

Flujos cotangentes discretos: existencia y convergencia

Nicolás Borda Depto. de Matemática, FCE, UNLP – CONICET

Javier Fernandez Instituto Balseiro, UNCuyo – CNEA

Marcela Zuccalli Depto. de Matemática, FCE, UNLP

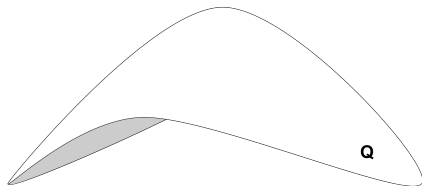
Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina

Bahía Blanca, Septiembre de 2016

De galaxias a moléculas...

Mecánica Lagrangiana

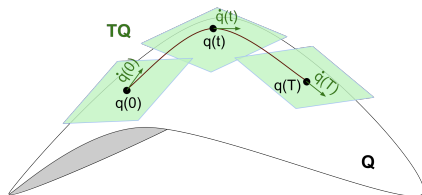
Espacio de configuración (Q):
posiciones.



De galaxias a moléculas...

Mecánica Lagrangiana

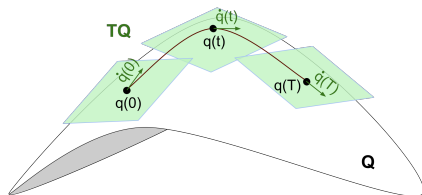
Espacio de fases (TQ):
posiciones y velocidades.



De galaxias a moléculas...

Mecánica Lagrangiana

Espacio de fases (TQ):
posiciones y velocidades.

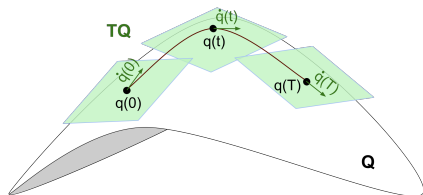


► $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ (Lagrangiano).

De galaxias a moléculas...

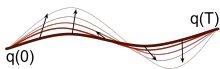
Mecánica Lagrangiana

Espacio de fases (TQ):
posiciones y velocidades.



- $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ (*Lagrangiano*).
- Trayectorias: son críticas de

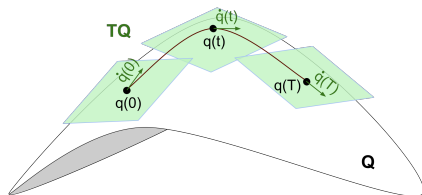
$$S[\text{curva } q(t)] := \int_0^T L(q(t), \dot{q}(t)) dt.$$



De galaxias a moléculas...

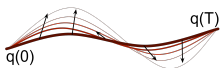
Mecánica Lagrangiana

Espacio de fases (TQ):
posiciones y velocidades.



- $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ (Lagrangiano).
- Trayectorias: son críticas de

$$S[\text{curva } q(t)] := \int_0^T L(q(t), \dot{q}(t)) dt.$$



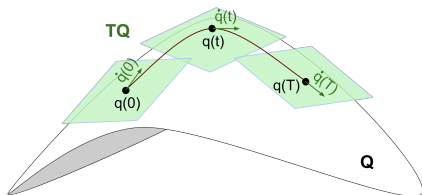
$$\rightsquigarrow \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t)) = 0$$

(ecs. diferenciales de orden 2).

... Ahora una versión a tiempo discreto

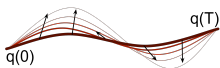
Mecánica Lagrangiana

Espacio de fases (TQ):
posiciones y velocidades.



- $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ (Lagrangiano).
- Trayectorias: son críticas de

$$S[\text{curva } q(t)] := \int_0^T L(q(t), \dot{q}(t)) dt.$$



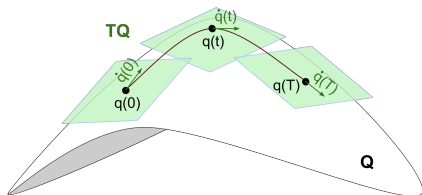
$$\rightsquigarrow \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t)) = 0$$

(ecs. diferenciales de orden 2).

... Ahora una versión a tiempo discreto

Mecánica Lagrangiana

Espacio de fases (TQ):
posiciones y velocidades.



- $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ (Lagrangiano).
- Trayectorias: son críticas de

$$S[\text{curva } q(t)] := \int_0^T L(q(t), \dot{q}(t)) dt.$$

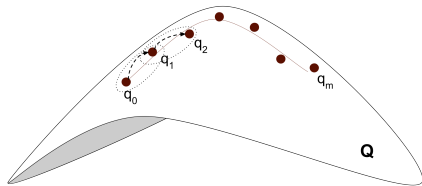


$$\rightsquigarrow \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t)) = 0$$

(ecs. diferenciales de orden 2).

