

Regularización espectral-wavelet de orden óptimo para problemas inversos lineales mal condicionados

Ma. Florencia Acosta Gisela Mazzieri Ruben Spies

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral, IMAL CONICET-UNL.

UMA 2016- Bahía Blanca

Introducción

Problema: Hallar f

$$Kf = g$$

$K : X \rightarrow Y$ lineal, compacto, de rango no cerrado, X, Y Hilbert y g^δ dato

$$\|g - g^\delta\|_Y \leq \delta$$

Introducción

Problema: Hallar f

$$Kf = g$$

$K : X \rightarrow Y$ lineal, compacto, de rango no cerrado, X, Y Hilbert y g^δ dato

$$\|g - g^\delta\|_Y \leq \delta$$

$K^\dagger$ no acotada $\rightarrow$ REGULARIZACIÓN

Bosquejo del método

g^δ

Bosquejo del método

$$g^\delta$$



$$P_j g^\delta$$

Proyección

Bosquejo del método

$$g^\delta$$



$$P_j g^\delta$$



$$S_\lambda P_j g^\delta$$

Proyección

Umbralado

Bosquejo del método

$$g^\delta$$



$$P_j g^\delta$$



$$S_\lambda P_j g^\delta$$



$$R_\alpha S_\lambda P_j g^\delta = f_{\alpha\lambda j}^\delta$$

Proyección

Umbralado

Regularización

Bosquejo del método

Proyección

$$g^\delta$$



$$P_j g^\delta$$



Umbralado

$$S_\lambda P_j g^\delta$$



Regularización

$$R_\alpha S_\lambda P_j g^\delta = f_{\alpha\lambda j}^\delta$$



PASO 1
Proyección y
Umbralado Wavelet

Bosquejo del método

Proyección

$$g^\delta$$



$$P_j g^\delta$$



$$S_\lambda P_j g^\delta$$



Regularización

$$R_\alpha S_\lambda P_j g^\delta = f_{\alpha\lambda j}^\delta$$

PASO 1
Proyección y
Umbralado Wavelet

PASO 2
Regularización
espectral

Resultados previos y objetivos

Conocido:

$$E(\| f_{\alpha\lambda j}^{\delta} - f \|) = O((\delta \sqrt{|\log \delta|})^{\frac{2s}{2s+2t+d}})^1$$

¹Klann et al. (2006)

Resultados previos y objetivos

Conocido:

$$E(\| f_{\alpha\lambda j}^{\delta} - f \|) = O((\delta \sqrt{|\log \delta|})^{\frac{2s}{2s+2t+d}})^1$$

- Tikhonov: $R_{\alpha}(\cdot) = \sum_{\sigma_n > 0} \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha} \langle \cdot, v_n \rangle u_n$
 $\{(\sigma_n, u_n, v_n)\}$ sistema singular asociado a K .

¹Klann et al. (2006)

Resultados previos y objetivos

Conocido:

$$E(\| f_{\alpha\lambda j}^{\delta} - f \|) = O((\delta \sqrt{|\log \delta|})^{\frac{2s}{2s+2t+d}})^1$$

- Tikhonov:
$$R_{\alpha}(\cdot) = \sum_{\sigma_n > 0} \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha} \langle \cdot, v_n \rangle u_n$$

- Landweber:

$$R_k(\cdot) = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\sigma_n > 0} (1 - \sigma_n^2)^j \sigma_n \langle \cdot, v_n \rangle u_n \quad (\alpha \approx 1/k)$$

- TSVD:
$$R_{\alpha}(\cdot) = \sum_{\sigma_n \geq \sqrt{\alpha}} \frac{1}{\sigma_n} \langle \cdot, v_n \rangle u_n$$

¹Klann et al. (2006)

Hipótesis

- $X = L_2(\Omega_X), \quad Y = L_2(\Omega_Y), \quad \Omega_X, \Omega_Y \subset \mathbb{R}^d$

