Acompañamiento a las trayectorias iniciales

Matemática

Notas Teóricas

y Guía de Actividades

Curso 2025

Departamento de Matemática

Universidad Nacional del Sur

Prólogo

El ingreso a la Universidad constituye una fase importante en el desarrollo educativo y personal de un individuo. Es un paso que abre puertas a nuevas oportunidades, experiencias y desafíos. Las diferencias entre la enseñanza en el nivel secundario y el universitario, propias de los objetivos que cada nivel educativo persigue, requieren que las/os alumnas/os transiten un período de adecuación de sus estrategias de aprendizaje para incorporarse a los ritmos y exigencias del nivel superior.

Con el objetivo de acompañar a las/os ingresantes en esta etapa inicial de su formación profesional, la Universidad Nacional del Sur ofrece, desde hace muchos años, una serie de cursos introductorios. En estos, no solo se revisan contenidos trabajados a lo largo del nivel medio y necesarios para las primeras materias del nivel superior, sino que también se busca desarrollar capacidades y habilidades que preparen a la/el estudiante para transitar su carrera universitaria.

Las/os docentes actuamos como facilitadoras/es de esta transición, brindando el apoyo necesario para enfrentar esta nueva etapa y trabajando activamente en la formación de la/del estudiante universitaria/o. Por su parte, las/os ingresantes deberán asumir el compromiso que este desafío conlleva, aportando esfuerzo y dedicación para adquirir los conocimientos y habilidades iniciales para adentrarse en su carrera profesional. En este contexto, y teniendo presente los cambios que enfrenta el ámbito académico, el Departamento de Matemática entiende la necesidad de repensar los materiales didácticos ofrecidos a quienes toman los cursos introductorios en esta disciplina, adaptando la propuesta de enseñanza a las nuevas realidades que nos rodean.

Nuestro objetivo es que estas notas sirvan como un primer acercamiento a la formalidad matemática, no solo en contenidos sino también en las formas de pensar, hacer y comunicar, propias de esta disciplina. Por ello, sin imponer una rigurosidad excesiva en las definiciones y demostraciones, presentaremos los conceptos utilizando una combinación del lenguaje coloquial, familiar para los estudiantes, y el lenguaje formal y simbólico característico de la matemática.

Noviembre 2024

Agradecimientos

El Departamento de Matemática ha sido siempre partícipe de la propuesta de cursos de nivelación o introductorios para los ingresantes de la UNS, y en cada oportunidad las/os docentes de este departamento colaboraron con la elaboración de distintos tipos de materiales para su dictado. Por eso, queremos agradecerle a cada docente que fue parte de este proceso, pues ese trabajo realizado año a año sentó las bases que nos permiten hoy publicar esta segunda versión de notas teórico-prácticas destinadas a las/os ingresantes de la Universidad Nacional del Sur. Expresamos un especial agradecimiento a la Dra. Andrea Bel, quien fue co-autora de una version anterior de este material y nos permitió retomarlo y modificarlo, facilitándonos la tarea que nos propusimos llevar adelante.

Coordinador General

Diego N. Castaño

Secretario Académico

Departamento de Matemática

Universidad Nacional del Sur

Redacción y Compaginación

Jessica A. Del Punta

Carla E. Morbelli

Contenido

Consideraciones generales

Cómo utilizar este material

El presente material se organiza en cuatro bloques temáticos:

- Bloque temático 1: Aritmética
- Bloque temático 2: Álgebra
- Bloque temático 3: Funciones
- Bloque temático 4: Razones trigonométricas

En cada uno de ellos, se presenta una revisión teórica de una selección de conceptos elementales de la matemática y sus propiedades. Cada bloque tiene a su vez distintas secciones y subsecciones, que finalizan con una propuesta de actividades de seguimiento, agrupadas bajo el nombre **Revisemos lo aprendido**. Estas actividades tienen por finalidad revisar si el lector comprendió los elementos básicos presentes en los conceptos planteados. Son actividades elementales, introductorias al trabajo práctico, y *no son suficientes* para afianzar la revisión de contenidos que aquí nos proponemos. Las actividades de seguimiento se complementan con una propuesta más extensa y profunda de ejercitación, presentada al final del desarrollo de los 4 bloques temáticos. Se trata de un bloque final del material, bajo el nombre **Actividades**, donde se distinguen las subsecciones correspondientes a cada bloque temático revisado.

Diez claves para el éxito

No existen recetas mágicas o universales que nos digan cómo estudiar para alcanzar los objetivos que se nos proponen en cada etapa de aprendizaje. Aun así, la experiencia nos permite enunciar una serie de claves que, creemos, pueden ayudar en esta nueva etapa de sus vidas.

1. Buscá entender más que memorizar.
2. No hay dudas irrelevantes. Preguntá todo lo que no entiendas.
3. Tratá de relacionar los temas, esto garantiza aprendizajes integrados.
4. Nadie puede aprender por vos. Asegurate de ser capaz de resolver los ejercicios por tu cuenta.
5. Intentá resolver ejercicios que te desafíen. Priorizá resolver los ejercicios que no sabés hacer o que te ayuden a aprender algo nuevo.
6. Para adquirir el entrenamiento necesario en matemática se necesitan horas de práctica, hacer ejercicios, equivocarse y volver a intentarlo. Destiná una cantidad de horas similar a las horas de clase para estudiar por tu cuenta.
7. Leé la teoría antes de ir clase. Esto facilita la comprensión de la misma y permite realizar mejores consultas.

8. Escribí, tomá notas y hacé resúmenes de los contenidos. El ejercicio de elaborar resúmenes y escribir, prestando atención a lo que estás haciendo, fija las ideas de forma más permanente que la lectura y memorización para un examen.
9. Asistí a clase. En las clases circula información importante, y es allí donde las/os docentes van marcando pautas y resaltando aspectos fundamentales que te guiarán en tu trabajo.
10. Acercate a tus compañeras/os y buscá formar un grupo de estudio. Estudiar en grupo (socializar) favorece el intercambio de ideas, y brinda apoyo, acompañamiento y contención.

Algunos errores que no tenés que cometer

En matemática, hay ciertos errores muy habituales que suelen cometerse principalmente por falta de atención a lo que se está haciendo. Te los contamos, y te proponemos que los tengas muy presentes cada vez que te dediques a resolver ejercicios.

1. Respetá la jerarquía de las operaciones si no hay paréntesis que indiquen lo contrario. *Los más y los menos separan términos.*

$$3 + 5 \times 2 = (3 + 5) \times 2 = 16 \qquad \longrightarrow \qquad \textit{Así no!!}$$

2. *No sumes términos que no sean semejantes.*

$$2x + 3 = 5x \qquad \longrightarrow \qquad \textit{Así no!!}$$

3. *No distribuyas las potencias y las raíces en sumas y restas.*

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2; \quad \sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \qquad \longrightarrow \qquad \textit{Nada de esto está bien.}$$

4. *No simplifiques numerador y denominador si hay sumas o restas en ellos.*

$$\frac{3 + 15}{5 + 4} = \frac{3 + \cancel{15}}{\cancel{5} + 4} = \frac{3 + 3}{1 + 4} \qquad \longrightarrow \qquad \textit{Por favor no hagas esto.}$$

5. *No distribuyas un numerador cuando hay una suma o resta en el denominador.*

$$\frac{2}{7 - 10} = \frac{2}{7} - \frac{2}{10} \qquad \longrightarrow \qquad \textit{Esto no está bien.}$$

6. *Cuando simplifiques, las cosas quedan en el lugar que estaban.*

$$\frac{x + 1}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{\cancel{x + 1}}{\cancel{(x + 1)}(x - 1)} = x - 1 \qquad \longrightarrow \qquad \textit{Así no se hace!!}$$

7. *El valor de a en una función cuadrática no se llama pendiente. Le podemos decir coeficiente principal o coeficiente cuadrático.*
8. *Respetá el orden al resolver una ecuación racional.*

$$\frac{4}{x} = 2 \qquad \longrightarrow \qquad x = \frac{2}{4} \qquad \longrightarrow \qquad \textit{Así no se hace!!}$$

Conceptos transversales

Mencionamos a continuación algunos conceptos generales que irán surgiendo de forma particular en los distintos bloques temáticos de estas notas.

Demostraciones y contraejemplos

En matemática, cada vez que enunciamos una nueva propiedad de los conceptos que estamos estudiando debemos demostrarla (esto es, probar que es verdadera). La demostración es la que le da validez a la propiedad. Para demostrar que una afirmación es verdadera no alcanza con mostrar algunos ejemplos que la cumplan, hay que probarla para todos los casos posibles buscando alguna estrategia de demostración. En estas notas daremos las demostraciones de algunas de las propiedades que enunciemos, aquellas que además nos permitan mostrar de manera sencilla las formas más habituales de demostración en matemática.

Destacamos dos formas de probar una afirmación.

- Una opción es realizar una **demostración directa**, a partir de algo conocido y aplicando propiedades que son verdaderas (es decir, que ya fueron demostradas) llegar a verificar la nueva propiedad. Esta estrategia es la que se usa al principio de la **Sección 1.3** al demostrar la cuarta propiedad de las desigualdades.

- Otra forma muy común de demostración, es la que se conoce como **demostración por el absurdo**. En este caso se supone que la afirmación que queremos probar es falsa y luego, aplicando propiedades ya conocidas, obtenemos una afirmación absurda. De esta forma se concluye que la afirmación inicial no podía ser falsa. Un ejemplo de demostración por el absurdo se presenta en la **Sección 2.3**. Allí se enuncian las propiedades de las desigualdades y se demuestra una de ellas usando esta estrategia.

Por otro lado, cuando una afirmación es falsa, es suficiente mostrar un ejemplo para la cual no se verifique. A estos ejemplos que permiten refutar una afirmación se los llama **contraejemplos**. En la **Sección 1.3**, luego de presentar las reglas de signo para la multiplicación, se utilizan estas ideas para mostrar que no existe una regla de signo para la suma.

Resolución de problemas y unidades de medida

En general al modelar problemas los distintos valores involucrados (coeficientes y variables) tienen asociadas unidades de medida. En estas notas no vamos a estudiar este aspecto de manera rigurosa, solo indicaremos en algunos casos las unidades de medida al inicio del problema y al momento de dar las respuestas a las preguntas planteadas.

También, al trabajar con figuras geométricas en el plano cartesiano (como por ejemplo, el triángulo que determinan tres puntos dados no alineados) podemos estar interesados en calcular su área o su perímetro para lo cual necesitamos una unidad de medida. Dado que en el plano cartesiano no tenemos una unidad de medida particular, cuando la necesitemos vamos a usar una **unidad de medida genérica** la cual indicamos **u.m.**

Notación: lenguaje simbólico

A continuación presentamos algunos de los símbolos matemáticos usados a lo largo de estas notas, indicando su significado. La definición, interpretación y uso de cada uno de ellos se explicará más detalladamente a medida que los mismos sean utilizados a lo largo del texto.

Conjuntos numéricos

$\mathbb{N}$	conjunto de los números naturales
$\mathbb{N}_0$	conjunto de los números naturales incluido el cero
$\mathbb{Z}$	conjunto de los números enteros
$\mathbb{Q}$	conjunto de los números racionales
$\mathbb{I}$	conjunto de los números irracionales
$\mathbb{R}$	conjunto de los números reales
$\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$	conjunto de los números reales positivos o negativos respectivamente
$\mathbb{R}^2$	plano cartesiano; conjunto de los pares ordenados (x, y), con x, y números reales.

Símbolos asociados a conjuntos numéricos y sus elementos

$>$	mayor que	$\in$	pertenece
$\geqslant$	mayor o igual que	$\notin$	no pertenece
$<$	menor que	$\cup$	unión
$\leqslant$	menor o igual que	$\cap$	intersección
$\emptyset$	conjunto vacío		

Funciones

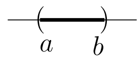
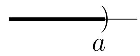
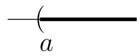
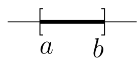
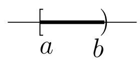
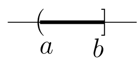
$f : A \to B$	función f definida de A en B, se lee "f de A en B"
$f(a)$	función f evaluada en el elemento a, se lee "f en a"
$\mathrm{Dom}\,(f)$	dominio de la función f
$\mathrm{Im}\,(f)$	imagen de la función f

Otros símbolos

$:$	tal que
$\simeq$	aproximado
$\mid\ \mid$	según el contexto, estas barras pueden indicar: $\lvert a \rvert$ valor absoluto del número a; $\lvert\overline{AB}\rvert$ medida del segmento $\overline{AB}$
$d(a, b)$	distancia entre a y b
Δ	discriminante de la ecuación cuadrática
(a, b)	dependiendo el contexto, esta notación puede indicar un intervalo o un punto en el plano, se aclara debidamente en cada situación
$\Longrightarrow$	implica
$\Longleftrightarrow$	si, y solo si
u.m.	unidad de medida

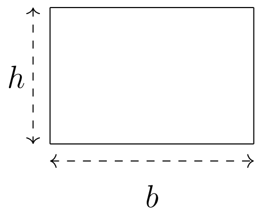
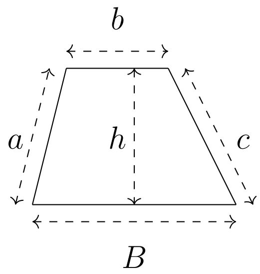
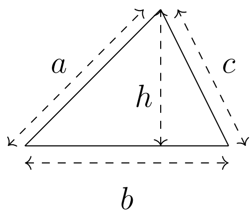
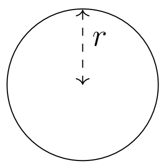
Intervalos

Los intervalos son subconjuntos del conjunto de números reales que tienen una forma particular de expresarse. En la siguiente tabla presentamos los distintos tipos de intervalos, su representación en una recta numérica y su notación de conjunto.

Intervalos	**Notación de intervalo**	**Notación de conjuntos**	**Gráfica**
Abiertos	(a, b)	$\{x : a < x < b\}$	
	$(-\infty, a)$	$\{x : x < a\}$	
	$(a, +\infty)$	$\{x : x > a\}$	
Cerrados	$[a, b]$	$\{x : a \leqslant x \leqslant b\}$	
	$(-\infty, a]$	$\{x : x \leqslant a\}$	
	$[a, +\infty)$	$\{x : x \geqslant a\}$	
Semiabiertos	$[a, b)$	$\{x : a \leqslant x < b\}$	
	$(a, b]$	$\{x : a < x \leqslant b\}$	

Fórmulas geométricas

A continuación recordamos las fórmulas de área y perímetro de algunas figuras geométricas, que luego utilizaremos a lo largo de estas notas.

Figura geométrica		**Área** (A) **y perímetro** (P)
Rectángulo		$A = b \cdot h,$ $P = 2b + 2h.$
Trapecio		$A = \dfrac{(B+b)\cdot h}{2},$ $P = B + b + a + c.$
Triángulo		$A = \dfrac{b \cdot h}{2},$ $P = a + b + c\ .$
Circunferencia - Círculo		$A = \pi r^2,$ $P = 2\pi r.$

Bibliografía y textos de apoyo

Los siguientes libros pueden ser útiles como material de consulta de las distintas unidades. Estos ejemplares se encuentran en la **Biblioteca Central** de la Universidad Nacional del Sur. Algunos ejemplos y ejercicios de estas notas están inspirados en otros que aparecen en esta bibliografía.

- STEWART, J. y REDLIN, L. (2007). *Precálculo: matemáticas para el cálculo* (5ta ed.). México D. F., México: Cengage Learning.

- LARSON, R. (2012). *Precálculo* (8va ed.). México D. F., México: Cengage Learning.

- FAIRES, J. D. y DEFRANZA, J. (2001). *Precálculo* (2da ed.) México D. F., México: Thomson Learning.

En el libro

- BOROCO, M. (2010). *Funciones elementales para construir modelos matemáticos.* Colección "Las Ciencias Naturales y la Matemática". Ministerio de Educación - Instituto Nacional de Educación Tecnológica.

encontrarán problemas de funciones de una variable real, en particular funciones lineales y funciones cuadráticas. Este material puede descargarse de forma gratuita desde la web https://www.educ.ar/recursos/151449/funciones-elementales-para-construir-modelos-matematicos-parte-1

Además, sugerimos consultar también las notas y ejercicios de los cursos de nivelación de años anteriores, así como sus exámenes parciales y finales. Varias de las actividades propuestas en estas notas fueron tomadas de la "Guía de Ejercicios" del Curso de Nivelación 2015. Este material se encuentra publicado en la página web del **Departamento de Matemática** (www.matematica.uns.edu.ar) en la sección **Ingresantes** del **Menú Principal**.

1 Aritmética

Síntesis del bloque temático

En esta unidad revisaremos algunos conceptos vinculados al conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$). Estudiaremos:

1. Los subconjuntos de $\mathbb{R}$: los números naturales ($\mathbb{N}$), los enteros ($\mathbb{Z}$), los racionales ($\mathbb{Q}$) y los irracionales ($\mathbb{I}$), operaciones entre ellos y algunas de sus propiedades.

2. La relación de orden (mayor, menor ó igual) entre elementos de $\mathbb{R}$, la representación en la recta numérica y la noción de valor absoluto.

3. Las operaciones de potenciación y radicación, y sus propiedades.

4. Operaciones con radicales. La racionalización de algunos cocientes en los cuales aparecen raíces cuadradas en el denominador.

5. Noción de logaritmo y notación científica. Uso de la calculadora para aproximar números según el contexto.

1.1 Conjuntos numéricos

Con la letra $\mathbb{R}$ representamos al conjunto de los números reales. Para indicar que a es un número real, esto es, que a pertenece al conjunto de los números reales, escribimos $a \in \mathbb{R}$.

Dentro del conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) podemos distinguir algunos subconjuntos particulares.

1. **Números naturales** ($\mathbb{N}$)
   Esta familia de números está relacionada con dos procesos elementales: *contar* y *ordenar*.

   - Los números *ordinales* o números para ordenar: el primero, el segundo, el tercero, etc. En símbolos, escribiremos
   $$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$$
   - Los números *cardinales* o números para contar: ningún elefante, una tortuga, dos abejas, tres perros, etc. En símbolos escribiremos
   $$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$
   Al contar, necesitamos incluir el cero, por ese motivo usamos el símbolo $\mathbb{N}_0$

   Podemos sumar y multiplicar números naturales y el resultado va a seguir siendo un número natural. También podemos resolver algunas restas y algunas divisiones. Podemos, por ejemplo, resolver ecuaciones como
   $$x + 3 = 7 \quad \longrightarrow \quad x = 4.$$
   ¿Qué pasa ahora si queremos resolver la siguiente ecuación?
   $$x + 5 = 2.$$

Encontramos que esta ecuación no se puede resolver en el conjunto de los números naturales. Es decir, no existe un número natural x tal que si le sumamos 5 nos dé como resultado 2. Esto motiva la definición de un nuevo conjunto numérico en el que encontremos la solución de ecuaciones como esta.

2. **Números enteros** ($\mathbb{Z}$)
El conjunto de los números enteros está formado por los números naturales ($\mathbb{N}$), también llamados enteros positivos ($\mathbb{Z}^+$), los enteros negativos ($\mathbb{Z}^-$) y el cero.
Simbólicamente
$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+.$$
La suma, resta y multiplicación de números enteros da como resultado un número entero. Incluso algunas divisiones de números enteros dan como resultado un número entero, pero no todas. Por ejemplo si calculamos 5:2 no obtenemos un número entero. Esto hace que, como en el caso anterior, algunas ecuaciones no tengan solución en el conjunto de los números enteros. Por ejemplo,
$$2x = 5,$$
ningún número entero multiplicado por 2 da como resultado 5. Entonces, necesitamos construir un nuevo conjunto numérico que incluya la solución de ecuaciones como esta.

3. **Números racionales** ($\mathbb{Q}$)
Los números racionales se forman a partir del cociente entre dos números enteros.
Simbólicamente
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{R} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}.$$
Ahora sí, tenemos un conjunto con la propiedad de que la suma, resta y multiplicación de cualquiera de sus elementos (números racionales) da como resultado un elemento del conjunto (un número racional). Además, la división de un número racional por otro distinto de cero, da como resultado un número racional.

Puede ocurrir que el cociente entre dos números enteros sea exacto (es decir, al dividir el numerador por el denominador el resto es cero), como pasa con la fracción
$$\frac{12}{-6} = -2.$$
En estos casos, el número racional también es un número entero.

También puede ocurrir que el cociente sea una expresión decimal no entera (el resto de dividir el numerador por el denominador es distinto de cero). Estas expresiones decimales pueden ser

- finitas:
$$\frac{3}{4} = 0,75; \qquad -\frac{11}{8} = -1,375;$$
- periódicas puras:
$$\frac{7}{3} = 2,333\ldots = 2,\widehat{3}; \qquad \frac{23}{11} = 2,090909\ldots = 2,\widehat{09};$$

◇ periódicas mixtas:

$$\frac{7}{6} = 1,1666\ldots = 1,1\widehat{6}; \qquad \frac{35}{36} = 1,02777\ldots = 1,02\widehat{7};$$

$$-\frac{21}{44} = -0,47727272\ldots = -0,47\widehat{72}.$$

Vemos así que todas las fracciones tienen una expresión entera o decimal. La pregunta ahora es *¿cualquier número decimal se puede expresar como una fracción?* La respuesta es **NO**. Existen números decimales que no pueden expresarse como el cociente de números enteros. Además, no cualquier ecuación que involucre coeficientes racionales tiene solución en los números racionales. Por ejemplo,

$$x^2 = 5 \quad \text{ó} \quad 10^x = 12.$$

Necesitamos extender el conjunto de números racionales para incluir este tipo de números.

