Santiago Laplagne

Guía Práctica Maple

1. Comandos básicos

Ejercicio 1. Factorización en $\mathbb{Q}[x]$. Introducir los siguentes comandos y observar los resultados.

```
f := x^2-4*x+3;
subs(x=3, f);
factors(f);
```

Ejercicio 2. Factorización en $\mathbb{Q}[\sqrt{3}][x]$ Introducir los siguentes comandos y observar los resultados.

```
f := x^2-12;
alias(r = RootOf(x^2-3));
factors(f, r);
```

Ejercicio 3. Factorización en $\mathbb{Q}[i, \sqrt{3}][x]$ Introducir los siguentes comandos y observar los resultados.

```
f := x^2+12;
alias(r = RootOf(x^2-3));
alias(i = RootOf(x^2+1));
factors(f, {i, r});
```

Comparar con el siguiente comando:

```
factors(f, complex);
```

2. Normalización y series de Puiseux

Dada una curva $C = \{f = 0\}$, $f \in k[x, y]$, queremos estudiar las formas racionales $p/q \in k(x, y)$ que se pueden extender continuamente sobre la curva, incluso en los puntos donde q se anula. Esto es equivalente a calcular la normalización de $k[x, y]/\langle f\rangle$.

2.1. Normalización

Dado el anillo cociente $A = k[x_1, \ldots, x_n]/I$, con I un ideal primo, definimos

$$Q(A) = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in A, g \neq 0\right\}$$

el cuerpo de fracciones de A.
Decimos que un elemento $b \in Q(A)$ es *entero* sobre A si

$$b^s + a_1 b^{s-1} + \cdots + a_{s-1} b + a_s = 0, \text{ con } a_i \in A.$$

Definimos la normalización $\bar{A}$ de A como

$$\bar{A} = \{b \in Q(A) : b \text{ entero sobre } A\},$$

la clausura entera de A en el cuerpo de fracciones $Q(A)$. Un anillo A es *normal* si $A = \bar{A}$.
Por ejemplo, tomamos $C = \{y^2 - x^3 = 0\}$ y queremos calcular elementos enteros en $Q(\mathbb{Q}[x, y]/\langle y^2 - x^3\rangle$.

Ejercicio 4. Realizar un gráfico de la curva $C = \{y^2 - x^3 = 0\}$ utilizando el comando `implicitplot`.

Para estudiar el problema, factorizamos la curva. Si permitimos exponentes racionales en x, obtenemos la factorización

$$y^2 - x^3 = (y - x^{3/2})(y + x^{3/2}).$$

Algebraicamente, estamos trabajando en el cuerpo de series de Puiseux

$$P(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k/n} \right),$$

es decir, series de potencias donde se permite que las series tengan un denominador constante. Todo polinomio en $k[x][y]$ mónico en y admite una factorización $(y - p_1) \dots (y - p_s)$, con $p_i \in P(x)$. Esto es equivalente a descompone a la curva en las distintas ramas que cortan a la recta $x = 0$.

Ejercicio 5. Calcular las series de Puiseux en $x = 0$ de $f_1 = y^2 - x^3$. Observar que Maple muestra solo una de las series pues la otra serie es conjugada.

```
f1 := y^2-x^3
puiseux(f, x=0, 5)
```

El último parámetro indica la precisión que queremos de la serie, el decir hasta que grado desarrollar la serie.

Ejercicio 6. Calcular las series de Puiseux en $x = 0$ de $f_2 = y^3 + y^2 - x^3$. Realizar un gráfico de la curva f_2 e interpretar los resultados obtenidos.

Ejercicio 7. Calcular las series de Puiseux en $x = 0$ de $f_3 = y^4 + y^3 - 2 * y * x + x$. Realizar un gráfico de f_3.

Retomando el problema original, para calcular si p/q se puede extender a la curva, podemos reemplazar y por las correspondientes series de Puiseux y observar si la expresión resultante se puede extender en $x = 0$.

Ejercicio 8. Decidir si y/x pertenece a la normalización de $k[x, y]/\langle y^2 - x^3\rangle$.

Ejercicio 9. Decidir si y/x pertenece a la normalización de $k[x, y]/\langle y^3 - x^2\rangle$.

Ejercicio 10. Decidir si y^2/x pertenece a la normalización de $k[x, y]/\langle y^3 - x^2\rangle$.

Ejercicio 11. Decidir si y/x pertenece a la normalización de $k[x, y]/\langle y^4 + y^3 - x^2\rangle$.

Ejercicio 12. Encontrar un polinomio p tal que p/x pertenezca a la normalización de $k[x, y]/\langle y^4 + y^3 - x^2\rangle$. Sugerencia: utilizar en el numerador un producto de polinomios tal que cada factor anule los primeros términos de alguna serie de Puiseux.

Ejercicio 13. Encontrar un polinomio p tal que p/x pertenezca a la normalización de $k[x, y]/\langle y^4 + y^3 - 2yx + x\rangle$.

En Maple podemos calcular bases de normalización para el caso de curvas, que se conocen como bases enteras. Una base entera de una curva C es un conjunto de generadores de la normalización de $k[x, y]/C$ como $k[x]-$módulo.

Ejercicio 14. Calcular la base entera de $k[x, y]/\langle y^2 - x^3\rangle$ utilizando el comando `integral_basis`. Verificar que y/x pertenece a la base entera.

Ejercicio 15. Calcular la base entera de $k[x, y]/\langle y^3 + y^2 - x^3\rangle$. Verificar que el ejemplo obtenido en el ejercicio anterior pertences a la base entera.

Ejercicio 16. Calcular la base entera de $k[x, y]/\langle y^4 + y^3 - 2yx + x\rangle$. Verificar que el ejemplo obtenido en el ejercicio anterior pertences a la base entera.