Hipótesis

- $X = L_2(\Omega_X), \quad Y = L_2(\Omega_Y), \quad \Omega_X, \Omega_Y \subset \mathbb{R}^d$
- $\exists t > 0 \quad K : L_2(\Omega_X) \rightarrow H^t(\Omega_Y)$ (t-suavizado)

Hipótesis

- $X = L_2(\Omega_X), \quad Y = L_2(\Omega_Y), \quad \Omega_X, \Omega_Y \subset \mathbb{R}^d$
- $\exists t > 0 \quad K : L_2(\Omega_X) \rightarrow H^t(\Omega_Y)$ (t-suavizado)
- Condiciones fuente

$$f \in \text{Ran} \left((K^* K)^{\nu/2} \right), \quad \nu > 0$$

Hipótesis

- $X = L_2(\Omega_X), \quad Y = L_2(\Omega_Y), \quad \Omega_X, \Omega_Y \subset \mathbb{R}^d$
- $\exists t > 0 \quad K : L_2(\Omega_X) \rightarrow H^t(\Omega_Y)$ (t-suavizado)
- Condiciones fuente

$$f \in \text{Ran} \left((K^* K)^{\nu/2} \right), \quad \nu > 0$$
$$\Updownarrow$$
$$f \in H^{\nu t}(\Omega_X)$$

Hipótesis

- $X = L_2(\Omega_X)$, $Y = L_2(\Omega_Y)$, $\Omega_X, \Omega_Y \subset \mathbb{R}^d$
- $\exists t > 0 \quad K : L_2(\Omega_X) \rightarrow H^t(\Omega_Y)$ (t-suavizado)
- Condiciones fuente

$$f \in \text{Ran} \left((K^* K)^{\nu/2} \right), \quad \nu > 0$$



$$f \in H^{\nu t}(\Omega_X)$$

En general $\forall s \in \mathbb{R}$, $f \in \text{Ran} \left((K^* K)^{s/2t} \right) \Leftrightarrow f \in H^s(\Omega_X)$

Hipótesis

- $X = L_2(\Omega_X)$, $Y = L_2(\Omega_Y)$, $\Omega_X, \Omega_Y \subset \mathbb{R}^d$
- $\exists t > 0 \quad K : L_2(\Omega_X) \rightarrow H^t(\Omega_Y)$ (t-suavizado)
- Condiciones fuente

$$f \in \text{Ran} \left((K^* K)^{\nu/2} \right), \quad \nu > 0$$



$$f \in H^{\nu t}(\Omega_X)$$

En general $\forall s \in \mathbb{R}$, $f \in \text{Ran} \left((K^* K)^{s/2t} \right) \Leftrightarrow f \in H^s(\Omega_X)$

- $g^\delta = g + \delta dW = Kf + \delta dW$, dW ruido blanco

Error total

$$\| f_{\alpha\lambda j}^{\delta} - f \|_{L^2} \leq \| R_{\alpha}(S_{\lambda}P_j g^{\delta} - P_j g) \|_{L^2} \quad \text{Error de umbralado (EU)}$$

$$+ \| R_{\alpha}(P_j g - g) \|_{L^2} \quad \text{Error de proyección (EP)}$$

$$+ \| R_{\alpha}g - f \|_{L^2} \quad \text{Error de regularización (ER)}$$

Error de Proyección

Lema 1 (Klann 2006)

Sea $0 \leq \eta < \theta$, $g \in H^\theta$, $\psi \in H^\eta$, $\theta < m \in \mathbb{N}$, $m - 1$ grado de reproducción polinomial en V_j y $P_j : L_2 \rightarrow V_j$ operador proyección. Luego

$$\| g - P_j g \|_{H^\eta} \lesssim 2^{-j(\theta-\eta)} \| g \|_{H^\theta}$$

Error de Proyección

Lema 1 (Klann 2006)