4. **Números irracionales** ($\mathbb{I}$)
   Los números irracionales son aquellas expresiones decimales que no son ni finitas ni periódicas. Estos números no pueden expresarse como cociente de dos números enteros. Por ejemplo,

   $$\pi, \quad \sqrt{5}, \quad \sqrt[5]{3}, \quad 2+3\pi, \quad \ln 3, \quad \log 12$$

   son números irracionales.

   La unión del conjunto de números racionales con el conjunto de números irracionales forma el conjunto de **números reales**.

Tenemos así el siguiente esquema

$$\mathbb{R} : \text{Reales} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{Q} : \text{Racionales} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{Z} : \text{Enteros} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{N} : \text{Naturales} \\ 0 : \ \text{Cero} \\ \mathbb{Z}^- : \text{Enteros negativos} \end{array} \right. \\ \\ \text{Racionales no enteros} \left\{ \begin{array}{l} \text{Distintas expresiones decimales:} \\ \quad \text{Finitas} \\ \quad \text{Periódicas Puras} \\ \quad \text{Periódicas Mixtas} \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \\ \mathbb{I} : \text{Irracionales} \end{array} \right.$$

Uso de calculadora

Hasta cierto punto, podemos usar la calculadora para identificar números irracionales. Por ejemplo, calculamos $\sqrt{5}$ y la calculadora indica

$$\sqrt{5} \longrightarrow 2,2360679775.$$

Como sus dígitos decimales no presentan ningún patrón visible, y la calculadora nos arrojó la mayor cantidad de dígitos que puede mostrar, entonces *sospechamos* que este número tiene infinitos dígitos decimales no periódicos. En lo que trabajemos en estas notas, cuando esto ocurra será porque se trata de un número irracional.
El número π también lo encontramos en la calculadora y resulta

$$\pi \longrightarrow 3,1415926536.$$

Este número tiene infinitos dígitos decimales no periódicos, por lo que se trata de un número irracional.

Revisemos lo aprendido

Indicar a qué conjunto (o conjuntos) pertenece cada uno de los siguientes números.

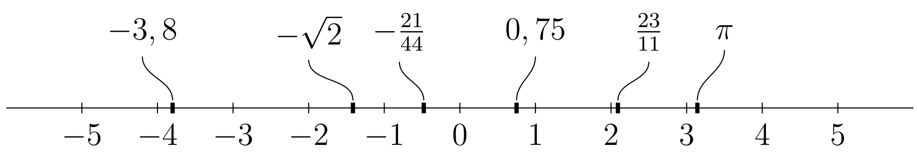
(a) 6,
(b) -6
(c) $\frac{\pi}{2}$,
(d) $2,25111$,
(e) $\frac{3}{9}$
(f) 0,
(g) $\sqrt{2,25}$
(h) $-2,0\widehat{1}$,
(i) $-\frac{9}{81}$,
(j) $\sqrt[3]{-8}$

1.2 La recta numérica. Valor absoluto

Representamos gráficamente el conjunto $\mathbb{R}$ en una **recta numérica**. A cada número real le corresponde un único punto sobre la recta y a cada punto en la recta numérica se le asocia un único número real. Además los números reales están ordenados. Los símbolos $<$ (menor), $>$ (mayor), $\leqslant$ (menor o igual) y $\geqslant$ (mayor o igual) describen el orden entre los elementos de $\mathbb{R}$. Para cualquier par de números $a, b \in \mathbb{R}$ se verifica una, y solo una, de las siguientes relaciones

$$a = b, \qquad a < b, \qquad a > b.$$

En el siguiente gráfico se muestra la ubicación de algunos números reales en la recta.



Vemos, por ejemplo, en este gráfico que

$$-3,8 \leqslant -\sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad \pi > \frac{23}{11}.$$

Presentaremos algunas propiedades de las desigualdades cuando estudiemos inecuaciones en la **Sección 2.3**.

El orden en $\mathbb{R}$ nos permite distinguir entre el conjunto de **números positivos** (mayores que 0), que indicamos $\mathbb{R}^+$, y el conjunto de **números negativos** (menores que 0), que indicamos $\mathbb{R}^-$. Simbólicamente,

$$\mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\} \qquad \text{y} \qquad \mathbb{R}^- = \{a \in \mathbb{R} : a < 0\}.$$

El primero de estos conjuntos se lee

“ $\mathbb{R}^+$ es el conjunto de los números a en $\mathbb{R}$ tales que a es mayor que cero”.

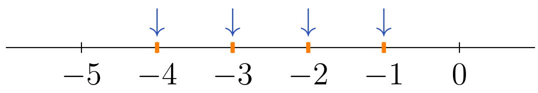
Por ejemplo,

$$-3,8 \in \mathbb{R}^-, \quad -\sqrt{2} \in \mathbb{R}^-, \quad 0,75 \in \mathbb{R}^+ \quad \text{y} \quad \pi \in \mathbb{R}^+.$$

Ejemplo 1.2.1

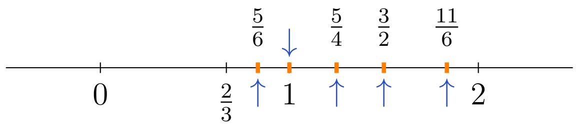
1. Hallar y representar en la recta numérica todos los números enteros mayores que -5 y menores o iguales que -1.

   $\{-4,\ -3,\ -2,\ -1\}$

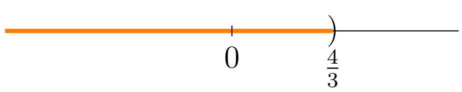
2. Hallar y representar en la recta numérica cinco números racionales mayores que $\frac{2}{3}$ y menores que 2.

   $$\left\{\frac{5}{6},\ 1,\ \frac{5}{4},\ \frac{3}{2},\ \frac{11}{6}\right\}$$

3. Expresar usando notación de conjunto y representar en la recta numérica el conjunto de todos los números reales menores que $\frac{4}{3}$. Esto es,

   $$A = \left\{a \in \mathbb{R} : a < \frac{4}{3}\right\}$$

   Usamos el paréntesis en el extremo $\frac{4}{3}$ para indicar que ese número no pertenece al conjunto A.

4. Expresar usando notación de conjunto y representar el conjunto de los números reales negativos mayores o iguales que -3.

   $$B = \left\{b \in \mathbb{R}^- : b \geqslant -3\right\}$$

   Usamos un corchete en el extremo -3 para indicar que este número pertenece al conjunto B y un paréntesis en el extremo 0 ya que $0 \notin B$. Observemos que este conjunto también puede escribirse de la forma

$$B = \{b \in \mathbb{R} : -3 \leqslant b < 0\}.$$

5. Expresar usando notación de conjunto y representar el conjunto de todos los números reales mayores que $-\frac{5}{2}$ y menores o iguales que 1.

$$C = \left\{c \in \mathbb{R} : -\frac{5}{2} < c \leqslant 1\right\}$$

En este caso combinamos paréntesis y corchetes para indicar que $-\frac{5}{2} \notin C$ y $1 \in C$.

Los conjuntos A, B y C representan **intervalos** de la recta numérica. En notación de intervalo, se indican:

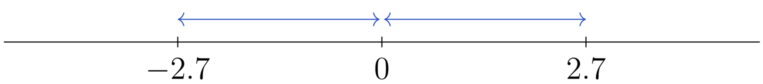
$$A = \left(-\infty, \frac{4}{3}\right); \qquad B = [-3, 0); \qquad C = \left(-\frac{5}{2}, 1\right]$$

Recomendamos revisar la tabla de intervalos presentada en las **Consideraciones generales**, ya que allí se resumen los distintos tipos de intervalos elementales que trabajaremos en estas notas. Profundizaremos sobre estas representaciones de subconjuntos de $\mathbb{R}$ en la **Sección 2.3** cuando estudiemos inecuaciones.

Otro concepto relacionado con los números reales es el de valor absoluto. El **valor absoluto** de un número real se asocia con la distancia de dicho número al 0. Al valor absoluto de $a \in \mathbb{R}$ lo escribimos $|a|$. Así,

$$|2,7| = 2,7 \quad \text{y también} \quad |-2,7| = 2,7.$$

Gráficamente se observa que la distancia de ambos números a 0 es la misma.



La definición formal de valor absoluto está dada por

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si} \quad a \geqslant 0, \\ -a, & \text{si} \quad a < 0. \end{cases}$$

Para utilizar la definición de valor absoluto debemos identificar si el número que tenemos adentro del valor absoluto es mayor o igual que cero ó menor que cero. En el primer caso, simplemente sacamos las barras y el resultado es el mismo número; en el segundo caso, sacamos las barras y debemos agregar un signo negativo al resultado. Así,

- $|\pi| = \pi$, ya que $\pi \geq 0$,
- $|-\sqrt{3}| = -(-\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ ya que $-\sqrt{3} < 0$.

El único número real cuyo valor absoluto es cero, es el cero. Simbólicamente se escribe

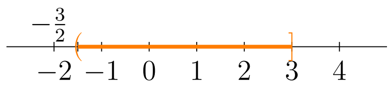
$$|a| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0,$$

y se lee: *El valor absoluto de a es igual a cero si, y solo si a es cero.*

Revisemos lo aprendido

1. Representar en una recta numérica los siguientes conjuntos de números reales.
   (a) Cuatro números racionales no enteros menores que -1.
   (b) Todos los números reales mayores que $-\frac{3}{2}$ y menores o iguales a $\frac{2}{3}$.
   (c) Los números $\left|\frac{3}{2}\right|, -|3|, -|-2|, |-(-1)|$.

2. Completar la siguiente tabla con los elementos faltantes.

En palabras	**Notación de conjuntos**	**Gráfica**
Números reales menores o iguales que 4		
	$\left\{x \in \mathbb{R}^- : x \geqslant \frac{8}{3}\right\}$	
		

1.3 Números reales: operaciones elementales

Sobre el conjunto $\mathbb{R}$ se definen dos operaciones elementales: la **suma** $(+)$ y la **multiplicación** o producto $(\cdot)$. La suma y el producto de dos números reales es un número real. Además se verifican las siguientes **propiedades**:

(1) *Asociativa.* Si a, b y $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$(a+b)+c = a+(b+c) \quad \text{y} \quad (a \cdot b)\cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

(2) *Conmutativa.* Si a y $b \in \mathbb{R}$, entonces

$$a+b = b+a \quad \text{y} \quad a \cdot b = b \cdot a.$$

(3) *Distributiva.* Si a, b y $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$(a+b)\cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \text{y} \quad c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b.$$

(4) *Elemento neutro.* Existen dos números reales distintos, el 0 y el 1, tales que para cualquier $a \in \mathbb{R}$ se verifica

$$a + 0 = a \quad \text{(neutro aditivo)},$$

$$a \cdot 1 = a \quad \text{(neutro multiplicativo)}.$$

(5) *Elemento opuesto.* Para cada $a \in \mathbb{R}$ existe un único número real llamado **opuesto** (simétrico) de a, y lo escribimos $-a$, de forma que la suma de estos números es el neutro aditivo. Esto es,

$$a + (-a) = 0 \quad \text{(opuesto)}.$$

(6) *Elemento inverso.* Para cada número real $a \neq 0$ existe un único número real llamado **inverso** de a, que expresamos a^{-1}, de forma que el producto de estos números es el neutro multiplicativo. Esto es,

$$a \cdot a^{-1} = 1 \quad \text{(inverso)}.$$

Demostremos la propiedad (5) utilizando una demostración por el absurdo (una de las formas de demostrar una afirmación, como se menciona en las **Consideraciones generales**).

Supongamos, por el absurdo, que el opuesto de a no es único. Es decir, existen dos números b_1 y b_2 distintos ($b_1 \neq b_2$) tales que

$$a + b_1 = 0 \quad \text{y} \quad a + b_2 = 0.$$

Entonces, restando ambas ecuaciones resulta

$$(a + b_1) - (a + b_2) = 0 - 0.$$

Simplificando, obtenemos

$$b_1 - b_2 = 0,$$

y de aquí resulta que

$$b_1 = b_2.$$

Esto contradice la suposición de que $b_1 \neq b_2$. Es decir, llegamos a un *absurdo*, el cual se produce como consecuencia de suponer que hay dos opuestos distintos de a.

Conclusión: El opuesto de un número real a es único. $\square$

Observación 1

Notemos que si $a \in \mathbb{R}$ es positivo (es decir, $a > 0$) entonces su opuesto $-a$ es negativo (esto es, $-a < 0$). De la misma forma, si $a < 0$, entonces $-a > 0$. Simbólicamente,

$$\begin{aligned} a \in \mathbb{R}^+ \quad &\Longrightarrow \quad -a \in \mathbb{R}^-, \\ a \in \mathbb{R}^- \quad &\Longrightarrow \quad -a \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

A partir de la distinción entre números reales positivos y negativos trabajada en la **Sección 1.2** tenemos las siguientes **reglas de signo** para la multiplicación (y división).

$$(+)\cdot(+)=(+),\qquad (+)\cdot(-)=(-),$$
$$(-)\cdot(-)=(+),\qquad (-)\cdot(+)=(-).$$

De esta forma calculamos, por ejemplo,

$$(-30):6=-5,\qquad -\frac{2}{5}\cdot(-7)=\frac{14}{5}.$$

Podríamos preguntarnos si existe una regla de signo para la suma. Es fácil observar que la suma de dos números positivos es siempre un número positivo, y la suma de dos números negativos es siempre un número negativo. Esto es,

$$\begin{aligned} a>0 \ \text{ y } \ b>0 &\implies a+b>0,\\ a<0 \ \text{ y } \ b<0 &\implies a+b<0. \end{aligned}$$

Ahora, ¿podemos afirmar que la suma de un número positivo y un número negativo es siempre un número negativo? La respuesta es no. En otras palabras, la afirmación es falsa. Como mencionamos en las **Consideraciones generales**, para mostrar que una afirmación es falsa alcanza con encontrar un **contraejemplo**. En este caso tomemos un valor de $a>0$, por ejemplo, $a=3$ y un valor de $b<0$, por ejemplo, $b=-1$. Con estos valores obtenemos

$$\left.\begin{array}{ll} a=3 & \text{(positivo)}\\ b=-1 & \text{(negativo)} \end{array}\right\} \implies a+b=3+(-1)=2 \text{ (positivo)}.$$

Mostramos así, con un contraejemplo, que la suma de un número positivo y uno negativo no es siempre un número negativo. De la misma forma podemos mostrar que la suma de un número positivo y uno negativo no siempre es un número positivo. Podemos considerar, por ejemplo, un valor de $a>0$, en particular $a=3$, y un valor $b<0$, por ejemplo $b=-9$, de forma que

$$\left.\begin{array}{ll} a=3 & \text{(positivo)}\\ b=-9 & \text{(negativo)} \end{array}\right\} \implies a+b=3+(-9)=-6 \text{ (negativo)}.$$

De estas observaciones concluimos que no existe una regla de signo para la suma.

Observación 2

Una particularidad del neutro aditivo 0 es que cualquiera sea $a\in\mathbb{R}$ se verifica $a\cdot 0=0$. Más aún, el producto de dos números reales es nulo si, y solo si, uno de ellos es 0. Simbólicamente:

$$a\cdot b=0 \iff a=0 \ \text{ ó } \ b=0.$$

Si bien definimos solo la suma y la multiplicación de dos números reales, también podemos hablar de **resta** $(-)$ y **división** o cociente $(:)$. La resta no es otra cosa que sumar el opuesto de un número. De forma similar, la división es la multiplicación por un inverso. De esta forma,

$$a-b=a+(-b)\qquad \text{y}\qquad a:b=a\cdot b^{-1},$$

y esta última operación es válida siempre que $b \neq 0$. A menudo escribimos

$$a : b = \frac{a}{b},$$

de forma que para el caso particular $a = 1$ resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} &= 1 : b \\ &= 1 \cdot b^{-1} \quad \text{(definición de división)} \\ &= b^{-1} \quad \text{(1 es elemento neutro multiplicativo).} \end{aligned}$$

Así, por ejemplo,

$$5,4 - 3 = 5,4 + (-3) = 2,4 \qquad \text{y} \qquad \sqrt{2} : 5 = \sqrt{2} \cdot 5^{-1} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{\sqrt{2}}{5}.$$

Para cualquier par de números reales a, b, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$, tenemos

$$(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1} \qquad \text{y} \qquad (a : b)^{-1} = a^{-1} : b^{-1} = b : a.$$

Otra propiedad muy utilizada es

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b},$$

válida para cualquier terna de números reales a, b, c, siempre que $b \neq 0$ y $c \neq 0$. Esto es consecuencia inmediata del hecho de que $x \cdot 1 = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. En efecto,

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}.$$

Esta propiedad es la que permite, por ejemplo, simplificar fracciones. Así

$$\frac{14}{21} = \frac{2 \cdot \cancel{7}}{3 \cdot \cancel{7}} = \frac{2}{3}.$$

También esta propiedad la usamos al racionalizar expresiones como las que estudiaremos en la **Sección 1.5**.

Algo más sobre números racionales

Un mismo número racional tiene muchas formas de representarse. A estas distintas representaciones se las llama **fracciones equivalentes**. Así,

$$\frac{9}{15}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{6}{10}, \quad \frac{30}{50}$$

son fracciones equivalentes porque todas representan al mismo número racional. La propiedad que nos asegura que todas estas expresiones corresponden al mismo número es la presentada al final de la **Sección 1.3**: dividiendo o multiplicando numerador y denominador por un mismo número obtenemos fracciones equivalentes. Usando esta propiedad encontramos

$$\frac{9}{15} \overset{:3}{=} \frac{3}{5}, \qquad \frac{3}{5} \overset{\times 2}{=} \frac{6}{10}, \qquad \frac{3}{5} \overset{\times 10}{=} \frac{30}{50}$$

y vemos así que estas son todas fracciones equivalentes. Usando esta propiedad simplificamos fracciones,

$$\frac{24}{30} \overset{:2}{=} \frac{12}{15} \overset{:3}{=} \frac{4}{5}, \qquad \frac{36}{45} \overset{:3}{=} \frac{12}{15} \overset{:3}{=} \frac{4}{5}.$$

Para sumar (o restar) fracciones debemos buscar un denominador común. Recordamos esta operación con algunos ejemplos:

- $\frac{2}{3} - 2 = \frac{2}{3} - \frac{6}{3} = -\frac{4}{3}$,
- $\frac{7}{2} + \frac{3}{4} = \frac{14}{4} + \frac{3}{4} = \frac{14+3}{4} = \frac{17}{4}$,
- $\frac{2}{5} + \frac{3}{2} = \frac{4}{10} + \frac{15}{10} = \frac{4+15}{10} = \frac{19}{10}$.

La multiplicación de fracciones se resuelve multiplicando numeradores entre sí y denominadores entre sí. Además debemos tener en cuenta que en algunos casos podemos simplificar expresiones. Por ejemplo,

- $\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 7} = \frac{8}{21}$,
- $\frac{5}{6} \cdot 3 = \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 1} = \frac{5 \cdot \cancel{3}}{2 \cdot \cancel{3}} = \frac{5}{2}$.

La división entre fracciones la resolvemos multiplicando por el inverso multiplicativo. Esto es,

- $\frac{4}{5} : \frac{11}{2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{11} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 11} = \frac{8}{55}$,
- $\frac{15}{8} : \frac{9}{2} = \frac{15}{8} \cdot \frac{2}{9} = \frac{15 \cdot 2}{8 \cdot 9} = \frac{\cancel{3} \cdot 5 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{3}} = \frac{5}{12}$.

Recordemos, a partir de ejemplos, cómo se resuelven algunas operaciones combinadas entre números racionales, y la manera correcta de simplificar las expresiones obtenidas.

Ejemplo 1.3.1

Resolvamos paso a paso algunas operaciones combinadas entre números racionales.

- $$-2 - \left[\frac{3}{7} - \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{4}{25}\right)^{-1}\right] = -2 - \left[\frac{3}{7} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5} \cdot 5}{\cancel{2} \cdot 2}\right] - 2 - \left[\frac{3}{7} - \frac{5}{2}\right]$$
$$-2 - \frac{6-35}{14} = -2 + \frac{29}{14} = \frac{-28+29}{14} = \frac{1}{14}.$$

- $$1 + \frac{-1+3^{-1}}{2+3^{-1}} = 1 + \frac{-1+\frac{1}{3}}{2+\frac{1}{3}} = 1 + \frac{\frac{-3+1}{3}}{\frac{6+1}{3}} = 1 + \frac{\frac{-2}{3}}{\frac{7}{3}}$$
$$= 1 - \frac{2}{3} : \frac{7}{3} = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{7} = 1 - \frac{2}{7} = \frac{7-2}{7} = \frac{5}{7}.$$

◇ $\dfrac{\frac{15}{4}}{\frac{40}{3}} = \dfrac{15}{4} : \dfrac{40}{3} = \dfrac{15}{4} \cdot \dfrac{3}{40} = \dfrac{3 \cdot \cancel{5}}{4} \cdot \dfrac{3}{8 \cdot \cancel{5}} = \dfrac{3 \cdot 3}{4 \cdot 8} = \dfrac{9}{32}.$

Notemos que en el segundo paso de este último ejemplo habría sido un error simplificar el denominador 4 con el numerador 40, y también sería erróneo simplificar el numerador 15 con el denominador 3.