Mecánica discreta

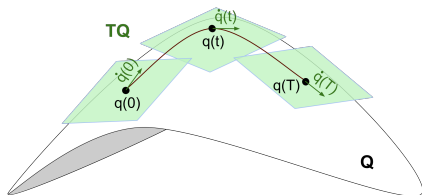
Espacio de fases discreto ($Q \times Q$):
pares de posiciones. (Evolución ilustrada en Q).



... Ahora una versión a tiempo discreto

Mecánica Lagrangiana

Espacio de fases (TQ):
posiciones y velocidades.



- $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ (Lagrangiano).
- Trayectorias: son críticas de

$$S[\text{curva } q(t)] := \int_0^T L(q(t), \dot{q}(t)) dt.$$

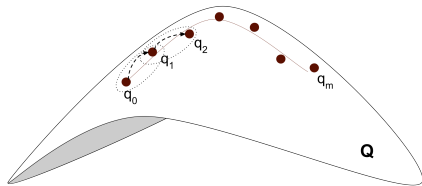


$$\rightsquigarrow \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t)) = 0$$

(ecs. diferenciales de orden 2).

Mecánica discreta

Espacio de fases discreto ($Q \times Q$):
pares de posiciones. (Evolución ilustrada en Q).

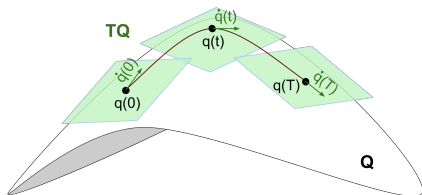


- $L_d : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ (Lagrangiano discreto).

... Ahora una versión a tiempo discreto

Mecánica Lagrangiana

Espacio de fases (TQ):
posiciones y velocidades.



- $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ (Lagrangiano).
- Trayectorias: son críticas de

$$S[\text{curva } q(t)] := \int_0^T L(q(t), \dot{q}(t)) dt.$$

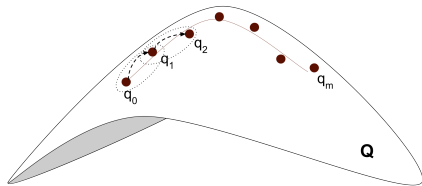


$$\rightsquigarrow \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t)) = 0$$

(ecs. diferenciales de orden 2).

Mecánica discreta

Espacio de fases discreto ($Q \times Q$):
pares de posiciones. (Evolución ilustrada en Q).



- $L_d : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ (Lagrangiano discreto).
- Trayectorias (discretas): son críticas de

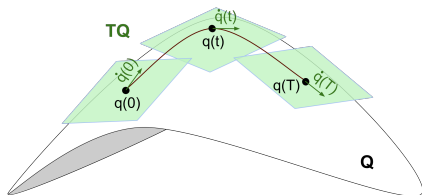
$$S_d[(q_0, \dots, q_m)] := \sum_{i=0}^{m-1} L_d(q_i, q_{i+1}).$$



... Ahora una versión a tiempo discreto

Mecánica Lagrangiana

Espacio de fases (TQ):
posiciones y velocidades.



- $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ (Lagrangiano).
- Trayectorias: son críticas de

$$S[\text{curva } q(t)] := \int_0^T L(q(t), \dot{q}(t)) dt.$$

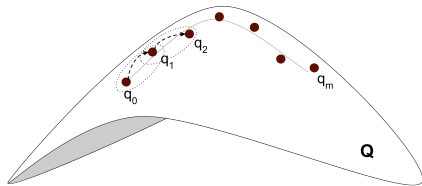


$$\rightsquigarrow \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t)) = 0$$

(ecs. diferenciales de orden 2).

Mecánica discreta

Espacio de fases discreto ($Q \times Q$):
pares de posiciones. (Evolución ilustrada en Q).



- $L_d : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ (Lagrangiano discreto).
- Trayectorias (discretas): son críticas de

$$S_d[(q_0, \dots, q_m)] := \sum_{i=0}^{m-1} L_d(q_i, q_{i+1}).$$



$$\rightsquigarrow D_2 L_d(q_{i-1}, q_i) + D_1 L_d(q_i, q_{i+1}) = 0$$

(ecs. algebraicas -recurrencia de orden 2-).

La idea de flujo discreto a través de un ejemplo simple

► $Q = \mathbb{R}$.

► $L_d(q, q') = \frac{1}{2} \left(\frac{q' - q}{h} \right)^2 h$.

