \frac{M}{(K_+)_{\mu} \times (K_-)_{\nu}} \times \widetilde{\mathfrak{k}_+ \times \mathfrak{k}_-} \rightarrow K \times \mathfrak{k} \times \mathcal{O}_{\mu}^+ \times \mathcal{O}_{\nu}^- \times \mathfrak{k}_+ \times \mathfrak{k}_-$$

con

$$\begin{aligned} \chi_1 : [g, g_+, g_-] \in \frac{M}{K_+ \times K_-} &\longmapsto g_+ g g_- \\ \chi_2 : [g, g_+, g_-]_{(\mu, \nu)} \in \frac{M}{(K_+)_{\mu} \times (K_-)_{\nu}} &\mapsto (g_+ g g_-, \text{Ad}_{g_+^{-1}}^* \mu, \text{Ad}_{g_-}^* \nu) \\ \chi_3 : [g, g_+, g_-, \alpha, \beta] \in \widetilde{\mathfrak{k}_+ \times \mathfrak{k}_-} &\longmapsto (g_+ g g_-, \text{Ad}_{g_+} \alpha, \text{Ad}_{g_-^{-1}} \beta). \end{aligned}$$

- Un element genérico de este espacio será

$$(g', \zeta', \eta_+, \eta_-, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}).$$

con $\eta_+ := \text{Ad}_{g_+}^* \mu, \eta_- := \text{Ad}_{g_-}^* \nu$.

Reducción de Routh II

- El Routhiano reducido resulta ser

$$\begin{aligned}\bar{R}_\mu(g', \zeta', \eta_+, \eta_-, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) &= \\ &= \frac{1}{2} \langle \zeta' + \tilde{\alpha} + \text{Ad}_{g'} \tilde{\beta}, \zeta' + \tilde{\alpha} + \text{Ad}_{g'} \tilde{\beta} \rangle - \langle \tilde{\alpha}, \eta_+ \rangle - \langle \tilde{\beta}, \eta_- \rangle.\end{aligned}$$

- Además este sistema tiene asociado una fuerza giroscópica

$$\begin{aligned}\langle f_{(\mu, \nu)}(g', \zeta'_1, \eta_+, -\text{ad}_{u_1}^* \eta_+, \eta_-, -\text{ad}_{v_1} \eta_-), (g', \zeta'_2, \eta_+, -\text{ad}_{u_2} \eta_+, \eta_-, -\text{ad}_{v_2} \eta_-) \rangle &= \\ &= \langle \mu, [u_1, u_2] \rangle - \langle \nu, [v_1, v_2] \rangle.\end{aligned}$$

Teor: El sistema con Routhiano $p_1^* \bar{R}_{(\mu, \nu)}$ y fuerza $f_{(\mu, \nu)}$ es equivalente al definido por el Lagrangiano de F  her.

Reducción de Routh II

- El Routhiano reducido resulta ser

$$\begin{aligned}\bar{R}_\mu(g', \zeta', \eta_+, \eta_-, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) &= \\ &= \frac{1}{2} \langle \zeta' + \tilde{\alpha} + \text{Ad}_{g'} \tilde{\beta}, \zeta' + \tilde{\alpha} + \text{Ad}_{g'} \tilde{\beta} \rangle - \langle \tilde{\alpha}, \eta_+ \rangle - \langle \tilde{\beta}, \eta_- \rangle.\end{aligned}$$

- Además este sistema tiene asociado una fuerza girosc  pica

$$\begin{aligned}\langle f_{(\mu, \nu)}(g', \zeta'_1, \eta_+, -\text{ad}_{u_1}^* \eta_+, \eta_-, -\text{ad}_{v_1} \eta_-), (g', \zeta'_2, \eta_+, -\text{ad}_{u_2} \eta_+, \eta_-, -\text{ad}_{v_2} \eta_-) \rangle &= \\ &= \langle \mu, [u_1, u_2] \rangle - \langle \nu, [v_1, v_2] \rangle.\end{aligned}$$

Teor: El sistema con Routhiano $p_1^* \bar{R}_{(\mu, \nu)}$ y fuerza $f_{(\mu, \nu)}$ es equivalente al definido por el Lagrangiano de F  her.

Reducción de Routh II

- El Routhiano reducido resulta ser

$$\begin{aligned}\bar{R}_\mu(g', \zeta', \eta_+, \eta_-, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) &= \\ &= \frac{1}{2} \langle \zeta' + \tilde{\alpha} + \text{Ad}_{g'} \tilde{\beta}, \zeta' + \tilde{\alpha} + \text{Ad}_{g'} \tilde{\beta} \rangle - \langle \tilde{\alpha}, \eta_+ \rangle - \langle \tilde{\beta}, \eta_- \rangle.\end{aligned}$$

- Además este sistema tiene asociado una fuerza giroscópica

$$\begin{aligned}\langle f_{(\mu, \nu)}(g', \zeta'_1, \eta_+, -\text{ad}_{u_1}^* \eta_+, \eta_-, -\text{ad}_{v_1} \eta_-), (g', \zeta'_2, \eta_+, -\text{ad}_{u_2} \eta_+, \eta_-, -\text{ad}_{v_2} \eta_-) \rangle &= \\ &= \langle \mu, [u_1, u_2] \rangle - \langle \nu, [v_1, v_2] \rangle.\end{aligned}$$

Teor: El sistema con Routhiano $p_1^* \bar{R}_{(\mu, \nu)}$ y fuerza $f_{(\mu, \nu)}$ es equivalente al definido por el Lagrangiano de F  her.

Lecturas Recomendadas I



L. Fehér y col. “On Hamiltonian reductions of the Wess-Zumino-Novikov- Witten theories”. En: *Phys. Rept.* 222 (1992), págs. 1-64.



L. Fehér y A. Gábor. “Adler–Kostant–Symes systems as Lagrangian gauge theories”. En: *Physics Letters A* 301.1–2 (2002), págs. 58 -64. issn: 0375-9601.



E. García-Toraño Andrés, T. Mestdag y H. Yoshimura. “Implicit Lagrange–Routh equations and Dirac reduction”. En: *Journal of Geometry and Physics* 104 (2016), págs. 291 -304. issn: 0393-0440.



B. Langerock y M. Castrillón López. “Routh Reduction for Singular Lagrangians”. En: *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys* 7.8 (2010), págs. 1451-1489.