Al resolver operaciones de suma, resta, multiplicación y división entre números racionales, obtenemos siempre un número racional, que además es un número real, y en algunos casos puede ser también un número entero o natural. Eso puede observarse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3.2

El resultado del siguiente cálculo,

$$-4^{-1} \cdot \left|\frac{4}{5} - 2\right| = -\frac{1}{4} \cdot \left|-\frac{6}{5}\right| = -\frac{3}{10} = -0,3,$$

es un número real que también es racional. Se trata de una expresión decimal finita. No es un número entero ni tampoco es un número natural.

En el siguiente cálculo obtenemos

$$\frac{14}{3} : \left(\frac{6}{(-7)}\right)^{-1} = -\frac{14}{3} : \frac{7}{6} = -4,$$

es un número real que también es racional y entero. Más aún, es un entero negativo. No es un número natural.

Revisemos lo aprendido

Resolver las siguientes operaciones combinadas **sin utilizar calculadora** e indicar a qué conjuntos numéricos pertenece el resultado.

(a) $2 - 3 \cdot (4 \cdot 2 + 8)$

(b) $\left|-5 - \dfrac{11}{2}\right| : \dfrac{3}{2}$

(c) $2 : 6^{-1} + \dfrac{\frac{3}{2}}{6}$

(d) $\left(-\dfrac{16}{2} + 4\right) : 4 - \left[\dfrac{2-5}{-4} \cdot 2 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}\right]$

1.4 Potenciación y radicación. Propiedades

Si $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos la **potencia n-ésima** de a como

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ \ldots \cdot a}_{n \text{ veces } a}.$$

El número a se llama **base** de la potencia y n es el **exponente**.

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N}$, tenemos las siguientes **propiedades de la potenciación**.

(P1) $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

(P2) $a^{m \cdot n} = (a^m)^n$

(P3) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

(P4) $(a : b)^n = a^n : b^n, \quad \text{si} \quad b \neq 0$

Si $a \neq 0$, extendemos la definición de potencia para $n = 0$ y para potencias enteras negativas

$$\begin{aligned} a^0 &= 1, \\ a^{-n} &= (a^{-1})^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Observación 3: Signo de las potencias

Como consecuencia de la regla de signo para la multiplicación, podemos dar una regla para la potenciación.

- Si $a > 0$ entonces $a^n > 0$ para todo n natural.
- Si $a < 0$ entonces hay dos posibilidades: $a^n < 0$ si n es impar ó $a^n > 0$ si n es par.

Por ejemplo,

◇ $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$,

y esto ilustra que

$$\text{base positiva} \quad \longrightarrow \quad \text{resultado positivo},$$

◇ $(-1)^6 = \underbrace{(-1) \cdot (-1)}_{\text{positivo}} \cdot \underbrace{(-1) \cdot (-1)}_{\text{positivo}} \cdot \underbrace{(-1) \cdot (-1)}_{\text{positivo}} = 1$,

y esto ilustra que

$$\text{base negativa y exponente par} \quad \longrightarrow \quad \text{resultado positivo},$$

◇ $(-3)^3 = \underbrace{(-3) \cdot (-3)}_{\text{positivo}} \cdot (-3) = -27$,

y esto ilustra que

$$\text{base negativa y exponente impar} \quad \longrightarrow \quad \text{resultado negativo}.$$

Ejemplo 1.4.1

Aplicando propiedades podemos simplificar las siguientes expresiones.

◇ $2^4 \cdot 2^{-3} \cdot 5 \cdot (2^4)^4 = 5 \cdot 2^{4-3} \cdot 2^{4 \cdot 4} = 5 \cdot 2^{1+16} = 5 \cdot 2^{17}$

$\diamond$ $\dfrac{5^9\cdot(2\cdot 5)^4}{5^3}=\dfrac{5^9\cdot 2^4\cdot 5^4}{x^3}=\dfrac{16\cdot 5^{9+4}}{5^3}=16\cdot 5^{13-3}=16\cdot 5^{10}$

$\diamond$ $$\begin{aligned}\frac{7^2\cdot(-14)^{-3}}{(10^{-2})^3\cdot 5^4}&=\frac{7^2\cdot(-2\cdot 7)^{-3}}{(2\cdot 5)^{-6}\cdot 5^4}=\frac{7^2\cdot(-1)^{-3}\cdot 2^{-3}\cdot 7^{-3}}{2^{-6}\cdot 5^{-6}\cdot 5^4}\\&=-\frac{7^{2-3}\cdot 2^{-3+6}}{5^{-6+4}}=-\frac{7^{-1}\cdot 2^3}{5^{-2}}=-\frac{2^3\cdot 5^2}{7}\end{aligned}$$

Para $a\in\mathbb{R}^+$ y $n\in\mathbb{N}$, definimos la **raíz n-ésima (principal)** de a como el número real positivo b que verifica
$$\sqrt[n]{a}=b \quad \text{si} \quad b^n=a.$$
El valor n se llama **índice** de la raíz.

Si $a=0$ tenemos $\sqrt[n]{0}=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$, ya que $0^n=0$ para $n\in\mathbb{N}$. Si $a<0$ solo existirá una raíz real n-ésima para valores de n impares. Si n es par, resulta que b^n es positivo para todo $b\neq 0$ (ver la **Observación 3**) y por lo tanto, no existirán raíces reales con índice par de números negativos. Veamos a partir de algunos ejemplos las distintas situaciones presentadas.

- Si n es impar la raíz real de a existe y tiene el mismo signo que a. Por ejemplo,
$$\sqrt[3]{27}=3 \quad \text{pues} \quad 3^3=27,$$
$$\sqrt[5]{-32}=-2 \quad \text{pues} \quad (-2)^5=-32.$$

- Si n es par y a es positivo, la raíz existe y es positiva. Por ejemplo, $\sqrt[2]{9}=3$ ya que $3^2=9$.

- Si n es par y a es negativo no existen raíces reales de a. Por ejemplo, no tenemos solución real para $\sqrt[4]{-16}$ ya que no existe $b\in\mathbb{R}$ tal que $b^4=-16$.

Observación 4

De la definición de raíz n-ésima resulta que, si n es par, $\sqrt[n]{a^n}=|a|$. Por ejemplo, para $a=-3$ y $n=2$,
$$\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3=|-3|.$$

Si $a,b\in\mathbb{R}^+$ y $m,n,s\in\mathbb{N}$, entonces se verifican las siguientes **propiedades de la radicación para reales positivos**.

(R1) $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$

(R2) $\sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

(R3) $\sqrt[n]{\sqrt[s]{a}}=\sqrt[n\cdot s]{a}$

(R4) $\sqrt[n\cdot s]{a^{m\cdot s}}=\sqrt[n]{a^m}$

Si $a<0$, las propiedades anteriores son válidas solo si consideramos índices n y s impares. Esta restricción de índices permite asegurar que cada una de las raíces existirá.

Ejemplo 1.4.2

Combinando las propiedades (R1) y (R4) podemos calcular

$$\sqrt[6]{\left(\frac{2}{5}\right)^9} \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt[2\cdot 3]{\left(\frac{2}{5}\right)^{3\cdot 3}} \cdot \sqrt[2\cdot 2]{\left(\frac{2}{5}\right)^2} \overset{(R4)}{=} \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^3} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}$$
$$\overset{(R1)}{=} \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \frac{2}{5}} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^{2\cdot 2}} \overset{(R4)}{=} \frac{4}{25}.$$

Notemos que no podemos proceder igual si en lugar de $\frac{2}{5}$ tenemos $-\frac{2}{5}$. En tal caso, el primer factor no tendría solución real y en el segundo factor no se puede aplicar la propiedad en forma directa pero se puede calcular la raíz. Esto es,

- $\sqrt[6]{\left(-\frac{2}{5}\right)^9}$ no tiene solución en $\mathbb{R}$,
- $\sqrt[4]{\left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt[4]{(-1)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt[2\cdot 2]{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{5}}.$

El resultado de un cálculo que involucra potencias y raíces puede ser un número natural, entero, racional o irracional o no existir en $\mathbb{R}$ como lo muestran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.4.3

- $\sqrt{-2^{-2} + \frac{\sqrt[3]{12-20}}{4} + \sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^{-1}}} = \sqrt{-\frac{1}{2^2} + \frac{\sqrt[3]{-8}}{4} + \sqrt{9}} = \sqrt{-\frac{1}{4} - \frac{2}{4} + 3} = \frac{3}{2}$

  $\longrightarrow$ encontramos como resultado un número real que también es racional.

- $\sqrt[4]{(-2)^{-2} - \frac{5}{16}} = \sqrt[4]{\frac{1}{4} - \frac{5}{16}} = \sqrt[4]{-\frac{1}{16}}$

  $\longrightarrow$ no es posible resolver este cálculo en $\mathbb{R}$.

- $\sqrt[3]{2 - \left(\frac{11}{21} - \frac{1}{7}\right)^{-1}} = \sqrt[3]{2 - \frac{21}{8}} = \sqrt[3]{-\frac{5}{8}} = -\frac{\sqrt[3]{5}}{2}$

  $\longrightarrow$ encontramos como resultado un número real e irracional.

- $2\sqrt{3} - \left(\frac{1}{2\sqrt{3}-1}\right)^{-1} = 2\sqrt{3} - (2\sqrt{3}-1) = 1$

  $\longrightarrow$ es un número real que también es racional, entero y natural.

$\diamond$ $$-\sqrt{5^3-2\sqrt{-(-2)^3-2^2}} = -\sqrt{125-2\sqrt{-(-8)-4}} = -\sqrt{125-2\sqrt{8-4}}$$
$$= -\sqrt{125-2\sqrt{4}} = -\sqrt{125-2\cdot 2}$$
$$= -\sqrt{125-4} = -\sqrt{121} = -11$$

$\longrightarrow$ es un número real que también es racional y entero.

A partir de las definiciones de potenciación y radicación presentadas definimos la **potencia de exponente racional**:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Cuando usemos esta notación (es decir, esta forma de escribir las raíces como potencias fraccionarias) vamos a estar considerando la base $a \in \mathbb{R}, a > 0$ y $m, n \in \mathbb{N}$.

Podemos extender la definición anterior para exponentes racionales negativos:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

Las propiedades de la potenciación (P1), (P2), (P3) y (P4) son válidas para potencias de exponente racional siempre y cuando todos los términos existan.

Ejemplo 1.4.4

Si las bases son positivas, entonces todas las propiedades de potencia son válidas para cualquier exponente racional.

$$\frac{(3^{-1})^{-\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{3\cdot 5^3}}{\left(5^4\cdot\sqrt[4]{3^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3^{-1\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{3}{2}}}{5^{4\cdot\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2}}} = \frac{3^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{3}{2}}}{5^2\cdot 3^{\frac{1}{4}}} = 3^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{3}{2}-2} = 3^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Si alguna base es negativa, podemos usar propiedades siempre que el denominador del exponente racional sea impar.

$$\sqrt[5]{(-7)^{\frac{1}{3}}}\cdot(-7)^2\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)^{\frac{2}{5}} = (-7)^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}\cdot(-7)^2\cdot(-7)^{-\frac{2}{5}} = (-7)^{\frac{1}{15}+2-\frac{2}{5}} = (-7)^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{(-7)^5}.$$

Revisemos lo aprendido

1. Resolver las siguientes operaciones **sin usar calculadora**.
   (a) $-6\cdot 3^{-2}-(-5)^0\cdot[-9:(-3)]^{-1}$
   (b) $\left(3^2\right)^2-\left[(-2)^3\right]^2+\left(-5^2\right)$
2. Resolver cada cálculo aplicando propiedades, e indicar a qué conjuntos numéricos pertenece el resultado.

(a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^0$

(b) $\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(4^{-\frac{1}{2}} : \frac{2}{3}\right)$

(c) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2 : \sqrt[4]{3^{-1}}\right)^{\frac{4}{7}}$

1.5 Operaciones con radicales. Racionalización

Dentro del conjunto de los números irracionales ($\mathbb{I}$) encontramos números como

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{5}, \quad 2\sqrt{3}.$$

Recordamos, a continuación, cómo se resuelven operaciones con ellos.

Para sumar (o restar) números algebraicos debemos buscar un radical común si es que lo hay, si no, la expresión queda como estaba. Por ejemplo,

- ◇ $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$
- ◇ $\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
- ◇ $\sqrt{32} + \sqrt{200} = \sqrt{2^2.2^2.2} + \sqrt{2^2.5^2.2} = 2.2\sqrt{2} + 2.5\sqrt{2} = 4\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$

En este último caso, factorizamos los números dentro de cada raíz, y usamos la propiedad de la radicación (R1).

Para multiplicar y dividir radicales puede usarse la propiedad distributiva. Por ejemplo,

- ◇ $\sqrt{18}.\sqrt{2} = \sqrt{18.2} = \sqrt{36} = 6$
- ◇ $\sqrt{18} : \sqrt{2} = \sqrt{18 : 2} = \sqrt{9} = 3$
- ◇ $2.\sqrt{2}.\sqrt{3} = 2.\sqrt{2.3} = 2\sqrt{6}$
- ◇ $5.\sqrt{2}.3\sqrt{3} = 5.3.\sqrt{2.3} = 15\sqrt{6}$

En ciertas expresiones en las que intervienen raíces es conveniente transformar el numerador o el denominador en un número entero o racional. A este proceso lo llamamos **racionalización**.

Antes de mostrar cómo racionalizamos, recordemos dos fórmulas, que estudiaremos con más detalle en el siguiente bloque temático, pero que son de utilidad en estos casos. Ambas se demuestran aplicando la propiedad distributiva.

- *Cuadrado de un binomio.*

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + 2ab + b^2.$$

- *Diferencia de cuadrados.*

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2.$$

Los siguientes ejemplos muestran cómo racionalizar expresiones simples en las que tenemos solo una raíz cuadrada en el denominador.

- ◇ $\frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5} = \frac{6}{5}\sqrt{5}.$

◇ $\dfrac{2-\sqrt{13}}{\sqrt{3}} = \dfrac{(2-\sqrt{13})\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{13\cdot 3}}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{39}}{3}.$

◇ $\dfrac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \dfrac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{3^2\cdot 2}} = \dfrac{3+\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}+2}{6} = \dfrac{3}{6}\sqrt{2}+\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}+\dfrac{1}{3}.$

Es importante recordar que al multiplicar por un mismo número el numerador y el denominador de una expresión racional, esta expresión no cambia. Vimos esta propiedad en la **Sección 1.3**, antes del apartado **Algo más sobre números racionales**.

Ahora, ¿cómo cambia la situación si la raíz del denominador es cúbica? Si bien en las actividades solo se racionalizarán raíces cuadradas, presentamos este ejemplo a modo ilustrativo dado que la estrategia es similar a la presentada en el caso anterior. Para que una raíz cúbica se simplifique debemos multiplicar numerador y denominador por el cuadrado de dicha raíz.

$$\frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\left(5+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{\sqrt[3]{2}\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^2} = \frac{5\cdot\sqrt[3]{4}+\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{4}}{2}.$$

Ejemplo 1.5.1

Veamos ahora dos casos en los que tenemos en el denominador una suma (o resta) con raíces. La estrategia es la misma en ambos casos: obtener una diferencia de cuadrados en el denominador.

1. $$\begin{aligned} \frac{3\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-2} &= \frac{(3\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}+2)}{(\sqrt{2}-2)\cdot(\sqrt{2}+2)} \\ &= \frac{3(\sqrt{2})^2-\sqrt{2}+2\cdot 3\sqrt{2}-2}{(\sqrt{2})^2-2^2} \\ &= \frac{6+5\sqrt{2}-2}{2-4} \\ &= \frac{4+5\sqrt{2}}{-2} = -2-\frac{5}{2}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} &= \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})} \\ &= \frac{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{3-2\sqrt{6}+2}{3-2} \\ &= 5-2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Revisemos lo aprendido

1. Efectuar las siguientes operaciones e indicar a qué conjuntos numéricos pertenece el resultado.

   (a) $-2\sqrt{8}+4\sqrt{72}-5\sqrt{32}$

   (b) $\dfrac{3+\sqrt{2}}{4}-\dfrac{3+3\sqrt{2}}{4}$

   (c) $-\sqrt{3}-5-2\cdot\left(3-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

   (d) $\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)^2$

2. Racionalizar las siguientes expresiones.

   (a) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ (b) $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ (c) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ (d) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}$

1.6 Logaritmos, aproximaciones y notación científica

Cálculo de logaritmos. El número e.

Cuando presentamos los números irracionales en la **Sección 1.1**, pusimos como ejemplos números que se obtienen a partir del cálculo de logaritmos. Si bien este no es un tema que abordaremos con detalle en este curso, recordemos la definición

$$\log_a b = c \quad \Longleftrightarrow \quad a^c = b.$$

Esto se lee: *el* **logaritmo** *en base a de b es c si y solo si a elevado a la c es b.* Entonces tenemos:

- $\log_2 8 = 3$, pues $2^3 = 8$.
- $\log_{10} 100 = 2$, pues $10^2 = 100$.

Cuando escribimos ln en lugar de log, estamos considerando como base el número irracional e. A este logaritmo se lo llama **logaritmo natural**. Así, por ejemplo,

$$\ln\sqrt{e} = \log_e \sqrt{e} = \frac{1}{2} \text{ porque } e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

Uso de calculadora

En la calculadora, así como tenemos teclas para calcular raíces, encontramos una tecla para calcular logaritmos en base 10 (tecla *log*) y otra para logaritmos naturales (tecla *ln*). También existe una tecla para calcular potencias de e (tecla e, o *Exp*, dependerá de las calculadoras). En algunas calculadoras, para obtener el número e hay que calcular la potencia e^1.

Números y aproximaciones

En algunas situaciones, necesitamos aproximar números para hacer los cálculos más manejables, para comparar cantidades, comunicar un resultado de manera efectiva y reflejar la realidad. Por ejemplo, es más claro decir

Aproximadamente, hay 8 mil millones de personas en el mundo,

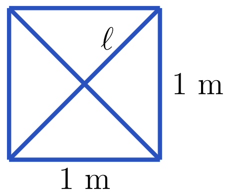
que decir

Hay 7.901.236.146 personas en el mundo.

También, si se comparan dos precios, puede ser más útil redondear los números para ver claramente cuál es mayor o menor.

Además, en el mundo real, rara vez se puede medir o calcular algo con precisión infinita. Por ejemplo, si queremos comprar varillas de madera para armar la estructura de la figura, el Teorema de Pitágoras nos indica que cada varilla de las diagonales debe medir

$$\ell = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ m}$$



Claramente, no podemos cortar una varilla de esa longitud exacta. Necesitamos un valor aproximado. Así, la aproximación de números refleja mejor la realidad de las mediciones y los cálculos prácticos.

Para aproximar números racionales o irracionales se pueden **truncar** las cifras decimales o **redondear** el número. Recordamos estos dos procedimientos a partir de un ejemplo concreto.

Realizamos la división $147 : 64 = 2{,}296875$, y a la expresión que obtenemos la llamamos **expresión decimal** del número. Para aproximar el resultado a los centésimos, esto es, el segundo lugar después de la coma decimal, podemos

- truncar (esto es, borrar) los restantes decimales, obteniéndose
$$2{,}29\cancel{6875} \longrightarrow 147 : 64 \approx 2{,}29.$$
- redondear, resultando
$$2{,}29\mathbf{6}875 \to 147 : 64 \approx 2{,}30.$$
Al redondear a un cierto dígito, si el decimal que sigue (en este caso el 6) es mayor o igual que 5, al dígito se le suma 1; si es menor, el dígito queda igual.

De la misma manera, podemos aproximar los siguientes números reales.

- ◇ Redondear a los milésimos el número $\ln(3) = 1{,}098612289...$ dará como resultado $1{,}099$.
- ◇ Truncar a los milésimos el número $\log(12) = 1{,}079181246...$ dará como resultado $1{,}079$.

Observar que, para el último número, redondear o truncar a los milésimos nos da el mismo resultado debido a que el cuarto decimal es menor a 5.

Como se explicó anteriormente, las aproximaciones son esenciales para comunicar los resultados de problemas en contextos reales, como los de la vida cotidiana. A continuación, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.6.1

Un alimento para mascota tiene el 26,4% de proteína. Si servimos una ración de 154 gramos ¿cuántos gramos de proteína tendrá?

Para calcular los gramos de proteína que tendrá la ración debemos calcular el 26,4% de 154 gramos. Esto es,

$$154 \cdot \frac{26,4}{100} = 40,656.$$

Así, podemos decir que 154 gramos de alimento contendrán aproximadamente 41 gramos de proteína.

Revisemos lo aprendido

1. Utilizar la calculadora para obtener la expresión decimal de los siguientes números, escribirlos utilizando redondeo a los centésimos.

   (a) $\log(28)$ (b) $(2,4)^5$ (c) $\sqrt[3]{2}$ (d) 3π

2. Utilizar la calculadora para obtener la expresión decimal de los siguientes números, escribirlos utilizando truncamiento a los centésimos.

   (a) $2\sqrt{3}$ (b) $\dfrac{3}{\sqrt[5]{6}}$ (c) $\ln(8)$ (d) e^2

3. Ordenar en forma creciente los números obtenidos en los ejercicios anteriores.

4. Si el mes pasado el precio del arroz era de $\$3475,25$ y para el mes próximo se estima un aumento del 15%. ¿Cuál será el nuevo precio? Redondear el resultado a los décimos.