La idea de flujo discreto a través de un ejemplo simple

- ▶ $Q = \mathbb{R}$.
- ▶ $L_d(q, q') = \frac{1}{2} \left(\frac{q' - q}{h} \right)^2 h$.
- ▶ Ecuación de movimiento discreta:

$$\begin{aligned} D_2 L_d(q_0, q_1) \\ = -D_1 L_d(q_1, q_2) \end{aligned}$$

La idea de flujo discreto a través de un ejemplo simple

- ▶ $Q = \mathbb{R}$.
- ▶ $L_d(q, q') = \frac{1}{2} \left(\frac{q' - q}{h} \right)^2 h$.
- ▶ Ecuación de movimiento discreta:

$$\begin{aligned} \frac{q_1 - q_0}{h} &= D_2 L_d(q_0, q_1) \\ &= -D_1 L_d(q_1, q_2) \end{aligned}$$

La idea de flujo discreto a través de un ejemplo simple

- ▶ $Q = \mathbb{R}$.
- ▶ $L_d(q, q') = \frac{1}{2} \left(\frac{q' - q}{h} \right)^2 h$.
- ▶ Ecuación de movimiento discreta:

$$\begin{aligned} \frac{q_1 - q_0}{h} &= D_2 L_d(q_0, q_1) \\ &= -D_1 L_d(q_1, q_2) = \frac{q_2 - q_1}{h}. \end{aligned}$$

La idea de flujo discreto a través de un ejemplo simple

- ▶ $Q = \mathbb{R}$.
- ▶ $L_d(q, q') = \frac{1}{2} \left(\frac{q' - q}{h} \right)^2 h$.
- ▶ Ecuación de movimiento discreta:

$$\begin{aligned} \frac{q_1 - q_0}{h} &= \overbrace{D_2 L_d(q_0, q_1)}^{\mathbb{F}^+ L_d(q_0, q_1) \in T_{q_1}^* Q} \\ &= -D_1 L_d(q_1, q_2) = \frac{q_2 - q_1}{h}. \end{aligned}$$

La idea de flujo discreto a través de un ejemplo simple

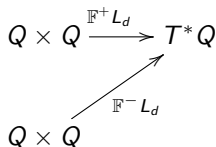
- ▶ $Q = \mathbb{R}$.
- ▶ $L_d(q, q') = \frac{1}{2} \left(\frac{q' - q}{h} \right)^2 h$.
- ▶ Ecuación de movimiento discreta:

$$\begin{aligned} \frac{q_1 - q_0}{h} &= \overbrace{D_2 L_d(q_0, q_1)}^{\mathbb{F}^+ L_d(q_0, q_1) \in T_{q_1}^* Q} \\ &= \underbrace{-D_1 L_d(q_1, q_2)}_{\mathbb{F}^- L_d(q_1, q_2) \in T_{q_1}^* Q} = \frac{q_2 - q_1}{h}. \end{aligned}$$

La idea de flujo discreto a través de un ejemplo simple

- $Q = \mathbb{R}$.
- $L_d(q, q') = \frac{1}{2} \left(\frac{q' - q}{h} \right)^2 h$.
- Ecuación de movimiento discreta:

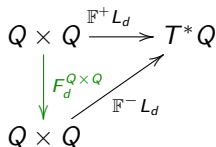
$$\begin{aligned} \frac{q_1 - q_0}{h} &= \overbrace{D_2 L_d(q_0, q_1)}^{\mathbb{F}^+ L_d(q_0, q_1) \in T_{q_1}^* Q} \\ &= \underbrace{-D_1 L_d(q_1, q_2)}_{\mathbb{F}^- L_d(q_1, q_2) \in T_{q_1}^* Q} = \frac{q_2 - q_1}{h}. \end{aligned}$$



La idea de flujo discreto a través de un ejemplo simple

- $Q = \mathbb{R}$.
- $L_d(q, q') = \frac{1}{2} \left(\frac{q' - q}{h} \right)^2 h$.
- Ecuación de movimiento discreta:

$$\begin{aligned} \frac{q_1 - q_0}{h} &= \overbrace{D_2 L_d(q_0, q_1)}^{\mathbb{F}^+ L_d(q_0, q_1) \in T_{q_1}^* Q} \\ &= \underbrace{-D_1 L_d(q_1, q_2)}_{\mathbb{F}^- L_d(q_1, q_2) \in T_{q_1}^* Q} = \frac{q_2 - q_1}{h}. \end{aligned}$$



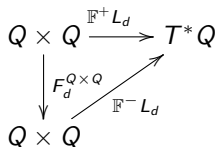
Definiciones

Un *flujo discreto* $F_d^{Q \times Q}$ es un difeomorfismo que hace conmutar el diagrama.