Sea $0 \leq \eta < \theta$, $g \in H^\theta$, $\psi \in H^\eta$, $\theta < m \in \mathbb{N}$, $m - 1$ grado de reproducción polinomial en V_j y $P_j : L_2 \rightarrow V_j$ operador proyección. Luego

$$\| g - P_j g \|_{H^\eta} \lesssim 2^{-j(\theta-\eta)} \| g \|_{H^\theta}$$

Lema 2

Sea $K : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ lineal, compacto, t -suaviza, $t > 0$ y $0 \leq \eta < t$, $R_k : H^\eta \rightarrow L_2$, de Landweber. Entonces

$$\| R_k \|_{H^\eta \rightarrow L_2} \lesssim (1/k)^{(\eta-t)/(2t)}$$

Idea demo

$$R_k y = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\sigma_n > 0} (1 - \sigma_n^2)^j \sigma_n \langle y, v_n \rangle u_n$$

$$\| R_k y \|_{L_2}^2 = \sum_{\sigma_n > 0} \left(\sum_{j=0}^{k-1} (1 - \sigma_n^2)^j \sigma_n \right)^2 |\langle y, v_n \rangle|^2 \sigma_n^{(-2\eta/t)} \sigma_n^{(2\eta/t)}$$

$$\leq \sup_{0 < \sigma \leq 1} \left(\sum_{j=0}^{k-1} (1 - \sigma^2)^j \sigma^{(1+\eta/t)} \right)^2 \| y \|_{H^\eta}^2 \leq C k^{\frac{\eta-t}{t}} \| y \|_{H^\eta}^2 \quad C = cte$$

$$\| R_k \|_{H^\eta \rightarrow L_2}^2 = \sup_{\| y \|_{H^\eta} = 1} \| R_k y \|_{L_2}^2 \leq C k^{\frac{\eta-t}{t}}$$



Error de Proyección

Utilizando

$$\|g - P_j g\|_{H^\eta} \lesssim 2^{-j(\theta-\eta)} \|g\|_{H^\theta} \quad y \quad \|R_k\|_{H^\eta \rightarrow L_2} \lesssim (1/k)^{\frac{\eta-t}{2t}}$$

Lema 3

Sea $s \geq 0$, $s + t \in \mathbb{N}$, g en la bola de Sobolev

$B := \{g \in H^{s+t}(\Omega_Y) : \|g\|_{H^{s+t}} \leq M\}$, $\eta \in \mathbb{N}$ con $0 \leq \eta < t$ y

$\psi \in H^\eta(\Omega_Y)$. Luego, para R_k de Landweber

$$\|R_k(P_j g - g)\|_{L_2}^2 \lesssim (1/k)^{(\eta-t)/t} 2^{-2j(s+t-\eta)}$$

Error total

$$\begin{aligned}
 \| f_{\alpha\lambda j}^{\delta} - f \|_{L^2} &\leq \| R_{\alpha}(S_{\lambda}P_j g^{\delta} - P_j g) \|_{L^2} && \text{Error de umbralado} \\
 &+ \| R_{\alpha}(P_j g - g) \|_{L^2} && \text{Error de proyección} \quad \checkmark \\
 &+ \| R_{\alpha}g - f \|_{L^2} && \text{Error de regularización}
 \end{aligned}$$

Error de umbralado

Lema 4 (Klann 2006)

Sea $\theta > 0$, $0 < \eta \leq \theta$, g en la bola de Besov

$B := \{g \in B_{p,p}^\theta(\Omega) : \|g\|_{B_{p,p}^\theta} \leq M\}$ donde $p = 2(2\eta + d)/(2\theta + d)$ y g^δ es el dato.

Sea $\psi \in H^\eta(\Omega)$ wavelet con operador proyección P_j y operador de contracción S_λ . Elegimos $\lambda = C\delta\sqrt{|\log \delta|}$ y $j \leq j_1$ con $j_1 = j_1(\delta)$ definido por $2^{j_1} \simeq 1/(\delta^2 |\log \delta|)$. Entonces

$$E(\|S_\lambda P_j g^\delta - P_j g\|_{H^\eta}^2) = O\left((\delta\sqrt{|\log \delta|})^{4(\theta-\eta)/(2\theta+d)}\right)$$