Notación científica

La representación en notación científica de un número **no nulo** tiene la forma

$$a \times 10^b$$

donde a es un número formado por su signo ($+$ o $-$) seguido de un valor entre 1 y 10 (puede ser 1 pero no llega a ser 10), y b es un número entero. Veamos los siguientes ejemplos:

- $331.000 = 3,31 \times 10^5 \longrightarrow a = 3,31$ y $b = 5$,
- $15.000 = 1,5 \times 10^4 \longrightarrow a = 1,5$ y $b = 4$,
- $-0,001002 = -1,002 \times 10^{-3} \longrightarrow a = -1,002$ y $b = -3$,
- $0,00007628 = 7,628 \times 10^{-5} \longrightarrow a = 7,628$ y $b = -5$.

Observemos que las potencias positivas de 10 nos permiten expresar cantidades grandes (mayores que 1), y las negativas se utilizan para representar cantidades chicas (menores que 1). Para representar un número en notación científica, llevaremos la coma decimal *inmediatamente* después del primer dígito no nulo.

Como dijimos, todas las cantidades, cuando las escribimos en notación científica, se expresan como un número multiplicando a una potencia de base 10. La clave es: *¿Por qué multiplicamos por una potencia de base 10?* Porque multiplicar por una potencia de base 10 nos permite desplazar la coma:

- Hacia la derecha ($\longrightarrow$), cuando el exponente de la base 10 es positivo.
  - ◇ $75 \times 10 = 750$ (corremos la coma de 75,0 un lugar hacia la derecha)
  - ◇ $75 \times 100 = 75 \times 10^2 = 7500$ (corremos la coma de 75,0 dos lugares hacia la derecha)
  - ◇ $35,69 \times 10 = 356,9$ (corremos la coma un lugar hacia la derecha)
  - ◇ $35,69 \times 100 = 35,69 \times 10^2 = 3569$ (corremos la coma dos lugares hacia la derecha)
- Hacia la izquierda ($\longleftarrow$), cuando el exponente de la base 10 es negativo.
  - ◇ $75 \times 10^{-1} = 75 : 10 = 7,5$ (corremos la coma de 75,0 un lugar hacia la izquierda)
  - ◇ $75 \times 10^{-2} = 75 : 100 = 0,75$ (corremos la coma de 75,0 dos lugares hacia la izquierda)
  - ◇ $35,69 \times 10^{-1} = 3,569$ (corremos la coma un lugar hacia la izquierda)
  - ◇ $35,69 \times 10^{-2} = 35,69 : 100 = 0,3569$ (corremos la coma dos lugares hacia la izquierda)

Uso de calculadora

Las calculadoras tienen un modo que permite trabajar con números expresados en notación científica. Su activación y uso dependen de la calculadora, por lo que sugerimos buscarlo e intentar usarlo para familiarizarse con la herramienta.
De todas formas, sin usar este modo particular, es posible hacer operaciones entre números en notación científica simplemente ingresándolos como los vemos. El resultado no estará dado en notación científica, por lo que habrá que convertirlo si eso se desea. Por ejemplo, si ingresamos en la calculadora $5 \times 10^4 + 10^5$, resulta

$$5 \times 10^4 + 10^5 = 150.000.$$

Este resultado, en notación científica es $1,5 \times 10^5$.

La notación científica es de utilidad para resolver o comunicar la solución de algunos problemas. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.6.2

Sabiendo que el peso aproximado de un átomo de oro es de $3,27 \times 10^{-22}$ gramos. ¿Cuántos miligramos pesan 1.000.000.000.000.000 átomos?

Para poder dar la respuesta, debemos multiplicar el peso de un átomo de oro por la cantidad de átomos que nos preguntan el peso, esto es,

$$3,27 \times 10^{-22} \cdot 1.000.000.000.000.000 = 3,27 \times 10^{-22} \cdot 10^{15} = 3,27 \times 10^{-7}$$

Respuesta: Esa cantidad de átomos de oro pesa $3,27 \times 10^{-7}$ gramos.

Revisemos lo aprendido

1. Expresar los siguientes números usando notación científica.

   (a) 19.000 (b) $0,002$ (c) $0,351$ (d) 750.000

2. Pasar los siguientes números a notación decimal.

   (a) $5,64 \times 10^4$ (b) $1,52 \times 10^{-3}$ (c) $5,512 \times 10^3$ (d) $2,25 \times 10^{-2}$

3. La cantidad normal de glóbulos rojos en una persona adulta es entre 2×10^{13} y $2,6 \times 10^{13}$. Florencia se hizo un análisis de sangre y detectaron que tiene 4 millones y medio de glóbulos rojos por cada milímetro cúbico de sangre. Suponiendo que Florencia tiene 5 litros de sangre, ¿están sus glóbulos rojos dentro del rango normal? (Nota: $1\text{mm}^3 = 1 \times 10^{-6}$ litros).

2 Álgebra

Síntesis del bloque temático

En esta unidad vamos a estudiar distintas expresiones algebraicas y algunas operaciones definidas entre ellas. Los principales conceptos que desarrollaremos son los siguientes.

1. Definición de expresión algebraica y operaciones elementales (suma, resta y multiplicación).
2. Factorización y simplificación de expresiones algebraicas.
3. Polinomios: elementos (grado, coeficientes, raíces), operaciones, regla de Ruffini.
4. Resolución de distintos tipos de ecuaciones e inecuaciones.
5. Planteo y resolución de problemas usando ecuaciones e inecuaciones.

2.1 Expresiones algebraicas. Operaciones

Las expresiones matemáticas en las cuales se combinan números, letras y operaciones se denominan **expresiones algebraicas**. Una expresión algebraica permite expresar una relación o una operación entre distintos valores numéricos pero de manera general. Las fórmulas, las ecuaciones y los polinomios se presentan a partir de expresiones algebraicas. Por ejemplo,

$$2ab^2 - 3a + b^3$$

es una expresión algebraica. Los números 2, -3 y 1 son los **coeficientes** de los términos ab^2, a y b^3, que forman la **parte literal** de la expresión.

Las expresiones algebraicas nos permiten formalizar (esto es, expresar en lenguaje matemático) expresiones dadas en lenguaje coloquial. Para esto, los elementos claves en la expresión coloquial los representamos con letras, y las operaciones matemáticas nos permiten expresar las relaciones entre ellos. Por ejemplo, en la frase

El 70% de las exportaciones del país corresponden a granos.

Podemos llamar E a la cantidad de exportaciones, y así representar matemáticamente

$$\text{70\% } \textit{de las exportaciones} \qquad \longleftrightarrow \qquad \frac{70}{100}E.$$

Usamos el símbolo $\longleftrightarrow$ para indicar que asociamos la expresión coloquial con la expresión simbólica. Si además llamamos G a la cantidad de granos que se exportan, la frase dada en forma coloquial puede expresarse matemáticamente como la igualdad

$$\frac{70}{100}E = G.$$

Este tipo de expresiones coloquiales aparecen en los enunciados de problemas, por lo que es de gran importancia entender la información dada en lenguaje coloquial y saber transcribirla al lenguaje simbólico para un adecuado planteo matemático de las situaciones que se nos presenten. La siguiente tabla muestra más ejemplos de cómo asociar ciertas expresiones coloquiales con expresiones matemáticas.

Lenguaje coloquial	Lenguaje simbólico	Asociación parte literal $\longleftrightarrow$ objeto
La tercera parte de los votantes	$\frac{1}{3}v$	v: cantidad de votantes
El siguiente de un número entero	$k+1$	k: número entero
Tres números naturales consecutivos	$n, n+1, n+2$	n: número natural
El triple de un número real	$3x$	x: número real

En una expresión algebraica, llamamos **términos semejantes** a aquellos términos que tienen las mismas letras con las mismas potencias (es decir, la misma parte literal). Así, $4pq^3$ y $-2q^3p$ son términos semejantes, mientras que $-2ab^2$ y $3a^2b$ no lo son.

La **suma** de dos expresiones algebraicas se realiza sumando los coeficientes de los términos semejantes. Así, por ejemplo,

$$3x^2y^3 - 8x^2y^3 = -5x^2y^3,$$

y para más términos hacemos

$$\begin{aligned} 3xy^2 - y^3 + 4y^3 - 6xy^2 &= 3xy^2 - 6xy^2 - y^3 + 4y^3 \\ &= -3xy^2 + 3y^3. \end{aligned}$$

Algunos ejemplos más:

- ◇ $2a^2b + ab + 3ba - 6a^2b = -4a^2b + 4ab$,
- ◇ $1 - xy + 2x - 3 + 4x - xy = -2 - 2xy + 6x$.

La **multiplicación** de expresiones algebraicas se realiza aplicando la propiedad distributiva, haciendo uso de las propiedades de la potenciación y por último sumando los términos semejantes. Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned} -5a(a-2b) &= -5a \cdot a + (-5a) \cdot (-2b) \\ &= -5a^2 + 10ab, \end{aligned}$$

y para expresiones de dos términos, hacemos

$$\begin{aligned} (3a-b)(4a+b) &= 3a \cdot 4a + 3a \cdot b + (-b) \cdot 4a + (-b) \cdot b \\ &= 12a^2 + 3ab - 4ab - b^2 \\ &= 12a^2 - ab - b^2. \end{aligned}$$

En los ejemplos anteriores usamos el punto como símbolo para hacer explícita la operación de multiplicación. En general este símbolo no se utiliza, como vemos en los siguientes ejemplos:

- $(2xy+3)^2 = (2xy+3)(2xy+3) = 4x^2y^2 + 6xy + 6xy + 9 = 4x^2y^2 + 12xy + 9,$
- $(b-3ab)\left(2a+\dfrac{3}{2}\right) = 2ab + \dfrac{3}{2}b - 6a^2b - \dfrac{9}{2}ab = -\dfrac{5}{2}ab + \dfrac{3}{2}b - 6a^2b,$
- $(x^2+2y)(y-3x^2) = x^2y - 3x^4 + 2y^2 - 6x^2y = -5x^2y - 3x^4 + 2y^2.$

Revisemos lo aprendido

1. Leer la siguiente información. Para los elementos que sea posible, dar una expresión simbólica, eligiendo adecuadamente letras para representar los objetos involucrados.
   (a) Este año, la recaudación de fondos fue el doble de la del año pasado.
   (b) En la clase de Historia Contemporánea, dos tercios de las mujeres y la mitad de los hombres están estudiando algún idioma.
   (c) El promedio entre tres números se calcula como la suma de los mismos dividida por 3.
   (d) La velocidad media a la que se trasladó un vehículo se calcula como la distancia recorrida dividida por el tiempo que le llevó recorrerla.

2. Resolver las siguientes sumas y multiplicaciones entre expresiones algebraicas, aplicando la propiedad distributiva, propiedades de la potenciación y agrupando todos los términos que sea posible.

   (a) $2a - 4ab + a - 3a + 2ab$
   (b) $3xy - \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{4}{3}xy$
   (c) $a(a-3) - 5(2a - a^2)$
   (d) $\left(\dfrac{3}{2}-x\right)\left(\dfrac{3}{2}+x\right) + \dfrac{1}{2}x^2$
   (e) $\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2 - \dfrac{1}{2}x(x-1)$

Factorización

Factorizar una expresión algebraica consiste en expresarla como producto de nuevas expresiones más simples. En esta sección presentamos solo algunos casos de factorización. A medida que avancemos con la revisión de contenidos, veremos otras herramientas que nos permiten factorizar una expresión algebraica.

1. *Factor común.*

   En la expresión $ab^2 + 2a^2b^2 - 3ab^3$, el factor ab^2 aparece en todos los términos, por lo que podemos expresar
   $$ab^2 + 2a^2b^2 - 3ab^3 = ab^2 \cdot (1 + 2a - 3b).$$
   En el siguiente ejemplo, el factor común es $2a^2b$
   $$2a^3b - 6a^2b^4 + 8a^3b^2 = 2a^2b \cdot (a - 3b^3 + 4ab).$$

2. *Trinomio cuadrado perfecto* $\longleftrightarrow$ *Cuadrado de un binomio.*

   La forma general de un trinomio cuadrado perfecto es

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2.$$

   Verificamos que estas expresiones son equivalentes aplicando propiedad distributiva

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

   Por ejemplo, podemos factorizar los siguientes trinomios,

   - $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$,
   - $25x^2y^4 + 10xy^2 + 1 = (5xy^2 + 1)^2$.

   Sin embargo, el trinomio $m^2 - 2mn + 9n^2$ no es un trinomio cuadrado perfecto.

3. *Diferencia de cuadrados* $\longleftrightarrow$ *Suma por diferencia.*

   La forma general de una diferencia de cuadrados es

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b).$$

   Veamos que efectivamente estas expresiones son iguales

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 \cancel{- ab + ba} - b^2 = a^2 - b^2.$$

   Por ejemplo, podemos factorizar

   - $25x^2 - y^2 = (5x + y) \cdot (5x - y)$,
   - $3 - p^2 = (\sqrt{3} - p)(\sqrt{3} + p)$.

Revisemos lo aprendido

1. Reconociendo el factor común a todos los términos de cada expresión, factorizar las siguientes expresiones.

   (a) $9a^5 + 3a^3$

   (b) $\dfrac{x^3}{4} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{9x}{16}$

   (c) $5a^3b^2 - 10a^5b^2 + 15a^6b^5$

   (d) $\dfrac{5}{2}m^5n^3 - \dfrac{1}{2}m^3n + \dfrac{1}{8}m^3n$

2. Expresar los siguientes trinomios como cuadrado de un binomio.

   (a) $x^2 + 10x + 25$ (b) $q^2 - 6pq + 9p^2$ (c) $4y^4 + 9 - 12y^2$

3. Factorizar las siguientes diferencias de cuadrados.

   (a) $x^2 - 9$ (b) $y^2 - 25\,m^2$ (c) $144\,p^6 - \dfrac{1}{121}q^4$

2.2 Ecuaciones

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas en las que aparece un valor desconocido llamado **incógnita**. Resolver una ecuación significa encontrar, si existe, el valor de esta incógnita, es decir, un valor real que hace verdadera la igualdad. Por ejemplo, $3x = 18$ es una ecuación con incógnita x. Su solución es $x = 6$ pues si reemplazamos x por 6 obtenemos la igualdad $3 \cdot 6 = 18$.

Las ecuaciones pueden no tener solución, o bien tener una, varias o infinitas soluciones.

Al resolver ecuaciones, hablamos de *despejar la incógnita*, y al decir esto entendemos que *pasamos números de un lado al otro de la igualdad usando operaciones inversas*: si un número está multiplicando, lo pasamos dividiendo; si un número está restando, lo pasamos sumando. Este lenguaje informal que usamos para recordar el método de resolución, se fundamenta matemáticamente. Lo que hacemos al resolver una ecuación es aplicar propiedades de los números reales. Dos de ellas son

(1) *Propiedad uniforme de la suma.* Sean a, b y $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$a = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a + c = b + c.$$

(2) *Propiedad uniforme de la multiplicación.* Sean a, b, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Entonces

$$a = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \cdot c = b \cdot c.$$

Así, por ejemplo,

- La primera propiedad nos permite resolver

$$\overbrace{x+7}^{a} = \overbrace{2}^{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \overbrace{x+7}^{a} + \overbrace{(-7)}^{c} = \overbrace{2}^{b} + \overbrace{(-7)}^{c} \quad \Longleftrightarrow \quad x = -5.$$

  Esto es lo que informalmente nombramos como: *dado que 7 está sumando, pasa al otro lado restando.* Matemáticamente, lo que estamos haciendo es sumar -7 a ambos miembros de la igualdad.

- La propiedad de monotonía del producto nos permite resolver

$$\overbrace{6x}^{a} = \overbrace{10}^{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \overbrace{\cancel{6}x}^{a} \cdot \overbrace{\cancel{6^{-1}}}^{c} = \overbrace{10}^{b} \cdot \overbrace{6^{-1}}^{c} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

  Esto es lo que informalmente nombramos como: *dado que 6 está multiplicando, pasa al otro lado dividiendo.* Matemáticamente, lo que estamos haciendo es multiplicar por el inverso de 6 a ambos miembros de la igualdad.

Estos procedimientos no son más que la justificación formal de lo que habitualmente se hace al resolver ecuaciones.

Ejemplo 2.2.1

Veamos tres ejemplos que ilustran las distintas situaciones que podemos encontrar.

1. Resolviendo la siguiente ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} 2\left(1-5x^3\right) &= \frac{2x^3+5}{7} \\ 2-10x^3 &= \frac{2}{7}x^3+\frac{5}{7} \\ 2-\frac{5}{7} &= 10x^3+\frac{2}{7}x^3 \\ \frac{9}{7} &= \frac{72}{7}x^3 \\ \frac{9}{7}\cdot\frac{7}{72} &= x^3 \\ \frac{1}{8} &= x^3. \end{aligned}$$

El único número real que elevado al cubo da como resultado $\frac{1}{8}$ es $x=\frac{1}{2}$. Encontramos así que esta ecuación tiene una **única solución** en $\mathbb{R}$.

2. Al operar algebraicamente sobre la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} 2\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}x &= 7-\frac{5}{2}(4-x) \\ 2x-3+\frac{1}{2}x &= 7-10+\frac{5}{2}x \\ \frac{5}{2}x-3 &= -3+\frac{5}{2}x \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

encontramos que esta ecuación es **válida para cualquier valor de** $x\in\mathbb{R}$, así la solución es el conjunto $\mathbb{R}$.

3. La siguiente es una ecuación que **no tiene solución en** $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (p+3)^2-3p &= 3p \\ p^2+6p+9-3p &= 3p \\ p^2 &= -9. \end{aligned}$$

Si $p\in\mathbb{R}$ entonces se tiene $p^2\geqslant 0$. Es decir, no existe $p\in\mathbb{R}$ tal que $p^2=-9$, por lo que concluimos que esta ecuación no tiene solución en $\mathbb{R}$.

Una vez resuelta una ecuación podemos **verificar** si la solución encontrada es la correcta. Para esto, al reemplazar con el valor hallado en cada miembro de la ecuación (la ecuación original, sin haberle hecho ningún despeje) debe resultar una identidad.

Ejemplo 2.2.2

Tenemos que $x=\frac{1}{2}$ es solución de la ecuación del primero de los ejemplos anteriores. Para saber si la solución es correcta reemplazamos este valor en ambos miembros de la ecuación

. Por un lado

$$2\left[1-5\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]=2\left(1-\frac{5}{8}\right)=\frac{3}{4}.$$

Mientras que por otro lado

$$\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^3+5}{7}=\frac{\frac{1}{4}+5}{7}=\frac{\frac{21}{4}}{7}=\frac{3}{4}.$$

Como obtuvimos el mismo resultado al reemplazar en cada miembro de la ecuación, concluimos que la solución encontrada es correcta.

Revisemos lo aprendido

Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas.

1. $x=-\frac{1}{2}$ es solución de $2x^3-2x-1=x^2$.
2. La ecuación $2x-3(x-1)=1-x$ tiene infinitas soluciones.
3. $x=1$ es una solución de $\frac{3}{2}x+1=\frac{3}{2}(x-1)+\frac{5}{2}$
4. La ecuación $3(x+1)-2=5x-3-2(x-2)$ no tiene solución.

Ecuaciones lineales y cuadráticas

Las **ecuaciones lineales** son aquellas en las que la incógnita aparece únicamente con potencia 1. La ecuación 2 del Ejemplo 2.2.1 muestra un caso particular de una ecuación lineal con infinitas soluciones. Las otras dos situaciones que pueden encontrarse se ilustran en los siguientes ejemplos:

- ◇ $2x-3=1-x$ tiene una única solución: $x=\frac{4}{3}$.
- ◇ $x+\sqrt{3}=x$ no tiene solución.

Veamos otro ejemplo para repasar el procedimiento de resolución.

Ejemplo 2.2.3

Resolvamos paso a paso, prestando mucha atención a las reglas de signo y al uso de la propiedad distributiva.

$$\begin{aligned} 3x-\frac{2x+3}{3}=\frac{2-7x}{6} \quad \Longleftrightarrow \quad 3x-\frac{2}{3}x-\frac{3}{3} &= \frac{2}{6}-\frac{7}{6}x \\ 3x-\frac{2}{3}x+\frac{7}{6}x &= \frac{1}{3}+1 \\ \frac{18x-4x+7x}{6} &= \frac{4}{3} \\ \frac{21}{6}x &= \frac{4}{3} \\ x &= \frac{4}{3}:\frac{7}{2}=\frac{8}{21} \end{aligned}$$

La ecuación tiene como única solución $x=\frac{8}{21}$.

Atención: la solución es exactamente $\frac{8}{21}$. No es correcto dar un valor aproximado de esta fracción si lo que se nos pide es *buscar la solución de la ecuación.* Sólo damos valores aproximados en el contexto de problemas concretos, cuando la incógnita representa un objeto de la vida cotidiana.

Las **ecuaciones cuadráticas** pueden expresarse de la forma

$$ax^2+bx+c=0, \quad a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0.$$

El valor $\Delta=b^2-4ac$ se llama **discriminante** de la ecuación cuadrática, y nos indica la cantidad de soluciones que tiene esta ecuación en el conjunto de los números reales.

- Si $\Delta>0$, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
- Si $\Delta=0$, la ecuación tiene una única solución real.
- Si $\Delta<0$, la ecuación no tiene solución en los reales.

Existe una fórmula resolvente para esta ecuación, válida siempre y cuando $\Delta\geqslant 0$. Las soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ están dadas por

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Observemos que si $\Delta=0$, resulta que $x_1=x_2$, y así es que en este caso encontramos una única solución real.