La idea de flujo discreto a través de un ejemplo simple

- $Q = \mathbb{R}$.
- $L_d(q, q') = \frac{1}{2} \left(\frac{q' - q}{h} \right)^2 h$.
- Ecuación de movimiento discreta:

$$\frac{q_1 - q_0}{h} = \overbrace{D_2 L_d(q_0, q_1)}^{\mathbb{F}^+ L_d(q_0, q_1) \in T_{q_1}^* Q} = \overbrace{-D_1 L_d(q_1, q_2)}^{\mathbb{F}^- L_d(q_1, q_2) \in T_{q_1}^* Q} = \frac{q_2 - q_1}{h}.$$



Esquema general cuando las flechas son difeomorfismos **globales**.

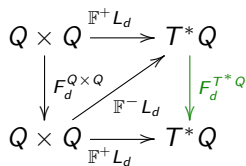
Definiciones

Un *flujo discreto* $F_d^{Q \times Q}$ es un difeomorfismo que hace conmutar el diagrama. (Podría sólo estar definido **localmente** entre abiertos en $Q \times Q$, donde se puede ver que $\mathbb{F}^+ L_d$ y $\mathbb{F}^- L_d$ son invertibles).

La idea de flujo discreto a través de un ejemplo simple

- $Q = \mathbb{R}$.
- $L_d(q, q') = \frac{1}{2} \left(\frac{q' - q}{h} \right)^2 h$.
- Ecuación de movimiento discreta:

$$\frac{q_1 - q_0}{h} = \overbrace{D_2 L_d(q_0, q_1)}^{\mathbb{F}^+ L_d(q_0, q_1) \in T_{q_1}^* Q} = \underbrace{-D_1 L_d(q_1, q_2)}_{\mathbb{F}^- L_d(q_1, q_2) \in T_{q_1}^* Q} = \frac{q_2 - q_1}{h}.$$



Esquema general cuando las flechas son difeomorfismos globales.

Definiciones

Un *flujo discreto* $F_d^{Q \times Q}$ es un difeomorfismo que hace conmutar el diagrama. (Podría sólo estar definido localmente entre abiertos en $Q \times Q$, donde se puede ver que $\mathbb{F}^+ L_d$ y $\mathbb{F}^- L_d$ son invertibles). Asociado al mismo tenemos el *flujo cotangente discreto* $F_d^{T^* Q}$.

Mecánica Discreta, integradores geométricos y problema

- (Q, L) sistema Lagrangiano regular.

$$\begin{array}{ccc} Q \times Q & \xrightarrow{\mathbb{F}^+ L_d} & T^*Q \\ \downarrow F_d^{Q \times Q} & \nearrow \mathbb{F}^- L_d & \downarrow F_d^{T^*Q} \\ Q \times Q & \xrightarrow{\mathbb{F}^+ L_d} & T^*Q \end{array}$$

Esquema general cuando
las flechas son difeomorfismos globales.

Mecánica Discreta, integradores geométricos y problema

- ▶ (Q, L) sistema Lagrangiano regular.
- ▶ $\{(Q, L_{d,h})\}$ sistemas discretos, con $L_{d,h}$ suave en h

$$\begin{array}{ccc} Q \times Q & \xrightarrow{\mathbb{F}^+ L_d} & T^*Q \\ \downarrow F_d^{Q \times Q} & \nearrow \mathbb{F}^- L_d & \downarrow F_d^{T^*Q} \\ Q \times Q & \xrightarrow{\mathbb{F}^+ L_d} & T^*Q \end{array}$$

Esquema general cuando
las flechas son difeomorfismos globales.

Mecánica Discreta, integradores geométricos y problema

- (Q, L) sistema Lagrangiano regular.
- $\{(Q, L_{d,h})\}$ sistemas discretos, con $L_{d,h}$ suave en h

$$\begin{array}{ccc}
 Q \times Q & \xrightarrow{\mathbb{R}^+ L_d} & T^*Q \\
 \downarrow F_{d,h}^{Q \times Q} & \nearrow \mathbb{R}^- L_d & \downarrow F_d^{T^*Q} \\
 Q \times Q & \xrightarrow{\mathbb{R}^+ L_d} & T^*Q
 \end{array}$$

Esquema general cuando
las flechas son difeomorfismos globales.

Mecánica Discreta, integradores geométricos y problema

- (Q, L) sistema Lagrangiano regular.
- $\{(Q, L_{d,h})\}$ sistemas discretos, con $L_{d,h}$ suave en h

$$\begin{array}{ccc}
 Q \times Q & \xrightarrow{\mathbb{R}^+ L_d} & T^*Q \\
 \downarrow F_{d,h}^{Q \times Q} & \nearrow \mathbb{R}^- L_d & \downarrow F_d^{T^*Q} \\
 Q \times Q & \xrightarrow{\mathbb{R}^+ L_d} & T^*Q
 \end{array}$$

Esquema general cuando las flechas son difeomorfismos globales.