Error de umbralado

Utilizando

$$E(\| S_\lambda P_j g^\delta - P_j g \|_{H^\eta}^2) = O\left((\delta \sqrt{|\log \delta|})^{\frac{4(\theta-\eta)}{2\theta+d}}\right) \quad y \quad \| R_k \| \lesssim (1/k)^{\frac{\eta-t}{2t}}$$

Lema 5

Eligiendo $\theta = s + t$, para R_k de Landweber se tiene

$$E(\| R_k(S_\lambda P_j g^\delta - P_j g) \|_{L_2}^2) = O\left((1/k)^{\frac{\eta-t}{t}} (\delta \sqrt{|\log \delta|})^{\frac{4(s+t-\eta)}{2s+2t+d}}\right)$$

Error total

$$\| f_{\alpha\lambda j}^{\delta} - f \|_{L^2} \leq \| R_{\alpha}(S_{\lambda}P_j g^{\delta} - P_j g) \|_{L^2} \quad \text{Error de umbralado} \quad \checkmark$$

$$+ \| R_{\alpha}(P_j g - g) \|_{L^2} \quad \text{Error de proyección} \quad \checkmark$$

$$+ \| R_{\alpha}g - f \|_{L^2} \quad \text{Error de regularización}$$

Error de regularización

Lema 6

Sea $f \in H^s$, $s \leq t$ y R_k de Landweber

$$\| R_k g - f \|_{L_2} \lesssim (1/k)^{s/2t}$$

Idea demo

$$R_k g - f = (I - K^* K)^k f = \sum_{\sigma_n > 0} (1 - \sigma_n^2)^k \langle f, u_n \rangle u_n$$

$$\| R_k g - f \|_{L_2}^2 = \sum_{\sigma_n > 0} (1 - \sigma_n^2)^{2k} |\langle f, u_n \rangle|^2 \sigma_n^{-2s/t} \sigma_n^{2s/t}$$

$$\leq \sup_{0 < \sigma \leq 1} (1 - \sigma^2)^{2k} \sigma^{2s/t} \sum_{\sigma_n > 0} \sigma_n^{-2s/t} |\langle f, u_n \rangle|^2$$

$$= \sup_{0 < \sigma \leq 1} (1 - \sigma^2)^{2k} \sigma^{2s/t} \| f \|_{H^s}^2$$

$$\leq C (1/k)^{s/t} \| f \|_{H^s}^2 \quad C = cte$$



Error total

$$\| f_{\alpha\lambda j}^\delta - f \|_{L^2} \leq \| R_\alpha(S_\lambda P_j g^\delta - P_j g) \|_{L^2}$$

Error de umbralado ✓

$$+ \| R_\alpha(P_j g - g) \|_{L^2}$$

Error de proyección ✓

$$+ \| R_\alpha g - f \|_{L^2}$$

Error de regularización ✓

Teorema de convergencia

Sea $s \geq 0$ con $s + t > \frac{1}{2}$, η con $0 \leq \eta \leq t$,
 $f \in H^s(\mathbb{R}^d) \cap B_{p,p}^s(\mathbb{R}^d)$ con $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} \frac{2t + d}{2\eta + d} + \frac{s}{s + d}$

Teorema de convergencia

Sea $s \geq 0$ con $s + t > \frac{1}{2}$, η con $0 \leq \eta \leq t$,

$$f \in H^s(\mathbb{R}^d) \cap B_{p,p}^s(\mathbb{R}^d) \quad \text{con} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{2} \frac{2t + d}{2\eta + d} + \frac{s}{s + d}$$

- $\Psi \in H^\eta$ una wavelet con grado m de reproducción polinomial en V_j tal que $m + 1 > t$, $P_j : L_2 \rightarrow V_j$.

Teorema de convergencia

Sea $s \geq 0$ con $s + t > \frac{1}{2}$, η con $0 \leq \eta \leq t$,

$$f \in H^s(\mathbb{R}^d) \cap B_{p,p}^s(\mathbb{R}^d) \quad \text{con} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{2} \frac{2t+d}{2\eta+d} + \frac{s}{s+d}$$

- $\Psi \in H^\eta$ una wavelet con grado m de reproducción polinomial en V_j tal que $m+1 > t$, $P_j : L_2 \rightarrow V_j$.
- S_λ el operador de contracción, $\lambda \doteq C \delta \sqrt{|\log \delta|}$.