Si existen soluciones x_1,x_2 de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, entonces podemos expresar el miembro de la izquierda en forma factorizada

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Es decir, esta fórmula nos permite factorizar cierto tipo de expresiones: aquellas que tengan la forma ax^2+bx+c.

Notemos que:

- Si $x_1=x_2$, encontramos un *trinomio cuadrado perfecto*: $a(x-x_1)^2=a(x^2-2x_1x+x_1^2)$.
- Si $x_1=-x_2$, encontramos una *diferencia de cuadrados*: $a(x-x_1)(x+x_1)=a(x^2-x_1^2)$.

Ejemplo 2.2.4

Consideremos la ecuación $3x^2 + 3x - 6 = 0$. En este caso $a = 3, b = 3, c = -6$, y el discriminante es

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6) = 81 > 0.$$

Luego esta ecuación tiene dos soluciones reales distintas dadas por

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{81}}{2 \cdot 3} = 1, \qquad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{81}}{2 \cdot 3} = -2.$$

Así, podemos también dar una factorización de la expresión $3x^2 + 3x - 6$,

$$3x^2 + 3x - 6 = 3(x-1)(x-(-2)) = 3(x-1)(x+2).$$

A las ecuaciones cuadráticas no siempre las encontramos en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, en la que se identifican los coeficientes a, b y c necesarios para la fórmula resolvente. En algunos casos debemos agrupar términos antes de definir los coeficientes que usaremos en la fórmula. Por ejemplo,

$$\begin{array}{rcll} (2x+1)^2 & = & x+1 & \longrightarrow \quad \text{es una ecuación cuadrática,} \\ 4x^2 + 4x + \cancel{1} & = & x + \cancel{1} & \\ 4x^4 + 3x & = & 0 & \longrightarrow \quad a = 4,\ b = 3,\ c = 0. \end{array}$$

Observación 5
Las soluciones de la ecuación cuadrática y la forma factorizada de la expresión algebraica correspondiente nos serán de utilidad para resolver inecuaciones mediante el estudio de signos, para encontrar la factorización de polinomios de segundo grado, y también en el estudio de la función cuadrática.

Ejemplo 2.2.5

La ecuación

$$x^4 - 11x^2 + 18 = 0$$

puede resolverse usando lo visto para ecuaciones cuadráticas. Si llamamos $x^2 = u$ resulta que $x^4 = (x^2)^2 = u^2$ y así la ecuación planteada se transforma en

$$u^2 - 11u + 18 = 0.$$

Esta es una ecuación cuadrática con incógnita u. Resolvemos esta ecuación con la fórmula presentada anteriormente. Para este caso,

$$a = 1,\ b = -11,\ c = 18 \quad \Longrightarrow \quad \Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 49 > 0,$$

y encontramos dos soluciones

$$u_1 = \frac{11+\sqrt{49}}{2} = 9, \qquad u_2 = \frac{11-\sqrt{49}}{2} = 2.$$

Para hallar las soluciones x de la ecuación inicial, recordemos que llamamos $x^2 = u$ y así

$$\begin{array}{lllll} u_1 = 9 & \Longrightarrow & x^2 = 9 & \Longrightarrow & x_1 = 3, \quad x_2 = -3 \\ u_2 = 2 & \Longrightarrow & x^2 = 2 & \Longrightarrow & x_3 = \sqrt{2}, \quad x_4 = -\sqrt{2}. \end{array}$$

De esta manera, encontramos cuatro soluciones $x_1 = 3,\ x_2 = -3,\ x_3 = \sqrt{2},\ x_4 = -\sqrt{2}$ de la ecuación inicial.

Ecuaciones como las del ejemplo anterior reciben el nombre de **ecuaciones bicuadráticas**. La estrategia de sustituir la incógnita por una nueva expresión suele ser muy útil en diversos casos. Veremos más ejemplos al estudiar raíces de polinomios.

Un caso de interés es aquel en el que tenemos una expresión factorizada e igualada a cero. Este tipo de ecuaciones se resuelve teniendo en cuenta la **Observación 2**.

Ejemplo 2.2.6

Resolvamos la ecuación $(x-3)(2-3x+x^2) = 0$. Por la **Observación 2** sabemos que

$$(x-3)(2-3x+x^2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x-3=0 \quad \text{ó} \quad 2-3x+x^2 = 0.$$

La primera de estas ecuaciones tiene por solución $x_1 = 3$. La segunda es una ecuación cuadrática con discriminante $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 > 0$, es decir que existen dos soluciones reales,

$$x_2 = \frac{3+\sqrt{1}}{2} = 2 \qquad x_3 = \frac{3-\sqrt{1}}{2} = 1.$$

De esta forma, la ecuación inicial tiene tres soluciones, $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1$.

Revisemos lo aprendido

1. Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas.
   (a) La ecuación $x^2 - 2 = 0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$.
   (b) La única solución de $x^2 - x = 0$ es $x = 0$.
   (c) Las soluciones de $(x^2+4x+4)(3x-1) = 0$ son $x = -2$ y $x = \frac{1}{3}$.
2. Resolver las siguientes ecuaciones.
   (a) $2(x-1) = 3 - x$,
   (b) $\dfrac{x-1}{4} - 2 = \dfrac{3-2x}{2}$,
   (c) $x^2 - x = -\dfrac{2}{3}(x-1)$
   (d) $(x^4 - 3x^2 + 2)(3x+4) = 0$.

Planteo y resolución de problemas

Como mencionamos al inicio de esta unidad, las expresiones algebraicas nos permiten dar forma matemática (simbólica) a información dada en lenguaje coloquial. De esta forma, es posible resolver problemas reconociendo la información relevante de un enunciado y, mediante el uso de expresiones algebraicas, podemos plantear y resolver ecuaciones adecuadas.

Ejemplo 2.2.7

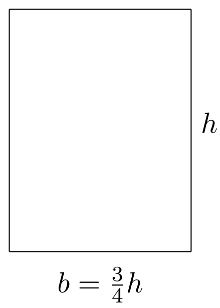
En un rectángulo, la base mide las tres cuartas partes de lo que mide su altura. Sabiendo que el perímetro es de 28 cm, ¿cuáles son las medidas de la base y de la altura?

Algunas reflexiones para iniciar la resolución:

- ▷ El problema trata de un *rectángulo*, del cual nos dan el *perímetro* y una *relación entre la base y la altura* $\longrightarrow$ necesitamos saber cómo se calcula el perímetro del rectángulo conociendo su base y su altura.
- ▷ Hay dos incógnitas que debemos encontrar: la base (la llamamos b) y la altura (la llamamos h).
- ▷ La base mide las tres cuartas partes de lo que mide su altura: $b = \frac{3}{4}h$.
- ▷ El perímetro se calcula como $P = 2b + 2h$, y sabemos que es igual a 28 cm.

Podemos volcar la información en un dibujo y plantear:

$$28 = P = 2b + 2h = 2\left(\frac{3}{4}h\right) + 2h = \frac{3}{2}h + 2h = \frac{7}{2}h$$



De esta ecuación podemos despejar el valor de h:

$$28 = \frac{7}{2}h \longrightarrow h = \frac{2}{7} \cdot 28 = 8$$

Usando la relación entre la base y la altura, encontramos $b = \frac{3}{4}h = \frac{3}{4}\cdot = 6$. De esta forma encontramos que la base del rectángulo mide 6 cm y su altura mide 8 cm.

Ejemplo 2.2.8

Ana, Marcos y Ariel compraron un regalo para su madre. Ana paga las dos quintas partes del costo del regalo, Marcos aporta la tercera parte de lo que resta pagar y Ariel colabora con los \$ 108 faltantes. ¿Cuánto aportó Ana? ¿Cuánto costó el regalo?

Si llamamos x al precio del regalo, tenemos la ecuación

$$\underbrace{x}_{\text{costo total}} = \underbrace{\frac{2}{5}x}_{\text{pagó Ana}} + \underbrace{\frac{1}{3}\left(x - \frac{2}{5}x\right)}_{\text{pagó Marcos}} + \underbrace{108}_{\text{pagó Ariel}}.$$

Resolvemos para obtener el valor de x

$$x - \frac{2}{5}x - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}x = 108 \iff \frac{2}{5}x = 108 \iff x = 270.$$

Encontramos así que el regalo costó \$ 270. Ana aportó $\frac{2}{5}$ del total de \$ 270, es decir, \$ 108.

Un punto importante al momento de resolver problemas es que la solución debe tener sentido en el contexto del mismo. Por ejemplo, si el problema trata de encontrar una cierta cantidad de dinero y como resultado de nuestro desarrollo matemático encontramos que esa cantidad de dinero es $\frac{79}{3}$, no podemos dar como respuesta este valor encontrado pues no tiene ningún sentido en el contexto real. En tales casos debemos aproximar el valor encontrado a un número que sí pueda ser considerado como solución.

Ejemplo 2.2.9

Tomemos el siguiente titular, aparecido en un diario local a inicios del año 2023(*)

> **Censo 2022: Bahía Blanca duplicó un porcentaje de crecimiento que parecía instalado**
> De acuerdo con el Indec, los 335.190 habitantes relevados en 2022 representan el 11,14 % más respecto del año 2010. Desde 1991 se venía creciendo a un promedio del 5 % por década.

Nos preguntamos, ¿cuántos habitantes se registraron en 2010?

Para dar respuesta a esta pregunta, llamamos x a la cantidad de habitantes censados en 2010, y sabemos que los 335.190 habitantes relevados en 2022 son el 11,14 % más que esta cantidad x. La ecuación que debemos plantear y resolver es

$$x + \frac{11,14}{100}x = 335.190 \iff \frac{111,14}{100}x = 335.190 \iff x = 301.592,58592\ldots$$

Ahora, decir que la cantidad de habitantes en 2010 era de 301.592,58592 no es una respuesta correcta. Debemos redondear o truncar este valor para convertirlo en un número natural, ya que estamos hablando de cantidad de personas. Así, decimos que la cantidad de habitantes de Bahía Blanca en 2010 era de 301.592 (si truncamos el resultado encontrado) o de 331.593 (si lo redondeamos).

(*) Diario La Nueva. https://www.lanueva.com/nota/2023-2-6-5-0-11-censo-2022-bahia-blanca-duplico-un-porcentaje-de-crecimiento-que-parecia-instalado

Revisemos lo aprendido 1

Plantear y resolver cada uno de los siguientes problemas.

1. En un rectángulo uno de sus lados mide 12 cm más que el otro, y su perímetro es de 26 cm. ¿Cuál es la medida de cada lado?

2. Una ONG realizó una colecta de libros de cuentos infantiles para repartirlos entre tres

bibliotecas barriales. A la primera biblioteca le entregaron las tres quintas partes de los libros recolectados, a la segunda biblioteca le dieron la mitad de los libros restantes, y finalmente la tercera biblioteca recibió los 55 libros que quedaban. ¿Cuántos libros se juntaron durante la colecta? ¿Cuántos libros recibió cada biblioteca?

3. Una fábrica de alfajores utiliza, para sus productos, relleno de dulce de leche, de avellanas o de distintas frutas. En la producción de este mes, el 63% de sus alfajores tienen relleno de dulce de leche y el 27% tiene relleno de avellanas. Los restantes 364 alfajores que produjeron este mes tienen relleno de fruta. ¿Cuántos alfajores se produjeron este mes? ¿Cuántos son de cada tipo?

2.3 Inecuaciones

Las inecuaciones son desigualdades entre expresiones algebraicas en las que aparece un valor desconocido. La solución de una inecuación es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Si existen valores reales que verifican la inecuación, entonces podemos expresar su solución en forma de intervalo (o de unión de intervalos). Algunos ejemplos de intervalos fueron revisados en el **Ejemplo 1.2.1**, y una tabla que resume los tipos de intervalos que podemos encontrar se presenta en las **Consideraciones generales**, al inicio de estas notas.

Si ningún valor real verifica la inecuación, entonces el subconjunto solución es el **conjunto vacío**, que indicamos $\emptyset$.

En algunos casos la solución de una inecuación es un único punto. En tales situaciones no utilizamos la notación de intervalos para indicar la solución. Por ejemplo, la única solución de $x^2 \leqslant 0$ es $x = 0$.

Al momento de resolver una inecuación debemos tener presente las siguientes **propiedades de las desigualdades**. Las mismas son válidas para $<$,$>$, $\leqslant$ y $\geqslant$, pero por claridad solo las enunciamos en el caso de la desigualdad $<$.

(1) *Transitividad.* Si a, b y $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$a < b \quad y \quad b < c \qquad \Longrightarrow \qquad a < c.$$

(2) *Monotonía de la suma.* Si a, b y $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$a < b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a + c < b + c.$$

(3) *Monotonía del producto.* Si a, b, $c \in \mathbb{R}$ y $c > 0$ entonces

$$a < b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \cdot c < b \cdot c.$$

(4) *Elemento opuesto.* Si a y $b \in \mathbb{R}$, entonces

$$a < b \qquad \Longleftrightarrow \qquad -a > -b.$$

La cuarta propiedad es muy importante y vamos a demostrarla en forma directa.

Demostración de la propiedad 4

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, y supongamos $a < b$. De esta hipótesis, y por la monotonía de la suma, resulta que $a - b < 0$. Simbólicamente

$$a < b \quad \Longrightarrow \quad a + (-b) < b + (-b) \quad \Longrightarrow \quad a - b < 0.$$

Nuevamente utilizando la monotonía de la suma, obtenemos que

$$a - b < 0 \quad \Longrightarrow \quad a - b + (-a) < 0 + (-a) \quad \Longrightarrow \quad -b < -a.$$

Probamos así que para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b \Longrightarrow -a > -b$. Usando estas mismas estrategias se prueba que para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $-a > -b \Longrightarrow a < b$ y con esto queda demostrada la propiedad.

Como consecuencia de las propiedades (3) y (4) tenemos que si a, b, $c \in \mathbb{R}$ y $c < 0$, entonces

$$a < b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \cdot c > b \cdot c.$$

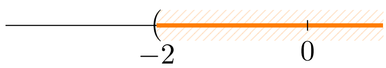
Veamos a continuación, a partir de ejemplos, cómo resolver distintos tipos de inecuaciones.

Ejemplo 2.3.1

Resolvamos la siguiente inecuación, indicando su solución en forma de intervalo, usando notación de conjunto y representando los valores encontrados en una recta numérica.

$$\begin{aligned} 2x - (x+4) &< 5 \cdot (x+1) - 1 \\ x - 4 &< 5x + 4 \\ -4x &< 8 \\ x &> -2. \end{aligned}$$

En notación de intervalo, la solución de esta inecuación es el intervalo abierto infinito $\mathcal{S} = (-2, +\infty)$. En notación de conjunto tenemos $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} : x > -2\}$ y su representación en la recta numérica es



Tenemos así un conjunto infinito de valores que verifican esta desigualdad. Por ejemplo, $x = -1$ es una solución ya que si reemplazamos con este valor en cada miembro de la inecuación inicial encontramos

$$2 \cdot (-1) - (-1 + 4) = -2 - 3 = -5 \qquad \text{y} \qquad 5 \cdot (-1 + 1) - 1 = -1,$$

es decir que se verifica la desigualdad planteada, porque $-5 < -1$. Sin embargo $x = -5$ no es una solución de esta inecuación pues al reemplazar en cada miembro resulta

$$2 \cdot (-5) - (-5 + 4) = -10 + 1 = -9 \qquad \text{y} \qquad 5 \cdot (-5 + 1) - 1 = -21,$$

y esto no verifica la desigualdad planteada, porque $-9 \not< -21$.

Analicemos a continuación dos situaciones particulares: inecuaciones sin solución e inecuaciones para las que cualquier número real es solución.

Ejemplo 2.3.2

1. Consideremos la inecuación

$$\begin{aligned} 5-8x &< 3(1-x)-5x \\ 5-8x &< 3-8x \\ 5 &< 3. \end{aligned}$$

Esta desigualdad es absurda, es decir que la inecuación no tiene solución, luego el conjunto solución es $\mathcal{S}=\emptyset$.

2. Sea la inecuación

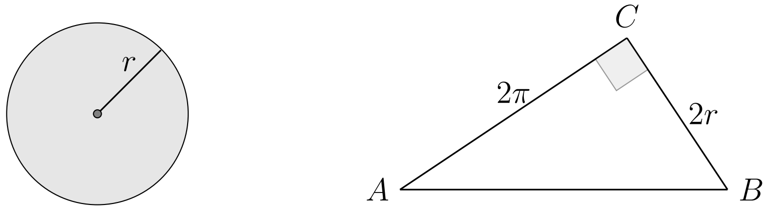
$$\begin{aligned} 2(x-4) &< 1-2(1-x) \\ 2x-8 &< -1+2x \\ -8 &< -1. \end{aligned}$$

Esta desigualdad es verdadera para cualquier $x \in \mathbb{R}$ y así tenemos que el conjunto solución es $\mathcal{S}=\mathbb{R}$.

Las inecuaciones pueden ser de utilidad para plantear y resolver problemas. Al igual que en el caso e problemas con ecuaciones, en los problemas con inecuaciones debemos reconocer la información relevante en los enunciados y plantear la inecuación adecuada. Es importante dar una respuesta adecuada al contexto del problema, redondeando o truncando el valor encontrado como solución matemática, si es necesario.

Ejemplo 2.3.3

Calculemos los valores de r para los que el área del círculo es menor que el área del triángulo de la siguiente figura.



La inecuación que corresponde a este problema es

$$\pi r^2 < \frac{2r \cdot 2\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad \pi r^2 - 2\pi r < 0 \quad \Longrightarrow \quad \pi r(r-2) < 0.$$

Para que este producto sea negativo, dado que $r>0$, debe ser

$$r-2<0 \quad \Longrightarrow \quad r<2.$$

Luego, el área del círculo será menor que la del triángulo si $r \in (0, 2)$.

Inecuaciones y reglas de signo

Una estrategia para resolver inecuaciones consiste en factorizar la expresión algebraica y hacer uso de las reglas de signo.

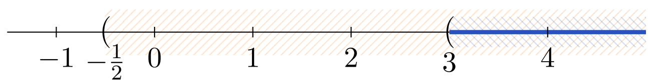
Ejemplo 2.3.4

Consideremos la inecuación

$$(x-3)(2x+1) > 0,$$

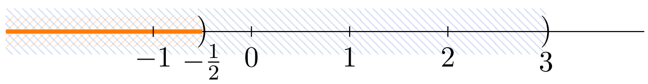
en la tenemos una expresión factorizada que involucra solo dos factores, y buscamos los $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la expresión toma valores positivos. La solución la encontramos cuando ambos factores son positivos $((+) \cdot (+) = (+))$ o cuando ambos son negativos $((-) \cdot (-) = (+))$. Es decir que debemos analizar dos situaciones. En el primer caso, debemos resolver

$$\begin{cases} x-3>0 & \to \quad x>3 \\ \quad y & \\ 2x+1>0 & \to \quad x>-\frac{1}{2} \end{cases}$$



cuya solución es $x > 3$, o equivalentemente en intervalo $(3, +\infty)$. En el segundo caso, debemos resolver

$$\begin{cases} x-3<0 & \to x<3 \\ \quad y & \\ 2x+1<0 & \to x<-\frac{1}{2} \end{cases}$$



cuya solución es $x < -\frac{1}{2}$, o equivalentemente en intervalo $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$.

En base a este análisis, concluimos que las soluciones de la inecuación inicial son los números reales x tales que, o bien $x > 3$ (esto es, $x \in (3, +\infty)$), o bien $x < -\frac{1}{2}$ (esto es $\left(x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)\right)$. En otras palabras, podemos decir que el conjunto solución es

$$\mathcal{S} = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)$$

.

En los casos que tenemos más de dos factores, las combinaciones de signos que nos permiten llegar al resultado aumentan, lo que hace muy difícil un análisis de casos como el planteado en el ejemplo anterior. En tales casos, podemos recurrir a una estrategia de análisis del signo de cada factor y la comparación de todos los factores a la vez. El siguiente ejemplo ilustra el mecanismo de análisis.

Ejemplo 2.3.5

Buscamos los números reales x que verifican la desigualdad

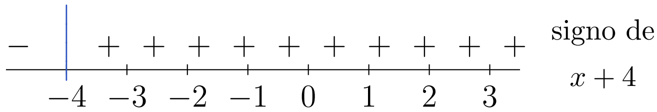
$$(x+4)(x^2-5) > 0.$$

En primer lugar factorizamos lo más posible la expresión dada:

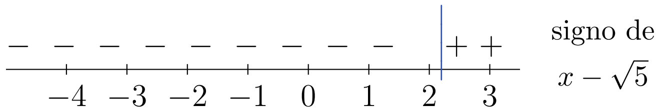
$$(x+4)(x^2-5) = (x+4)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}).$$

Ahora analizamos el signo de cada factor y aplicamos la regla de signos para estudiar el signo del producto de todos los factores.

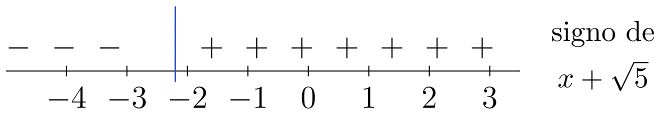
$x+4>0 \iff x>-4$



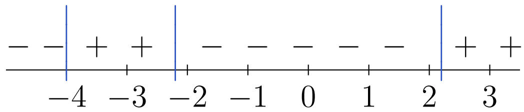
$x-\sqrt{5}>0 \iff x>\sqrt{5}$



$x+\sqrt{5}>0 \iff x>-\sqrt{5}$



signo de $(x+4)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$



Dado que buscamos los valores de x que hacen positiva la expresión, resulta que la solución de la inecuación es el intervalo $\mathcal{S} = (-4, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$. Esto es, cualquier $x \in \mathcal{S}$ satisface la inecuación.