Observación

Si $q(t) \in Q$ es la trayectoria exacta para la condición inicial $(q(0), \dot{q}(0)) \in TQ$, y h es un paso de tiempo, denotamos por Ψ a $(h, (q(0), \dot{q}(0))) \mapsto (h, q(0), q(h))$.

Mecánica Discreta, integradores geométricos y problema

- ▶ (Q, L) sistema Lagrangiano regular.
- ▶ $\{(Q, L_{d,h})\}$ sistemas discretos, con $L_{d,h}$ suave en h , tales que

$$|L_{d,h}(\Psi_h(\dot{q}(0))) - S[q(t)]| \leq C|h|^{r+1} \quad (r \geq 1).$$

$$\begin{array}{ccccc}
 TQ & \xrightarrow{\Psi_h} & Q \times Q & \xrightarrow{\mathbb{R}^+ L_d} & T^*Q \\
 & & \downarrow F_{d,h}^{Q \times Q} & \nearrow \mathbb{R}^- L_d & \downarrow F_d^{T^*Q} \\
 & & Q \times Q & \xrightarrow{\mathbb{R}^+ L_d} & T^*Q
 \end{array}$$

Esquema general cuando las flechas son difeomorfismos globales.

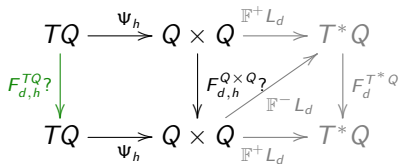
Observación

Si $q(t) \in Q$ es la trayectoria exacta para la condición inicial $(q(0), \dot{q}(0)) \in TQ$, y h es un paso de tiempo, denotamos por Ψ a $(h, (q(0), \dot{q}(0))) \mapsto (h, q(0), q(h))$. Ψ establece un difeomorfismo entre entornos de $\{0\} \times TQ$ y $\{0\} \times \{(q, q)\}$ mientras $h \neq 0$. Fijado h , tenemos Ψ_h .

Mecánica Discreta, integradores geométricos y problema

- (Q, L) sistema Lagrangiano regular.
- $\{(Q, L_{d,h})\}$ sistemas discretos, con $L_{d,h}$ suave en h , tales que

$$|L_{d,h}(\psi_h(\dot{q}(0))) - S[q(t)]| \leq C|h|^{r+1} \quad (r \geq 1).$$



Esquema general cuando las flechas son difeomorfismos globales.

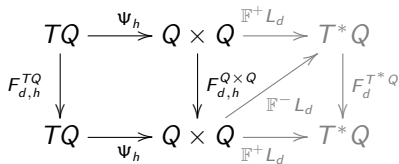
Definición – Observación

Dado $F_{d,h}^{Q \times Q}$, un *flujo tangente discreto* $F_{d,h}^{TQ}$ es un difeomorfismo que hace conmutar el diagrama.

Mecánica Discreta, integradores geométricos y problema

- ▶ (Q, L) sistema Lagrangiano regular.
- ▶ $\{(Q, L_{d,h})\}$ sistemas discretos, con $L_{d,h}$ suave en h , tales que

$$|L_{d,h}(\psi_h(\dot{q}(0))) - S[q(t)]| \leq C|h|^{r+1} \quad (r \geq 1).$$



Esquema general cuando las flechas son difeomorfismos globales.

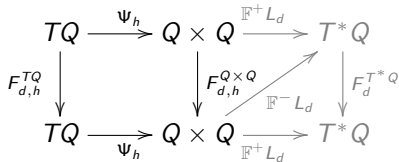
Definición – Observación

Dado $F_{d,h}^{Q \times Q}$, un *flujo tangente discreto* $F_{d,h}^{TQ}$ es un difeomorfismo que hace conmutar el diagrama. Resultados de [PC09] aseguran primero la existencia de $\{F_{d,h}^{TQ}\}$ de modo que $\{F_{d,h}^{Q \times Q}\}$, definidos para hacer conmutar el diagrama, sean flujos discretos usuales.

Mecánica Discreta, integradores geométricos y problema

- (Q, L) sistema Lagrangiano regular.
- $\{(Q, L_{d,h})\}$ sistemas discretos, con $L_{d,h}$ suave en h , tales que

$$|L_{d,h}(\psi_h(\dot{q}(0))) - S[q(t)]| \leq C|h|^{r+1} \quad (r \geq 1).$$



Esquema general cuando $h \neq 0$ y las flechas son difeomorfismos globales.