Teorema de convergencia

Sea $s \geq 0$ con $s + t > \frac{1}{2}$, η con $0 \leq \eta \leq t$,

$$f \in H^s(\mathbb{R}^d) \cap B_{p,p}^s(\mathbb{R}^d) \quad \text{con} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{2} \frac{2t+d}{2\eta+d} + \frac{s}{s+d}$$

- $\Psi \in H^\eta$ una wavelet con grado m de reproducción polinomial en V_j tal que $m + 1 > t$, $P_j : L_2 \rightarrow V_j$.
- S_λ el operador de contracción, $\lambda \doteq C \delta \sqrt{|\log \delta|}$.
- R_k el operador de regularización de Landweber.

Teorema de convergencia

Sea $s \geq 0$ con $s + t > \frac{1}{2}$, η con $0 \leq \eta \leq t$,

$$f \in H^s(\mathbb{R}^d) \cap B_{p,p}^s(\mathbb{R}^d) \quad \text{con} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{2} \frac{2t+d}{2\eta+d} + \frac{s}{s+d}$$

- $\Psi \in H^\eta$ una wavelet con grado m de reproducción polinomial en V_j tal que $m+1 > t$, $P_j : L_2 \rightarrow V_j$.
- S_λ el operador de contracción, $\lambda \doteq C \delta \sqrt{|\log \delta|}$.
- R_k el operador de regularización de Landweber.

Si $j : 2^{-j} \leq (\delta \sqrt{|\log \delta|})^{1/(\eta+d/2)}$ y $k \simeq (\delta \sqrt{|\log \delta|})^{\frac{4t}{2s+2t+d}}$ entonces

$$E(\|f_{k\lambda j}^\delta - f\|)^2 = O\left((\delta \sqrt{|\log \delta|})^{\frac{4s}{2s+2t+d}}\right)$$

Idea demo

Igualando el EU y EP elegimos j

$$(1/k)^{\frac{\eta-t}{t}} 2^{-2j(s+t-\eta)} = (1/k)^{\frac{\eta-t}{t}} (\delta \sqrt{|\log \delta|})^{\frac{4(s+t-\eta)}{2s+2t+d}}$$

obteniendo $2^{-j} = (\delta \sqrt{|\log \delta|})^{2/(2s+2t+d)}$.

Igualando el EU y ER elegimos el k

$$(1/k)^{\frac{\eta-t}{t}} (\delta \sqrt{|\log \delta|})^{\frac{4(s+t-\eta)}{2s+2t+d}} = (1/k)^{s/t}$$

Luego, $k \simeq (\delta \sqrt{|\log \delta|})^{\frac{4t}{2s+2t+d}}$ nos permite obtener

$$E(\| f_{k\lambda j} - f \|)^2 = O\left((\delta \sqrt{|\log \delta|})^{\frac{4s}{2s+2t+d}}\right)$$



Resultados previos y objetivos

Conocido:

$$E(\| f_{\alpha\lambda j}^{\delta} - f \|) = O((\delta\sqrt{|\log \delta|})^{\frac{2s}{2s+2t+d}})$$

- Tikhonov:
$$R_{\alpha}(\cdot) = \sum_{\sigma_n > 0} \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha} \langle \cdot, v_n \rangle u_n$$

- Landweber:

$$R_k(\cdot) = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\sigma_n > 0} (1 - \sigma_n^2)^j \sigma_n \langle \cdot, v_n \rangle u_n \quad (\alpha \approx 1/k)$$

- TSVD:
$$R_{\alpha}(\cdot) = \sum_{\sigma_n \geq \sqrt{\alpha}} \frac{1}{\sigma_n} \langle \cdot, v_n \rangle u_n$$

MUCHAS GRACIAS
POR SU ATENCIÓN