Revisemos lo aprendido

1. Dada la inecuación $2x-3 < 3(2-x)+1$, indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justificar haciendo las cuentas correspondientes.
   (a) $x = \frac{7}{2}$ es una solución.
   (b) Cualquier número real menor que 2 es una solución.
   (c) La solución es $(2, +\infty)$.
   (d) $x = 2$ es la única solución.

2. El Índice de Masa Corporal (IMC) es la razón (esto es, la división) entre la masa corporal y el cuadrado de la estatura de una persona. Diversos estudios realizados han concluido que el grupo más saludable corresponde a un IMC comprendido entre $20\,\frac{kg}{m^2}$ y $25\,\frac{kg}{m^2}$.

Si una persona mide $1,5$ metros, para ser considerada saludable su masa corporal en kg deberá estar comprendida entre

(a) 30 y $37,5$,
(b) 30 y $56,25$,
(c) 40 y 50,
(d) 45 y $56,25$,
(e) 45 y 55.

Indicar la respuesta correcta.

3. Resolver cada una de las siguientes inecuaciones y expresar su solución en forma de intervalo o unión de intervalos.

(a) $\dfrac{3x-3}{4} \geqslant x-2$
(b) $x^2 - 3x - 4 > 0$
(c) $(x^2 - 3x)(x^2 - 3) < 0$

2.4 Polinomios. Elementos y operaciones

Un **polinomio** con coeficientes reales es una expresión algebraica de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

donde los valores $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales, n es un número natural o cero y x se denomina indeterminada.

Si $a_n \neq 0$, podemos distinguir los siguientes elementos de un polinomio:

- $a_0, \ldots, a_n$ son los **coeficientes del polinomio**,
- a_n es el **coeficiente principal**,
- a_0 es el **término independiente**,
- n se llama **grado** del polinomio.

Observación 6
Vamos a considerar, por convención, que el polinomio nulo $P(x) = 0$ no tiene grado.

Si el coeficiente principal es $a_n = 1$, el polinomio se llama **mónico**. Además, si los grados de los términos están ordenados en forma decreciente o creciente se dice que el polinomio está **ordenado**.

Dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ son **iguales** si los coeficientes correspondientes a términos semejantes son iguales. Por ejemplo,

$$P(x) = 3x - 2x^2 + 6 \quad \text{y} \quad Q(x) = -2x^2 + 3x + 6,$$

son polinomios iguales.

Dado un polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, y un número $c \in \mathbb{R}$, llamamos **valor numérico** de $P(x)$ en c al número

$$P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \ldots + a_1 c + a_0.$$

Ejemplo 2.4.1

Consideremos el polinomio $Q(x) = 2 - \sqrt{2}x^3 + 5x$.

Este polinomio tiene grado 3, coeficiente principal $a_3 = -\sqrt{2}$ y término independiente es $a_0 = 2$. $Q(x)$ no es mónico porque $a_3 \neq 1$.

Podemos escribir el polinomio en forma ordenada decreciente de la siguiente manera:

$$Q(x) = -\sqrt{2}x^3 + 5x + 2.$$

El valor numérico de $Q(x)$ en -1 es

$$Q(-1) = 2 - \sqrt{2}(-1)^3 + 5(-1) = 2 + \sqrt{2} - 5 = \sqrt{2} - 3.$$

Revisemos lo aprendido

1. Indicar cuáles de las siguientes expresiones son polinomios con coeficientes reales.

   (a) $\frac{1}{5}x^2$,
   (b) $8x^2 - \sqrt{5}x^9 - 1$,
   (c) $5x^{-1} - x + 2$,
   (d) $2\pi x^3 - \frac{\pi}{3}x^2 + 1$,
   (e) -3,
   (f) $3\sqrt{x} - 4x + x^3$,

2. Completar la siguiente tabla.

Polinomio	Grado	Coeficiente principal	Término independiente	Forma decreciente
$P(x) = 3 + 5x^5 + 6x^3$				
$P(x) = 2 - x$				
$P(x) = 8$				
$P(x) = x^4 + x^7 + 9x$				

3. Consideremos el polinomio $P(x) = x^3 + 5x^2 - 1$.

   (a) Determinar los valores reales a, b, c y d para que $P(x)$ sea igual a $Q(x) = (a+1)x^3 + bx^2 + cx + 3d$.
   (b) ¿Cuál es el valor numérico de $P(x)$ en -2?

Operaciones elementales entre polinomios

Dado que los polinomios son expresiones algebraicas, las operaciones de **suma** y **multiplicación** definidas en la primera sección de este bloque temático, siguen siendo válidas.

- La suma de dos polinomios se realiza sumando (o restando) los coeficientes de términos semejantes.

- La multiplicación entre dos polinomios se realiza aplicando la propiedad distributiva: se multiplica cada término de un polinomio por los términos del otro y luego se agrupan (sumando o restando) los términos semejantes.

En general, puede ser útil escribir los polinomios con los que vamos a trabajar en forma ordenada decreciente o creciente. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2.4.2

Calculemos la suma y la multiplicación de los polinomios

$$P(x) = \frac{3}{4} - 3x^2 + x^4 \quad \text{y} \quad Q(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1.$$

Empezamos planteando la suma entre ellos, ordenando el polinomio $P(x)$ en forma decreciente para visualizar mejor qué términos se pueden agrupar:

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= x^4 - 3x^2 + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x^2 + 1 \\ &= x^4 + \left(-3 - \frac{1}{2}\right)x^2 + \frac{3}{4} + 1 \;=\; x^4 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

La multiplicación de ambos polinomios es

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= \left(x^4 - 3x^2 + \frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}x^2 + 1\right) \\ &= x^4\left(-\frac{1}{2}x^2\right) + x^4 - 3x^2\left(-\frac{1}{2}x^2\right) - 3x^2 + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}x^2\right) + \frac{3}{4} \\ &= -\frac{1}{2}x^6 + x^4 + \frac{3}{2}x^4 - 3x^2 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4} \\ &= -\frac{1}{2}x^6 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{27}{8}x^2 + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Revisemos lo aprendido

Dados los polinomios $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ y $Q(x) = -2x^3 + 5x^2$, efectuar las siguientes operaciones indicando el grado del polinomio resultante.

1. $P(x) - 3\,Q(x)$
2. $P(x) \cdot Q(x)$
3. $(Q(x))^2 + x^2\,P(x)$

Raíces de un polinomio. Factorización

Un valor $c \in \mathbb{R}$ es una **raíz** de un polinomio $P(x)$ si el valor numérico de $P(x)$ en c es cero, es decir, si $P(c) = 0$. Podemos pensar entonces a la raíz c como una solución de la ecuación $P(x) = 0$.

Si c es raíz del polinomio $P(x)$, entonces el polinomio puede expresarse de la forma

$$P(x) = (x - c) \cdot C(x).$$

El polinomio $C(x)$ tendrá un grado menos que $P(x)$ y lo podemos calcular usando las distintas herramientas conocidas para factorizar expresiones. También podemos utilizar el método de Ruffini, el cual describiremos en la siguiente sección.

Ejemplo 2.4.3

El valor $c = 0$ es una raíz de $P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x$. Vemos fácilmente que x es un factor común de $P(x)$, entonces podemos expresar

$$\underbrace{2x^3 - x^2 + 3x}_{P(x)} = \underbrace{x}_{(x-c)}\underbrace{(2x^2 - x + 3)}_{C(x)}$$

Para el polinomio $Q(x) = 3x^2 - 6$, el valor $c = -\sqrt{2}$ es una raíz ya que $Q(-\sqrt{2}) = 0$). Luego podemos expresar

$$\underbrace{3x^2 - 6}_{Q(x)} = 3(x^2 - 2) = 3(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = \underbrace{(x + \sqrt{2})}_{(x-c)}\underbrace{3(x - \sqrt{2})}_{C(x)}$$

En cualquier caso, tener una expresión lo más factorizada posible de un polinomio nos permite identificar rápidamente sus raíces. Como mencionamos previamente, encontrar las raíces de un polinomio $P(x)$ equivale a resolver la ecuación $P(x) = 0$, y para esto podemos recurrir a la propiedad $a \cdot b = 0 \iff a = 0$ o $b = 0$.

Ejemplo 2.4.4

Consideremos $P(x) = 2x^3 + 6x^2 + 9x$, el cual podemos factorizar de la siguiente forma:

$$P(x) = 2x^3 + 12x^2 + 18x = 2x(x^2 + 6x + 9) = 2x(x + 3)^2.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} P(x) = 0 \quad &\iff \quad 2x(x+3)^2 = 0 \\ &\iff \quad x = 0 \;\text{ ó }\; (x+3)^2 = 0 \\ &\iff \quad x = 0 \text{ ó } \; x + 3 = 0 \iff x = 0 \;\text{ ó }\; x = -3 \end{aligned}$$

Encontramos así dos valores $c_1 = 0, c_2 = -3$ que son raíces de $P(x)$.

La factorización de polinomios de grado 4 que tienen la forma $P(x) = ax^4 + bx^2 + c,\; a \neq 0,$

puede estudiarse usando la fórmula resolvente vista para ecuaciones cuadráticas. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2.4.5

Calculemos las raíces reales del polinomio $P(x) = x^4 - x^2 - 2$.

Para hallar las raíces de $P(x)$ debemos resolver la ecuación bicuadrática $x^4 - x^2 - 2 = 0$. Como hicimos en el Ejemplo 2.2.5, sustituimos la incógnita x con la expresión $x^2 = u$ y encontramos, para la incógnita u, la ecuación cuadrática

$$u^2 - u - 2 = 0.$$

El discriminante es $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 > 0$ por lo que existen dos soluciones

$$u_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2} = 2 \qquad \text{y} \qquad u_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2} = -1.$$

Es decir que podemos expresar $u^2 - u - 2 = (u-2)(u+1)$. Volviendo a la variable x resulta

$$P(x) = (x^2 - 2)(x^2 + 1).$$

El primer factor es una diferencia de cuadrados que puede expresarse como

$$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$

El segundo factor de $P(x)$, $(x^2 + 1)$ es un polinomio que no posee raíces reales y por lo tanto no puede factorizarse en $\mathbb{R}$. Finalmente,

$$P(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 1),$$

y las raíces reales de $P(x)$ son $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$.

Se dice que una raíz c tiene **multiplicidad** m, con $m \in \mathbb{N}$, (o bien que c es una raíz de orden m) si existe un polinomio no nulo $Q(x)$ tal que

$$P(x) = (x - c)^m Q(x) \qquad \text{y} \qquad Q(c) \neq 0,$$

es decir, c no es raíz de $Q(x)$. En el Ejemplo 2.4.4, $c_1 = 0$ es una raíz **simple** de $P(x)$ (así la llamamos por tener multiplicidad 1) y $c_2 = -3$ es una raíz **doble** (o de orden 2, o de multiplicidad 2).

Ejemplo 2.4.6

El valor $c = 0$ es raíz de $P(x) = 6x^3 + 2x^6 - x^7$, pues $P(0) = 0$.

Notemos que x^3 es un factor común en todos los términos del polinomio, por lo que podemos expresarlo de la forma

$$P(x) = x^3 \cdot (6 + 2x^3 - x^4) = x^3 \cdot Q(x).$$

Dado que el polinomio $Q(x) = 6+2x^3-x^4$ no tiene a $c = 0$ como raíz, esto es $Q(0) = 6 \neq 0$, entonces concluimos que $c = 0$ es una raíz de P de multiplicidad 3 (también se dice raíz de orden 3 o raíz triple).

A partir de lo que hemos presentado, es posible concluir que *un polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales distintas.*

Ejemplo 2.4.7

Si tenemos un polinomio expresado en la forma factorizada

$$P(x) = 2(x-2)(x-3)^3(x+3),$$

inmediatamente podemos concluir que las raíces de $P(x)$ son $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -3$.

Esto es así dado que encontrar las raíces de $P(x)$ equivale a resolver $P(x) = 0$, y

$$P(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2(x-2)(x-3)^3(x+3) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x-2=0 & \Longleftrightarrow \quad x=2, \\ (x-3)^3=0 & \Longleftrightarrow \quad x=3, \\ x+3=0 & \Longleftrightarrow \quad x=-3. \end{cases}$$

Más aún, $x_1 = 2$ y $x_3 = -3$ son raíces simples mientras que $x_2 = 3$ es raíz triple.

Es importante observar que no todo polinomio tiene raíces reales, pues no siempre una ecuación de la forma $P(x) = 0$ tiene solución en $\mathbb{R}$. Por ejemplo,

- el polinomio $P(x) = x^2+5$ no tiene ninguna raíz real, pues la ecuación $P(x) = 0$ no tiene soluciones reales,
- el polinomio $Q(x) = x^2+2x+3$ no tiene raíces reales dado que la ecuación $x^2+2x+3 = 0$ tiene discriminante $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8 < 0$ y por lo tanto no tiene solución en $\mathbb{R}$.

En estos casos en que no existen raíces reales, la forma en que está dado el polinomio ya es su forma factorizada en $\mathbb{R}$.

A partir de ciertas características de un polinomio, como sus raíces, su grado, su valor numérico en ciertos puntos, podemos encontrar su expresión algebraica. Esto es lo que ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4.8

Encontremos un polinomio de grado mínimo con coeficientes reales que tenga como raíz simple a $c_1 = 2$ y como raíz doble a $c_2 = -5$.

Dado que $P(x)$ tiene una raíz simple y una doble, tiene como mínimo grado 3. Como c_1 es raíz simple, $P(x)$ tiene un factor de la forma $(x-2)$, y como c_2 es raíz doble, el polinomio tiene un factor de la forma $(x+5)^2$. Luego, tenemos que

$$P(x) = a(x-2)(x+5)^2, \qquad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

Notemos que existen infinitos polinomios que cumplen con las condiciones impuestas, uno por cada valor de a. Así,

$$P_1(x) = (x-2)(x+5)^2 \qquad \text{y} \qquad P_2(x) = -3(x-2)(x+5)^2$$

son dos polinomios distintos que cumplen con lo pedido.

Ahora, si agregamos por ejemplo la condición de que $P(0) = 50$, entonces resulta que

$$50 = P(0) = a(-2)25 = -50\,a \quad \Longrightarrow \quad a = -1,$$

y así, el único polinomio que cumple todas las condiciones es $P(x) = -(x-2)(x+5)^2$.

Método de Ruffini

El método de Ruffini nos permite factorizar un polinomio conociendo una raíz. Como mencionamos al inicio de esta sección, si un polinomio $P(x)$ verifica $P(c) = 0$ (es decir, si c es una raíz de $P(x)$), entonces $P(x)$ se expresa como $P(x) = (x-c)Q(x)$. Usando el método de Ruffini podemos hallar la expresión de $Q(x)$.

Ejemplo 2.4.9

Consideremos el polinomio $P(x) = 3x^3 + 6 - 2x - 9x^2$, del cual sabemos que $P(3) = 0$. Veamos, paso a paso, cómo factorizar este polinomio aplicando el método de Ruffini.

Para comenzar escribimos el polinomio $P(x)$ de manera ordenada (decreciente) y completa. Esto es, ordenemos sus términos de forma que las potencias de x resulten decrecientes al leerlo de izquierda a derecha y, si es necesario, agregamos los términos faltantes multiplicados por cero, así resulta

$$P(x) = 3x^3 - 9x^2 - 2x + 6$$

En este caso no falta completar ningún término.

Como $P(3) = 0$, es decir que $c = 3$ es una raíz, sabemos que $P(x) = (x-3)Q(x)$. Vamos a encontrar el polinomio $Q(x)$ con la ayuda de una tabla en la que colocamos en la primer fila los coeficientes del polinomio $P(x)$ y a la izquierda de la línea vertical colocamos el valor de la raíz $c = 3$. A continuación describimos los cálculos que se realizan para completar la tabla y hallar así el polinomio $Q(x)$.

1. El primer coeficiente de $P(x)$, que en este caso es 3 se reescribe en la tercer fila, luego se multiplica por c y el resultado se coloca debajo del segundo coeficiente de $P(x)$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -9 & -2 & 6 \\ 3 & & \mathbf{9} & & \\ \hline & \mathbf{3} & & & \end{array}$$

2. Sumamos el segundo coeficiente con el valor que agre– gamos en el paso anterior y colocamos el resultado debajo de ambos en la tercer fila. Luego multiplicamos este último valor por c y colocamos el resultado en la segunda fila debajo del tercer coeficiente de $P(x)$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -9 & -2 & 6 \\ 3 & & 9 & \mathbf{0} & \\ \hline & 3 & \mathbf{0} & & \end{array}$$

3. Siguiendo los cálculos de esta manera completamos la tabla.

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -9 & -2 & 6 \\ 3 & & 9 & 0 & -6 \\ \hline & 3 & 0 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

El último valor en la tercer fila de la tabla será 0, lo cual es consecuencia de que c es una raíz de $P(x)$. Los demás valores son los coeficientes del polinomio $Q(x)$ ordenados en forma decreciente. Así en este ejemplo resulta $Q(x) = 3x^2 + 0x - 2$. Finalmente encontramos

$$P(x) = (x-3)Q(x) = (x-3)(3x^2-2).$$

En general, el método de Ruffini puede aplicarse a cualquier polinomio $P(x)$ y tomando cualquier número real c. Este método permite encontrar el cociente y el resto de dividir $P(x)$ por $x - c$, tema que no abordamos en estas notas. El último valor que aparece en la tabla que se construye siguiendo el procedimiento será el valor numérico de $P(x)$ en $x = c$, esto es $P(c)$. Por esto, si c es una raíz de P entonces $P(c) = 0$ y el último valor que aparece en la tabla es 0.

Al presentar este método escribimos en forma genérica el factor $x - c$, con $c \in \mathbb{R}$. Es importante tener en cuenta que el número c puede ser negativo. En estos casos el método descripto se aplica de la misma manera, como lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4.10

Calculemos las raíces del polinomio $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 9x^2 - x + 3$ sabiendo que $c = -1$ es raíz de $P(x)$.

Que $c = -1$ sea raíz de $P(x)$ quiere decir que $P(x)$ puede escribirse como $P(x) = (x+1)Q(x)$. Podemos entonces usar el método de Ruffini para encontrar $Q(x)$. En este caso tenemos $c = -1$ y resulta

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & -3 & -9 & -1 & 3 \\ -1 & & -2 & 5 & 4 & -3 \\ \hline & 2 & -5 & -4 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

Entonces podemos expresar $P(x) = (x+1)(2x^3 - 5x^2 - 4x + 3)$. Seguimos factorizando ahora el polinomio $Q_1(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$.

El enunciado del ejercicio nos indica que $c = -1$ es una raíz, pero nada dice acerca de su multiplicidad, por lo que una opción es volver a aplicar la regla de Ruffini con $c = -1$ para ver si la raíz tiene orden mayor que uno (es decir, si la raíz se repite). Aplicamos nuevamente la regla

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -5 & -4 & 3 \\ -1 & & -2 & 7 & -3 \\ \hline & 2 & -7 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

y encontramos que $c = -1$ es una raíz por lo menos de orden 2. Hasta aquí tenemos

$$P(x) = (x+1)^2(2x^2 - 7x + 3).$$

Si volvemos a aplicar la regla de Ruffini, ahora al polinomio $Q_2(x) = 2x^2 - 7x + 3$ y

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & -7 & 3 \\ -1 & & -2 & 9 \\ \hline & 2 & -9 & \boxed{12} \end{array}$$

Dado que el resto no es cero, entonces $Q_2(x) = 2x^2 - 7x + 3$ no puede factorizarse como $Q_2(x) = (x+1)Q_3(x)$. En otras palabras, -1 es una raíz de multiplicidad 2.

Ahora, para hallar más raíces de $P(x)$, si es que existen, debemos resolver la ecuación

$$P(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+1)^2(2x^2 - 7x + 3) = 0.$$

Es decir que debemos resolver la ecuación cuadrática $2x^2 - 7x + 3 = 0$, para lo cual usamos la fórmula resolvente vista en la Sección 2.2. En este caso el discriminante es $\Delta = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 > 0$, es decir, que existen dos soluciones

$$c_2 = \frac{7 + \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{12}{4} = 3 \qquad \text{y} \qquad c_3 = \frac{7 - \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Así, las raíces de $P(x)$ son $c_1 = -1$ (raíz doble), $c_2 = 3$ (raíz simple) y $c_3 = \frac{1}{2}$ (raíz simple).

Ya que conocemos las raíces del polinomio con su orden de multiplicidad y sabiendo que su coeficiente principal es $a_3 = 2$, podemos expresarlo de forma factorizada

$$P(x) = 2(x+1)^2(x-3)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Revisemos lo aprendido

1. ¿Es $x = -2$ una raíz de $P(x) = x^3 + x^2 + 4$?

2. Expresar cada uno de los siguientes polinomios en forma factorizada. Encontrar todas sus raíces reales, indicando su grado de multiplicidad.

   (a) $P(x) = 2x^4 - 5x^3$

   (b) $P(x) = 4x^2 - 12x + 9$

   (c) $P(x) = x^4 - 81$

   (d) $P(x) = (x^2 + 9x + 14)(x^2 - 4)$

3. Hallar un polinomio $P(x)$ de grado 4, que verifique $P(-1) = 6$ y que de sus raíces sean $c_1 = 0$ (raíz doble), $c_2 = -2$ y $c_3 = 1$.