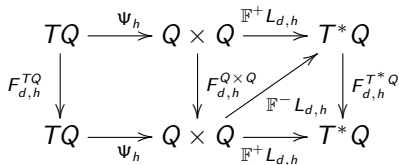
Definición – Observación

Dado $F_{d,h}^{Q \times Q}$, un *flujo tangente discreto* $F_{d,h}^{TQ}$ es un difeomorfismo que hace conmutar el diagrama. Resultados de [PC09] aseguran primero la existencia de $\{F_{d,h}^{TQ}\}$ de modo que $\{F_{d,h}^{Q \times Q}\}$, definidos para hacer conmutar el diagrama, sean flujos discretos usuales. (Esto vale para discretizaciones de mayor interés práctico que Ψ , siempre para h pequeño **no nulo**).

Mecánica Discreta, integradores geométricos y problema

- ▶ (Q, L) sistema Lagrangiano regular.
- ▶ $\{(Q, L_{d,h})\}$ sistemas discretos, con $L_{d,h}$ suave en h , tales que

$$|L_{d,h}(\Psi_h(\dot{q}(0))) - S[q(t)]| \leq C|h|^{r+1} \quad (r \geq 1).$$



Esquema general cuando $h \neq 0$ y las flechas son difeomorfismos globales.

Definición – Observación

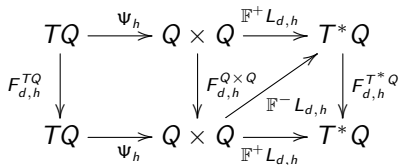
Dado $F_{d,h}^{Q \times Q}$, un *flujo tangente discreto* $F_{d,h}^{TQ}$ es un difeomorfismo que hace conmutar el diagrama. Resultados de [PC09] aseguran primero la existencia de $\{F_{d,h}^{TQ}\}$ de modo que $\{F_{d,h}^{Q \times Q}\}$, definidos para hacer conmutar el diagrama, sean flujos discretos usuales. (Esto vale para discretizaciones de mayor interés práctico que Ψ , siempre para h pequeño no nulo). Asociados a $\{F_{d,h}^{Q \times Q}\}$ tenemos $\{F_{d,h}^{T*Q}\}$.

Mecánica Discreta, integradores geométricos y problema

- (Q, L) sistema Lagrangiano regular.
- $\{(Q, L_{d,h})\}$ sistemas discretos, con $L_{d,h}$ suave en h , tales que

$$|L_{d,h}(\psi_h(\dot{q}(0))) - S[q(t)]| \leq C|h|^{r+1} \quad (r \geq 1).$$

- $\{F_{d,h}^{TQ}\}$ aproxima la evolución de (Q, L) según [PC09].



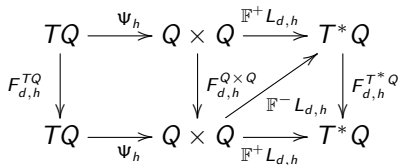
Esquema general cuando $h \neq 0$ y las flechas son difeomorfismos globales.

Mecánica Discreta, integradores geométricos y problema

- (Q, L) sistema Lagrangiano regular.
- $\{(Q, L_{d,h})\}$ sistemas discretos, con $L_{d,h}$ suave en h , tales que

$$|L_{d,h}(\psi_h(\dot{q}(0))) - S[q(t)]| \leq C|h|^{r+1} \quad (r \geq 1).$$

- $\{F_{d,h}^{TQ}\}$ aproxima la evolución de (Q, L) según [PC09].



Esquema general cuando $h \neq 0$ y las flechas son difeomorfismos globales.

Una pregunta

$\mathcal{I}\{F_{d,h}^{T^*Q}\}$ aproxima la evolución Hamiltoniana de (Q, L) ?

Consecuencia:

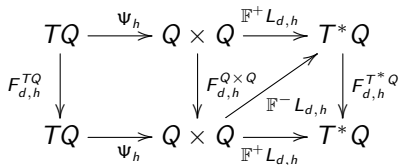
- Conservación de la energía salvo fluctuaciones.

Mecánica Discreta, integradores geométricos y problema

- ▶ (Q, L) sistema Lagrangiano regular.
- ▶ $\{(Q, L_{d,h})\}$ sistemas discretos, con $L_{d,h}$ suave en h , tales que

$$|L_{d,h}(\psi_h(\dot{q}(0))) - S[q(t)]| \leq C|h|^{r+1} \quad (r \geq 1).$$

- ▶ $\{F_{d,h}^{TQ}\}$ aproxima la evolución de (Q, L) según [PC09].



Esquema general cuando $h \neq 0$ y las flechas son difeomorfismos globales.

Una pregunta

$\{F_{d,h}^{T*Q}\}$ aproxima la evolución Hamiltoniana de (Q, L) ?

Consecuencia:

- Conservación de la energía salvo fluctuaciones.

Bondades de los sistemas mecánicos discretos transferidas a los integradores

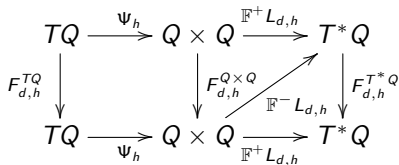
- Simplecticidad y
- Teorema de Noether discreto ([MW01]), y también reducción de simetrías.

Mecánica Discreta, integradores geométricos y problema

- (Q, L) sistema Lagrangiano regular.
- $\{(Q, L_{d,h})\}$ sistemas discretos, con $L_{d,h}$ suave en h , tales que

$$|L_{d,h}(\psi_h(\dot{q}(0))) - S[q(t)]| \leq C|h|^{r+1} \quad (r \geq 1).$$

- $\{F_{d,h}^{TQ}\}$ aproxima la evolución de (Q, L) según [PC09].



Esquema general cuando $h \neq 0$ y las flechas son difeomorfismos globales.

Una **pregunta** más básica (y todavía útil)

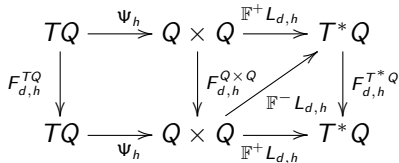
$\dot{i}\{F_{d,h}^{T^*Q}\}$ al menos converge a id_{T^*Q} cuando $h \rightarrow 0$?

Mecánica Discreta, integradores geométricos y problema

- (Q, L) sistema Lagrangiano regular.
- $\{(Q, L_{d,h})\}$ sistemas discretos, con $L_{d,h}$ suave en h , tales que

$$|L_{d,h}(\psi_h(\dot{q}(0))) - S[q(t)]| \leq C|h|^{r+1} \quad (r \geq 1).$$

- $\{F_{d,h}^{TQ}\}$ aproxima la evolución de (Q, L) según [PC09].



Esquema general cuando $h \neq 0$ y las flechas son difeomorfismos globales.

Una pregunta más básica (y todavía útil)

$\dot{\iota}\{F_{d,h}^{T^*Q}\}$ al menos converge a id_{T^*Q} cuando $h \rightarrow 0$?

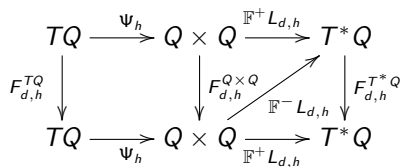
A futuro: preservación de estructuras luego de reducir simetrías.

Nuestro resultado

- (Q, L) sistema Lagrangiano regular.
- $\{(Q, L_{d,h})\}$ sistemas discretos, con $L_{d,h}$ suave en h , tales que

$$|L_{d,h}(\psi_h(\dot{q}(0))) - S[q(t)]| \leq C|h|^{r+1} \quad (r \geq 1).$$

- $\{F_{d,h}^{TQ}\}$ aproxima la evolución de (Q, L) según [PC09].



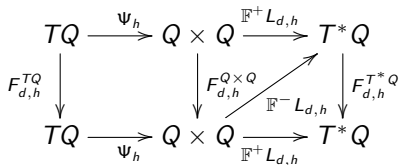
Esquema general cuando $h \neq 0$ y las flechas son difeomorfismos globales.

Nuestro resultado

- ▶ (Q, L) sistema Lagrangiano regular.
- ▶ $\{(Q, L_{d,h})\}$ sistemas discretos, con $L_{d,h}$ suave en h , tales que

$$|L_{d,h}(\psi_h(\dot{q}(0))) - S[q(t)]| \leq C|h|^{r+1} \quad (r \geq 1).$$

- ▶ $\{F_{d,h}^{TQ}\}$ aproxima la evolución de (Q, L) según [PC09].



Esquema general cuando $h \neq 0$ y las flechas son difeomorfismos globales.

Teorema

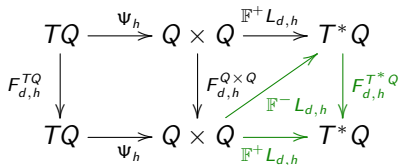
Para cada $(q, p) = \mathbb{F}L(q, \dot{q})$ existen $a > 0$ y una familia $\{F_{d,h}^{T^*Q}\}$ en un entorno, con $h \in (-a, a) - \{0\}$, la cual se extiende suavemente a $h = 0$ como id_{T^*Q} .