4. Factorizar lo más posible el polinomio $Q(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{7}{6}x - 1$, sabiendo que $Q\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$.

2.5 Expresiones algebraicas racionales. Simplificación

Las expresiones algebraicas racionales se expresan como una fracción. Por ejemplo,

$$\frac{x-1}{2x+3}; \qquad \frac{2ab-a^2+6}{(a+b)^2-b^2}$$

son expresiones algebraicas racionales. Estudiaremos únicamente expresiones racionales en las que el numerador y el denominador son polinomios.

Observación 7

En estas expresiones, en general, encontramos restricciones para los valores numéricos que pueden tomar las letras involucradas, ya que el denominador no puede tomar el valor 0. Así, por ejemplo, debe ser $x \neq -\frac{3}{2}$ en la primera de las expresiones anteriores, pues

$$2x+3=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2x=-3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x=-\frac{3}{2}$$

y $a \neq 0, a \neq -2b$ en la segunda, pues

$$\begin{aligned}(a+b)^2-b^2=0 &\Longleftrightarrow a^2+2ab+b^2-b^2=0\\ &\Longleftrightarrow a(a+2b)=0\\ &\Longleftrightarrow a=0 \text{ ó } a=-2b.\end{aligned}$$

En esta sección nos centraremos en resolver operaciones que involucran este tipo de expresiones, sin detenernos en analizar los valores permitidos para las letras involucradas. Este tipo de análisis lo tendremos en cuenta al resolver ecuaciones e inecuaciones con estas expresiones y cuando estudiemos el dominio de algunas funciones.

Las operaciones con expresiones algebraicas racionales son similares a las operaciones entre fracciones. En la multiplicación o división es conveniente factorizar las expresiones involucradas de forma de simplificar la mayor cantidad posible de factores y que resulten expresiones más simples. Empecemos con un ejemplo sencillo de multiplicación y uno de división de estas expresiones.

Ejemplo 2.5.1

1. Consideremos la multiplicación

$$\frac{2x}{x+1} \cdot \frac{(x+1)(x-2)}{6x^2}.$$

Las expresiones involucradas ya están factorizadas, por lo que simplemente simplificamos elementos repetidos en el numerador y el denominador y luego realizamos la multiplicación de la misma forma en que lo hacemos con los números expresados como fracción. Así,

$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{x+1}} \cdot \frac{\cancel{(x+1)}(x-2)}{\cancel{2} \cdot 3x^{\cancel{2}}} = \frac{x-2}{3x}$$

2. Consideremos ahora la división

$$\frac{x^2-3}{x+3} : \frac{x^3+\sqrt{3}x^2}{2x^2+12x+18}.$$

Factorizamos los distintos factores involucrados y encontramos

$$\frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{x+3} : \frac{x^2(x+\sqrt{3})}{2(x+3)^2}.$$

Ahora simplificamos (igual que en la división de fracciones, numeradores entre sí y denominadores entre sí), y luego realizamos la división (también igual que en la división de fracciones):

$$\frac{(x-\sqrt{3})\cancel{(x+\sqrt{3})}}{\cancel{x+3}} : \frac{x^2\cancel{(x+\sqrt{3})}}{2(x+3)^{\cancel{2}}} = \frac{2(x-\sqrt{3})(x-3)}{x^2}.$$

Para sumar expresiones algebraicas racionales debemos factorizar el denominador y encontrar un denominador común. Esto es, el producto de todos los factores que aparecen en los denominadores, con la mayor potencia con que aparezcan. Por ejemplo, si tenemos las expresiones

$$\frac{x-4}{x(x+3)^2} \quad \text{y} \quad \frac{2x-1}{x^3(x+3)(x-1)}$$

el denominador común es $x^3(x+3)^2(x-1)$. Veamos, con un ejemplo sencillo, cómo sumar dos expresiones de este tipo.

Ejemplo 2.5.2

Resolvamos la suma

$$\frac{x}{x-2} - x.$$

En este caso, las expresiones involucradas son muy simples y no se requiere ninguna factorización. El denominador común es $x-2$, y resulta

$$\frac{x}{x-2} - x = \frac{x-x(x-2)}{x-2} = \frac{x-x^2+2x}{x-2} = \frac{-x^2+3x}{x-2}.$$

Veamos, paso a paso, un ejemplo más complejo.

Ejemplo 2.5.3

Resolvamos la siguiente suma de expresiones algebraicas.

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{a^2+3a}+\frac{a+9}{a^2+6a+9}-1 &= \frac{a^{\cancel{2}}}{\cancel{a}(a+3)}+\frac{a+9}{(a+3)^2}-1\\
&= \frac{a(a+3)+a+9-(a+3)^2}{(a+3)^2}\\
&= \frac{a^2+3a+a+9-(a^2+6a+9)}{(a+3)^2}\\
&= \frac{\cancel{a^2}+4a+\cancel{9}-\cancel{a^2}-6a-\cancel{9}}{(a+3)^2} = -\frac{2a}{(a+3)^2}.
\end{aligned}$$

Notemos que en el primer paso, fue necesario factorizar las expresiones para reconocer el denominador común. Si bien usamos la letra a en lugar de x (habitual en los polinomios), esta expresión es también una expresión racional polinómica.

La combinación de las distintas operaciones presentadas nos permite resolver ejercicios más elaborados. En estos casos es fundamental respetar la jerarquía de las operaciones (esto es, el orden en el que las aplicamos).

Ejemplo 2.5.4

Veamos cómo operar algebraicamente para simplificar la expresión:

$$\left(\frac{a+6}{a-6}-\frac{a}{a+6}\right):\frac{6}{a^2-6a}.$$

Debemos respetar la jerarquía de las operaciones, por lo que primero sumaremos las dos expresiones encerradas entre paréntesis, y ese resultado utilizaremos en la división.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a+6}{a-6}-\frac{a}{a+6}\right):\frac{6}{a^2-6a} &= \frac{(a+6)(a+6)-a(a-6)}{(a-6)(a+\sqrt{6})}:\frac{6}{a(a-6)}\\
&= \frac{\cancel{a^2}+26a+6^2-\cancel{a^2}+6a}{(a-6)(a+6)}:\frac{6}{a(a-6)}\\
&= \frac{18a+36}{(a-6)(a+6)}:\frac{6}{a(a-6)}\\
&= \frac{(a+2)\,\overset{3}{\cancel{18}}}{\cancel{(a-6)}(a+6)}:\frac{\cancel{6}}{a\cancel{(a-6)}} = \frac{a(3a+6)}{a+6}
\end{aligned}$$

Revisemos lo aprendido

1. Al reemplazar $x=\sqrt{2}$ la expresión $\dfrac{x-2}{1-x}$ se convierte en (redondear la respuesta correcta):

(a) $x = \frac{2}{\sqrt{2}}$ (b) $x = \sqrt{2}$ (c) $x = -\sqrt{2}$

2. Resolver las siguientes sumas, multiplicaciones y divisiones, simplificando al máximo las expresiones involucradas.

(a) $\dfrac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} \cdot \dfrac{x-1}{x^3}$

(b) $\dfrac{x + \sqrt{3}}{x^2 + 1} : \dfrac{x-1}{x^2 - 3}$

(c) $\dfrac{x+1}{4x} + \dfrac{3}{x-1}$

(d) $\dfrac{a-2}{1-a} + \dfrac{a}{2}$

3. Operar algebraicamente, factorizar y simplificar al máximo las siguientes expresiones.

(a) $\left(p - \dfrac{4}{p}\right) \cdot \dfrac{p^3}{p^2 + 2p}$

(b) $\dfrac{x}{x^2 - 3x + 2} : \dfrac{3}{x^2 - 1} + \dfrac{1}{x^2 - 3x}$

Ecuaciones e inecuaciones con expresiones algebraicas racionales

Al resolver ecuaciones e inecuaciones que involucran expresiones racionales es importante reconocer los elementos para los cuales las expresiones no tienen sentido. Esto es, los valores para los cuales se anula el denominador.

La estrategia para resolver ecuaciones de este tipo consiste en agrupar los distintos términos y plantear una ecuación en la que una expresión factorizada se iguala a cero. Veamos esto mediante un ejemplo.

Ejemplo 2.5.5

Resolvamos la siguiente ecuación

$$\frac{x^2 + x - 12}{(x-3)^2} = \frac{1}{x-3}.$$

Comencemos observando que $x \neq 3$, pues el denominador no puede anularse. Para resolver este tipo de ecuaciones, escribimos ambas fracciones en un mismo miembro y agrupamos las expresiones, de forma de que quede una expresión factorizada igualada a cero.

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+x-12}{(x-3)^2} - \frac{1}{x-3} &= 0 \\
\frac{x^2+x-12-(x-3)}{(x-3)^2} &= 0 \\
\frac{x^2+x-12-x+3}{(x-3)^2} &= 0 \\
\frac{x^2-9}{(x-3)^2} &= 0 \\
\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)^2} &= 0
\end{aligned}$$

Esta igualdad se verifica si, y solo si el numerador es igual a cero, esto es

$$(x+3)(x-3) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 3 \quad \text{ó} \quad x = -3.$$

Inicialmente indicamos que $x \neq 3$, por lo que la única solución resulta ser $x = -3$.

Para resolver inecuaciones con expresiones racionales, usamos la misma estrategia de agrupar y factorizar la expresión para compararla con el valor 0. De esta forma podemos hacer uso de las reglas de signo, igual que lo que hicimos en el caso de ecuaciones factorizadas. Mostramos el procedimiento en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.5.6

Veamos cómo resolver la inecuación

$$\frac{1}{3-x} - \frac{1}{2x} < \frac{2+x}{2x(3-x)},$$

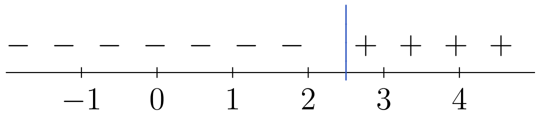
y representar su solución en forma de intervalo.

Comenzamos agrupando todos los términos en un mismo miembro de la desigualdad.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3-x} - \frac{1}{2x} - \frac{2+x}{2x(3-x)} &< 0 \\
\frac{2x-(3-x)-(2+x)}{2x(3-x)} &< 0 \\
\frac{2x-5}{2x(3-x)} &< 0
\end{aligned}$$

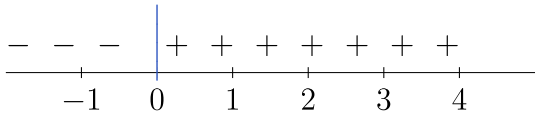
Debe ser $x \neq 0$ y $x \neq 3$, y tenemos tres factores: $2x-5$, $2x$ y $3-x$, para los cuales vamos a realizar un estudio de signo. Tenemos

$2x-5>0 \iff x>\frac{5}{2}$



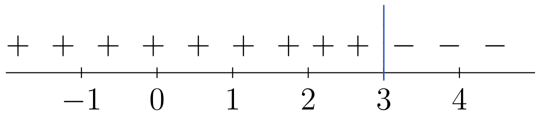
signo de $2x-5$

$2x>0 \iff x>0$



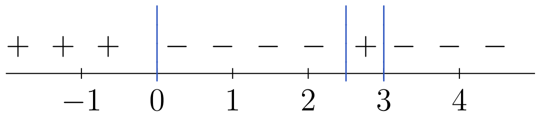
signo de $2x$

$3-x>0 \iff x<3$



signo de $3-x$

signo de $\dfrac{2x-5}{2x(3-x)}$



Luego

$$\frac{2x-5}{2x(3-x)}<0 \iff x\in\mathcal{S}=\left(0,\frac{5}{2}\right)\cup(3,+\infty)\,.$$

Revisemos lo aprendido

1. Considerar la expresión algebraica $\dfrac{x-2}{1-x}$. Completar cada información redondeando la respuesta correcta.
   (a) La expresión no está definida para

   i. $x=2$, ii. $x=1$, iii. $x=0$.

   (b) La expresión se anula (esto es, vale 0) para

   i. $x=2$, ii. $x=1$, iii. $x=0$.

   (c) La expresión toma valores positivos para

   i. $x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$,
   ii. $x\in(-\infty,2)\cup(1,+\infty)$,
   iii. $x\in(1,2)$,
   iv. $x\in(-2,-1)$.

2. Resolver la ecuación y la inecuación siguientes.

   (a) $\dfrac{x}{x^2-x}+\dfrac{x-2}{2x}=1$ (b) $\dfrac{x+3}{4x^2-1}\geqslant 1$

3 Funciones de variable real

Síntesis del bloque temático

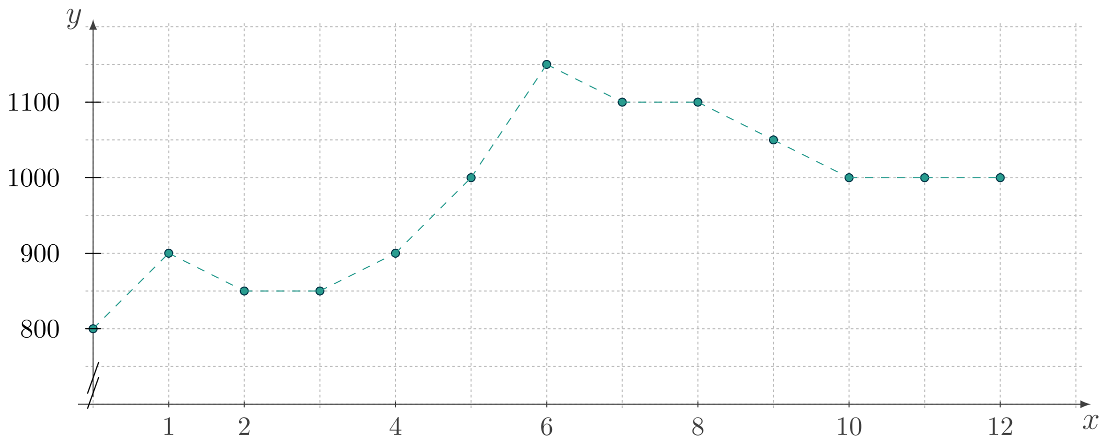
En esta unidad vamos a trabajar con los siguientes conceptos relacionados con funciones de una variable real.

1. Definición, dominio e imagen.
2. Gráfico de funciones, elementos que los caracterizan. Interpretación de información dada a partir del gráfico de una función.
3. Caracterización de las funciones lineales y sus gráficos (rectas). Rectas paralelas y perpendiculares.
4. Caracterización de las funciones cuadráticas y sus gráficos (parábolas).
5. Planteo y resolución de problemas.

3.1 Funciones: conceptos elementales

Consideremos la siguiente situación.

Se introducen 800 *peces en un estanque y se estudia la evolución de esta población. Para esto, cada mes se estima la cantidad de peces, obteniéndose un modelo gráfico como el que se muestra a continuación.*



x: mes del año; y: cantidad de peces

Cada punto del gráfico indica la cantidad de peces que se contabilizaron en cada mes desde iniciado el estudio. Sobre el eje horizontal, llamado eje de las **abscisas**, se indican los meses, y sobre el vertical, llamado eje de las **ordenadas**, se marcan las cantidades de peces registradas cada mes. Los ejes así dispuestos forman el **plano cartesiano**, al que indicamos con el símbolo $\mathbb{R}^2$, y sobre él es posible representar los distintos **pares ordenados** $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

La línea punteada que se agregó al gráfico del ejemplo es una ayuda visual para facilitar la lectura del gráfico, pero no revela información recopilada en este experimento. En el eje vertical vemos dos barras oblicuas que lo cortan. Eso es usual para indicar que se omiten en el gráfico los primeros números reales, y que se empieza a considerar la recta numérica a partir de 800 en este caso.

Un gráfico como este nos permite plasmar de forma visual la información recabada, relacionando la cantidad de peces con los meses transcurridos desde el inicio del experimento. De este gráfico podemos extraer la siguiente información:

- ▷ El estudio duró un año.
- ▷ A lo largo de ese período, la cantidad de peces varió entre 800 y 1150.
- ▷ Inicialmente hubo 800 peces.
- ▷ Un mes después de iniciado el estudio había 900 peces, a los 6 meses se alcanza la máxima población de 1150 peces, y al finalizar el estudio había 1000 peces.

La descripción de esta situación está relacionada con distintos conceptos matemáticos que formalizamos a continuación.

Función, dominio e imagen

Se llama **función real de una variable real** a cualquier aplicación $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, que hace corresponder a cada $x \in D$ uno y solo un valor $f(x) \in \mathbb{R}$. Estas funciones suelen representarse de la forma $y = f(x)$ donde x se llama **variable independiente** e y se llama **variable dependiente**.

En el ejemplo de los peces, tenemos una función $y = f(x)$ en la que la variable independiente x representa los meses que transcurren desde el inicio del experimento, y la variable dependiente y indica la cantidad de peces que había en el estanque. Es decir, el estudio realizado muestra *la cantidad de peces (y) en función de los meses transcurridos (x).*

Por lo general expresamos estas funciones mediante una fórmula. Por ejemplo, escribimos

- ◇ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 4 - 3x^2,$
- ◇ $g : [1, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad g(x) = 2x + \sqrt{x-1}.$

En las situaciones en las que trabajamos con datos reales, como el ejemplo inicial de lo peces en el estanque, no siempre podemos decir cuál es la fórmula exacta que los describe. En ocasiones, se proponen modelos que los aproximen lo mejor posible. Esto es, se eligen fórmulas matemáticas que representen adecuadamente los datos que se quieren describir.

El **dominio** de una función f es el conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ formado por todos los valores $x \in \mathbb{R}$ en los que la función f está definida. Es habitual usar la expresión $\mathrm{Dom}\,(f)$ para indicarlo.

En el ejemplo de los peces, el dominio son los meses del año transcurridos desde el inicio del estudio. El gráfico nos indica que más allá del mes 12 no hay información. Esta fue la información que rescatamos en el primer ítem de la descripción del gráfico, cuando dijimos que *El estudio duró un año.* Matemáticamente, tenemos

$$D = \mathrm{Dom}\,(f) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

En el gráfico de una función, los valores del dominio se ubican siempre en el eje de las abscisas (eje horizontal, o eje de las x). En la siguiente sección veremos más ejemplos de cómo reconocer el dominio de una función a partir de su gráfico.

Para funciones dadas por fórmulas conocidas, el dominio son los valores para los que dicha fórmula tiene sentido. Por ejemplo:

- ◇ El dominio de $f(x) = x^2 - 3x + 1$ es $D = \mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$, pues para cualquier $x \in \mathbb{R}$ es posible calcular $x^2 - 3x + 1$.
- ◇ El dominio de $g(x) = \sqrt[4]{x}$ es $D = \mathrm{Dom}\,(g) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dado que las raíces de índice par no están definidas para números negativos.
- ◇ El dominio de $h(x) = \sqrt[3]{3x-1}$ es $D = \mathrm{Dom}\,(h) = \mathbb{R}$ ya que para cualquier número real podemos realizar este cálculo.

Dos reglas son clave para decidir el dominio de las funciones que estudiaremos en estas notas, y que son dadas por fórmulas:

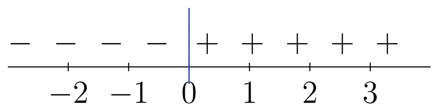
- Las raíces de índice par no pueden calcularse para valores negativos.
- En expresiones racionales, los denominadores no pueden tomar el valor 0.

El siguiente ejemplo muestra cómo utilizar estas reglas.

Ejemplo 3.1.1

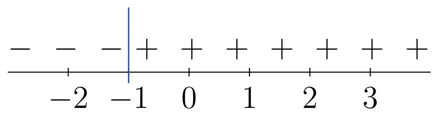
1. Dada $f(x) = \sqrt{2x(x+1)}$, su dominio son los valores de x tales que $2x(x+1) \geqslant 0$. Para encontrar estos valores, hacemos un estudio de signos:

   $2x > 0 \iff x > 0$

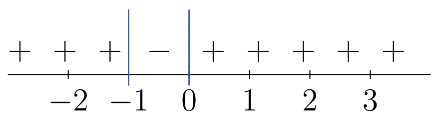
   signo de $2x$

   $x + 1 > 0 \iff x > -1$

   signo de $x + 1$

   signo de $2x(x+1)$

   De esta forma, encontramos que $\mathrm{Dom}\,(f) = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$. Notemos que incluimos los valores -1 y 0 (extremos de los intervalos involucrados) ya que para estos valores se anula la expresión $2x(x+1)$ y por lo tanto forman parte del dominio de f.

2. Dada $g(x) = \dfrac{x}{3x - \sqrt{6}}$, su dominio está formado por los $x \in \mathbb{R}$ tales que $3x - \sqrt{6} \neq 0$. Planteamos

$$3x - \sqrt{6} = 0 \quad \iff \quad x = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

y entonces $\mathrm{Dom}\,(g) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\sqrt{6}}{3}\right\}$.

Cuando la expresión de una función tiene más de un término, podemos estudiar el dominio de cada uno de ellos por separado, y luego el dominio de la función dada estará formado por la intersección de los dominios de cada término (esto es, los puntos en común).

Ejemplo 3.1.2

1. El dominio de
$$f(x) = \frac{2x}{3x-1} + \frac{2}{4-x},$$
está formado por todos los números reales tales que el denominador de estas expresiones sea distinto de cero.
   - El denominador del primer término se anula cuando
   $$3x - 1 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x = \frac{1}{3}.$$
   - El denominador del segundo término se anula cuando
   $$4 - x = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x = 4.$$

   A partir de esto concluimos que $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}, 4\right\}$.