Nuestro resultado

- ▶ (Q, L) sistema Lagrangiano regular.
- ▶ $\{(Q, L_{d,h})\}$ sistemas discretos, con $L_{d,h}$ suave en h , tales que

$$|L_{d,h}(\psi_h(\dot{q}(0))) - S[q(t)]| \leq C|h|^{r+1} \quad (r \geq 1).$$

- ▶ $\{F_{d,h}^{TQ}\}$ aproxima la evolución de (Q, L) según [PC09].



Esquema general cuando $h \neq 0$ y las flechas son difeomorfismos globales.

Teorema

Para cada $(q, p) = \mathbb{F}L(q, \dot{q})$ existen $a > 0$ y una familia $\{F_{d,h}^{T^*Q}\}$ en un entorno, con $h \in (-a, a) - \{0\}$, la cual se extiende suavemente a $h = 0$ como id_{T^*Q} .

Demostración (discusión)

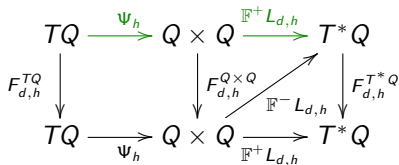
- 1 La expresión $F_{d,h}^{T^*Q} = \mathbb{F}^+ L_{d,h} \circ (\mathbb{F}^- L_{d,h})^{-1}$ no es útil: $\mathbb{F}^+ L_{d,h}$ y $\mathbb{F}^- L_{d,h}$ pueden diverger (recordar ejemplo).

Nuestro resultado

- ▶ (Q, L) sistema Lagrangiano **regular**.
- ▶ $\{(Q, L_{d,h})\}$ sistemas discretos, con $L_{d,h}$ suave en h , tales que

$$|L_{d,h}(\psi_h(\dot{q}(0))) - S[q(t)]| \leq C|h|^{r+1} \quad (r \geq 1).$$

- ▶ $\{F_{d,h}^{TQ}\}$ aproxima la evolución de (Q, L) según [PC09].



Esquema general cuando $h \neq 0$ y las flechas son difeomorfismos globales.

Teorema

Para cada $(q, p) = \mathbb{F}L(q, \dot{q})$ existen $a > 0$ y una familia $\{F_{d,h}^{T^*Q}\}$ en un entorno, con $h \in (-a, a) - \{0\}$, la cual se extiende suavemente a $h = 0$ como id_{T^*Q} .

Demostración (discusión)

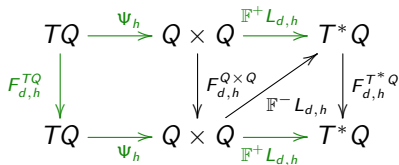
- ② (No trivial) $\mathbb{F}^+ L_{d,h} \circ \psi_h$ se puede extender suavemente a $h = 0$ como $\mathbb{F}L$, y resulta **invertible localmente** para h pequeño.

Nuestro resultado

- (Q, L) sistema Lagrangiano regular.
- $\{(Q, L_{d,h})\}$ sistemas discretos, con $L_{d,h}$ suave en h , tales que

$$|L_{d,h}(\psi_h(\dot{q}(0))) - S[q(t)]| \leq C|h|^{r+1} \quad (r \geq 1).$$

- $\{F_{d,h}^{TQ}\}$ **aproxima** la evolución de (Q, L) según [PC09].



Esquema general cuando $h \neq 0$ y las flechas son difeomorfismos globales.

Teorema

Para cada $(q, p) = \mathbb{F}L(q, \dot{q})$ existen $a > 0$ y una familia $\{F_{d,h}^{T^*Q}\}$ en un entorno, con $h \in (-a, a) - \{0\}$, la cual se extiende suavemente a $h = 0$ como id_{T^*Q} .

Demostración (discusión)

$$\textcircled{3} \quad F_{d,h}^{T^*Q} := \underbrace{(\mathbb{F}^+ L_{d,h} \circ \psi_h)}_{\rightarrow \mathbb{F}L} \circ \underbrace{F_{d,h}^{TQ}}_{\rightarrow id_{TQ}} \circ \underbrace{(\mathbb{F}^+ L_{d,h} \circ \psi_h)^{-1}}_{\rightarrow (\mathbb{F}L)^{-1}} \rightarrow id_{T^*Q} \quad \text{si } h \rightarrow 0.$$

Referencias



J. E. Marsden, M. West.

Discrete mechanics and variational integrators.

Acta Numer., 10:357–514, 2001.



G. Patrick, C. Cuell.

Error analysis of variational integrators of unconstrained Lagrangian systems.

Numer. Math., 113:243–264, 2009.