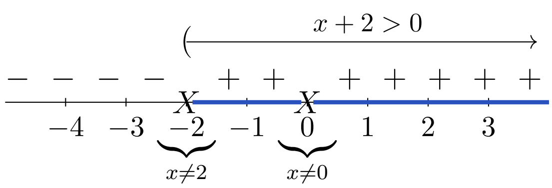
2. Dada
$$g(x) = \frac{x-1}{6x} + \frac{2x}{\sqrt{x+2}},$$
para encontrar su dominio planteamos

   ▷ $6x = 0 \iff x = 0 \longrightarrow$ debe ser $x \neq 0$ para que no se anule el denominador del primer término,

   ▷ $\sqrt{x+2} = 0 \iff x = -2 \longrightarrow$ debe ser $x \neq -2$ para que no se anule el denominador del segundo término,

   ▷ $x + 2 \geqslant 0 \iff x \geqslant -2 \longrightarrow$ debe ser $x \geqslant -2$ para poder evaluar $\sqrt{x+2}$.

   Para interpretar esta información, podemos ayudarnos con el gráfico de una recta numérica sobre el que marcamos los resultados encontrados en cada paso del análisis:



   A partir de esta representación concluimos que $\mathrm{Dom}\,(g) = (-2, 0) \cup (0, +\infty)$.

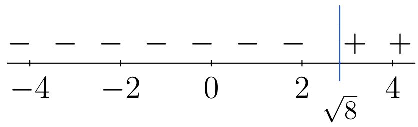
3. El dominio de

$$h(x) = \frac{2x^2 - 5x}{\sqrt{x^2 - 8}}$$

lo encontramos planteando $x^2 - 8 \geq 0$ y $\sqrt{x^2 - 8} \neq 0$, que se pueden combinar y plantear una sola condición

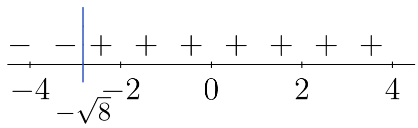
$$x^2 - 8 > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x - \sqrt{8})(x + \sqrt{8}) > 0$$

$x - \sqrt{8} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x > \sqrt{8}$



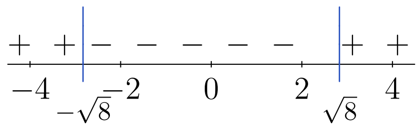
signo de $x - \sqrt{8}$

$x + \sqrt{8} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x > -\sqrt{8}$



signo de $x + \sqrt{8}$

signo de $(x - \sqrt{8})(x + \sqrt{8})$



Así, encontramos que $\mathrm{Dom}\,(h) = (-\infty, -\sqrt{8}) \cup (\sqrt{8}, +\infty)$.

Para conocer el **valor de una función** f en un punto $x_0 \in \mathrm{Dom}\,(f)$, o equivalentemente, la imagen de x_0 al aplicar f, reemplazamos dicho valor en la fórmula que la define. Por ejemplo,

◇ Si $f(x) = 1 - x^2$ entonces el valor de f en $x = -2$ es $f(-2) = 1 - (-2)^2 = -3$. Otra forma de expresarlo es decir que la imagen de -2, al aplicar la función f, es -3.

◇ Dada $g(x) = \dfrac{2x - 1}{x}$, el valor de g en $x = \frac{1}{2}$ es $f\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{2 \cdot \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2}} = 0$.

◇ ¿Para qué valor (o valores) del dominio de $h(x) = 2x - 3$ obtenemos como imagen $y = -1$? Esto es, buscamos valores de x tales que al aplicarles la función h obtenemos como resultado -1. Planteamos

$$2x - 3 = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x = -1 + 3 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1.$$

Así, encontramos un único valor $x = 1$ para el cual $h(x) = -1$

En el ejemplo de los peces planteado al inicio de esta sección, no tenemos una fórmula para reemplazar valores del dominio y calcular su imagen. Podemos decir la imagen de cada punto del dominio a partir de la observación del gráfico. Por ejemplo, en la descripción inicial dijimos:

▷ Inicialmente hubo 800 peces $\longrightarrow$ $f(0) = 800$
▷ Un mes después de iniciado el estudio había 900 peces $\longrightarrow$ $f(1) = 900$
▷ A los 6 meses se alcanza la máxima población de 1150 peces $\longrightarrow$ $f(6) = 1150$
▷ Al finalizar el estudio había 1000 peces $\longrightarrow$ $f(12) = 1000$

Los pares ordenados formados por un punto x en el dominio de f y su correspondiente imagen: $(x, f(x))$, son los que determinan el gráfico de f en el plano cartesiano. Estos son los puntos que vemos en el gráfico de los peces en el estanque. Veamos distintas maneras de expresar en palabras esta información:

$$\begin{array}{lcl} f(0) = 800 & \longrightarrow & (0, 800) \text{ pertenece al gráfico de } f. \\ f(1) = 900 & \longrightarrow & \text{el gráfico de } f \text{ pasa por } (1, 900). \\ f(12) = 1000 & \longrightarrow & (12, 1000) \text{ es un punto del gráfico de } f. \end{array}$$

La **imagen** de una función f es el conjunto de valores $y \in \mathbb{R}$ que resultan de aplicar la función f a los elementos de su dominio. Formalmente se define como

$$\mathrm{Im}\,(f) = \{y = f(x) \in \mathbb{R} : x \in \mathrm{Dom}\,(f)\}.$$

No siempre es fácil determinar la imagen de una función a partir de su fórmula. En las siguientes secciones veremos algunos casos particulares.

En el caso de problemas cotidianos, suele ser posible indicar la imagen de la función involucrada a partir de la información que se nos proporciona. La imagen del ejemplo de los peces está dada por las distintas cantidades de peces registradas. Vemos que

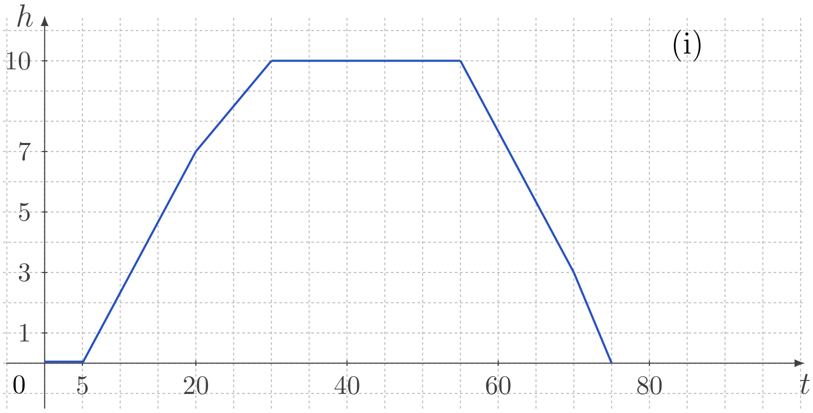
$$\mathrm{Im}\,(f) = \{800, 850, 900, 1000, 1050, 1100, 1150\}.$$

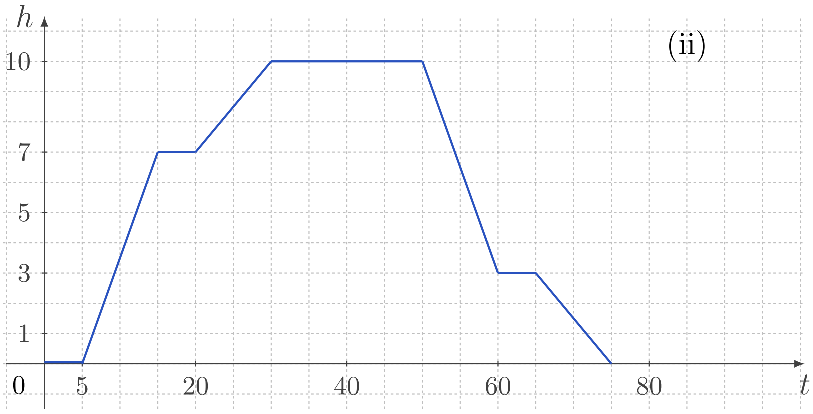
En el gráfico de una función, la imagen siempre se representa en el eje de las ordenadas (eje vertical o eje y). En la siguiente sección veremos más ejemplos de cómo determinar la imagen de una función a partir de la observación de su gráfico.

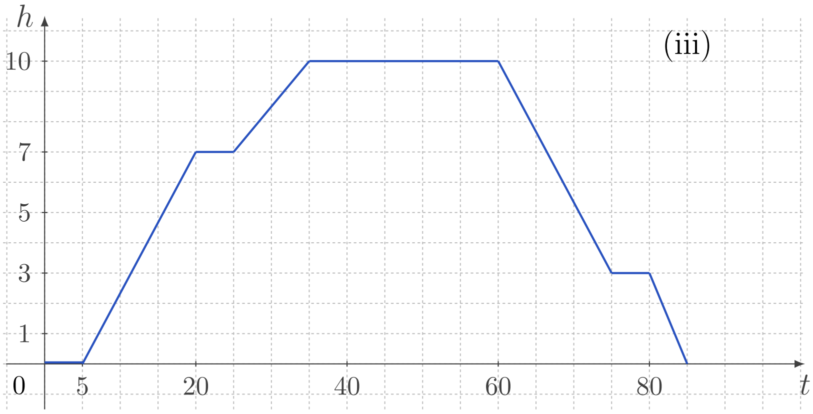
Revisemos lo aprendido

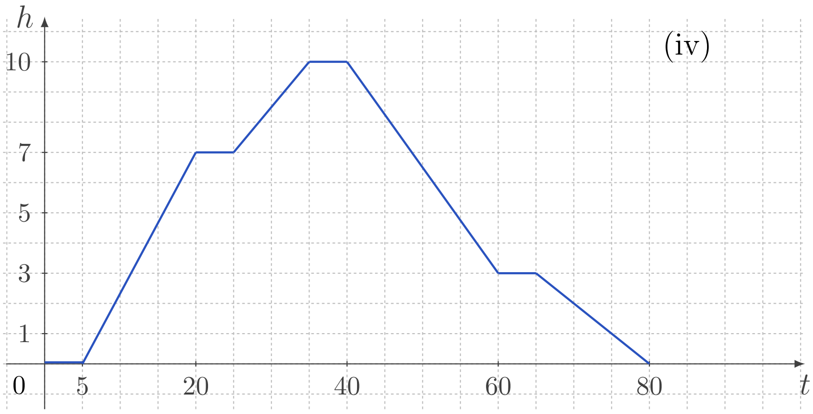
1. Un avión se pone en marcha y luego de 5 minutos de maniobras para el despegue, levanta vuelo. 15 minutos después de levantar vuelo, alcanza una altitud de 7000 m y permanece a esa altura durante 5 minutos que es lo que le lleva atravesar una corriente de aire. Luego de esto, continua su ascenso hasta alcanzar, 10 minutos después, la altura de crucero (eso es, 10.000 m). Mantiene su vuelo en esta altitud durante 25 minutos para luego iniciar su descenso. Le lleva 15 minutos bajar hasta 3000 metros de altura, y permanece allí 5 minutos, mientras coordina su aterrizaje con la torre de control. Luego de este breve período, continua su descenso y 5 minutos después toca tierra y llega a destino.

   (a) ¿Cuál de los siguientes gráficos describe mejor a la altitud de este avión en función del tiempo transcurrido desde su puesta en marcha, según la información dada en la descripción anterior? En todos los casos, t está dado en minutos, y h está dado en miles de metros (esto es, donde vemos $h = 3$ debe interpretarse $h = 3000$ metros).









(b) Llamamos h a la altitud del avión (en metros), y t al tiempo transcurrido (en minutos) y suponemos que el grafico describe aceptablemente la altura del avión en cada instante de tiempo. Responder las siguientes consignas, a partir de la información dada y del gráfico que la representa. Si es necesario, aproximar la respuesta según lo que se observa en el gráfico.

i. ¿Cuál es el dominio de la función h? ¿Cuál es su imagen?

ii. ¿En qué instante (o instantes) t se alcanza una altitud de 5000 m?

iii. ¿Cuál es la altura del avión a los 45 minutos desde que se pone en marcha?

2. Dada $g(x) = \dfrac{x}{2x-3}$, indicar en cada caso la opción verdadera.

   (a) El dominio de g es:

   i. $\operatorname{Dom}(g) = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$

   ii. $\operatorname{Dom}(g) = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$

   iii. $\operatorname{Dom}(g) = \frac{3}{2}$

   iv. $\operatorname{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{3\}$

   (b) El valor de g en $x = -1$,

   i. es $y = g(-1) = -\frac{1}{5}$,

   ii. no es posible calcularlo,

   iii. es $y = g(-1) = \frac{1}{5}$,

   iv. es $y = g(-1) = 1$.

3. Hallar el dominio de las siguientes funciones y expresarlo mediante intervalos.

   (a) $f(x) = -2x^3 + \sqrt[3]{x^2 - 9}$

   (b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-1}}{12x}$

   (c) $f(x) = \dfrac{16}{\sqrt{x^2 - 9x}}$.

4. Calcular, si es posible:

   (a) El valor de $f(x) = 2x + \sqrt{x-1}$ en $x = 1$.

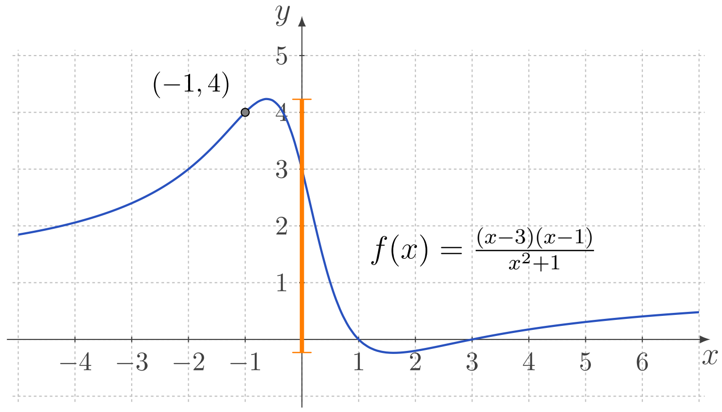
   (b) $p\left(\frac{1}{2}\right)$, siendo $p(r) = \dfrac{r+1}{r^2-1}$.

   (c) La imagen de $x = \sqrt{2}$ al aplicarle la función $g(x) = (x-2)(x+2)$.

   (d) El valor x para el cual la función $q(x) = \dfrac{x}{x-2}$ toma el valor $y = 2$.

Algo más sobre gráficos. Intersecciones con los ejes cartesianos

Como lo ilustra la situación planteada al inicio de la sección, podemos representar gráficamente una función de variable real f en un plano cartesiano. Sobre el eje horizontal representamos los valores del dominio de la función, mientras que en el eje vertical representamos los valores de la imagen. Sobre este plano cartesiano dibujamos los distintos pares ordenados $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$. Por ejemplo,

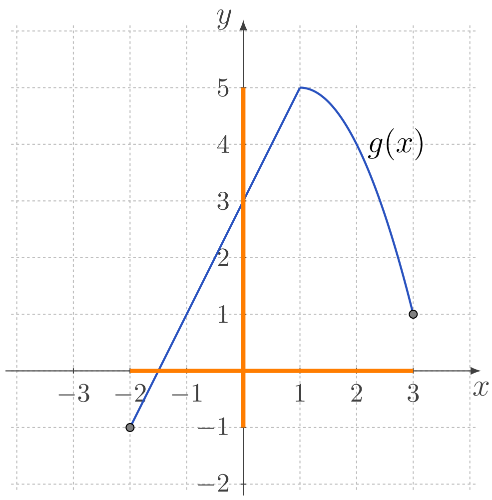


es el gráfico de f, cuyo dominio es $\mathbb{R}$ ($\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}$). Resaltamos sobre el gráfico un segmento vertical sobre el eje y que ilustra el conjunto de valores que forman la imagen de f. Además, marcamos uno de sus puntos: $(-1, 4)$, esto nos indica que $f(-1) = 4$. En otras palabras, decimos que la imagen de $x = -1$ es $y = 4$, o bien que el gráfico pasa por $(-1, 4)$.

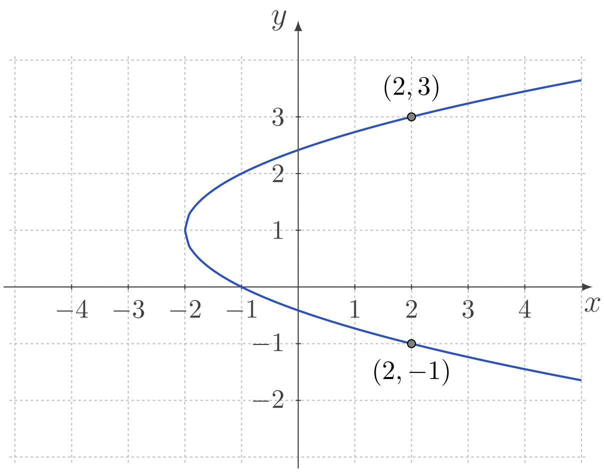
Consideremos el gráfico de la función g. Aunque no conocemos la fórmula que la define, de la observación del gráfico podemos concluir que

$$\operatorname{Dom}(g) = [-2, 3]; \quad \operatorname{Im}(g) = [-1, 5].$$

Además, vemos que $g(-2) = -1$ y $g(3) = 1$. Observemos que tanto en el dominio como en la imagen pusimos corchetes porque tener los círculos rellenos tanto al principio como al final del gráfico, significa que esos valores están incluidos.



Gráficos como el siguiente,

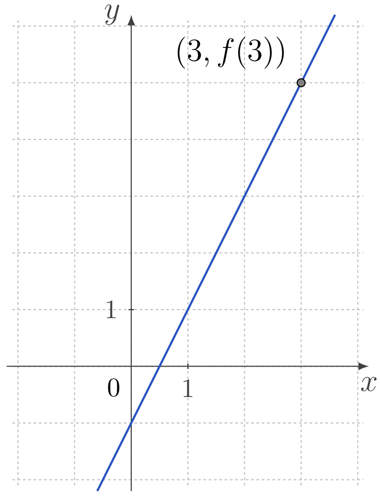


no corresponden a una función ya que se observan valores de x que están asociados con más de un valor en y). Por ejemplo, sobre el gráfico se muestra que a $x = 2$ le corresponden dos valores de y, : $y_1 = -1$ e $y_2 = 3$.

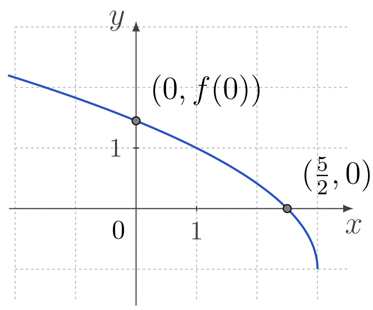
Ejemplo 3.1.3

En los siguientes ejemplos analizamos el dominio, la imagen y la representación gráfica de distintas funciones reales.

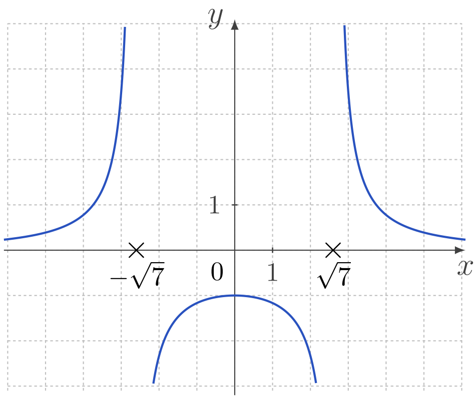
1. La función dada por $f(x) = 2x - 1$ está definida para cualquier número real, es decir que $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$. También $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$, aunque en el gráfico no podemos dibujarla completamente. El gráfico de f es una recta. El valor de f en $x = 3$ es
$$f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5.$$
Así, encontramos que el par ordenado $(3, 5)$ pertenece al gráfico de f.



2. La función $g(x) = \sqrt{6 - 2x} - 1$ está definida para valores de $x \in \mathbb{R}$ que cumplan la condición
$$6 - 2x \geqslant 0 \iff x \leqslant 3.$$
Es decir, $\mathrm{Dom}\,(g) = (-\infty, 3]$. Su imagen es $\mathrm{Im}\,(g) = [-1, +\infty)$, lo cual deducimos a partir del gráfico.



3. La función $h(x) = \dfrac{7}{x^2 - 7}$ está bien definida siempre que el denominador no se anule. Esto es, $x \neq \sqrt{7}$ y $x \neq -\sqrt{7}$. En el gráfico marcamos con cruces estos puntos. Tenemos entonces
$$\mathrm{Dom}\,(h) = \mathbb{R} - \{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}.$$
Y a partir del gráfico se observa que
$$\mathrm{Im}\,(h) = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty).$$



Un punto de interés, al momento de estudiar la representación gráfica de una función real, es conocer sus **intersecciones con los ejes cartesianos**.

- Sobre el eje de las ordenadas, los puntos tienen la forma $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$. Es decir que para encontrar la **intersección con el eje** y reemplazamos con el valor $x = 0$ en la fórmula que define la función. Así, el punto de intersección con este eje es $P = (0, f(0))$.

- Sobre el eje de las abscisas, los puntos tienen la forma $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$. Entonces, para encontrar la **intersección con el eje** x igualamos la expresión de la función a 0 y despejamos los valores de x que satisfacen la ecuación.

Ejemplo 3.1.4

Retomemos la segunda función estudiada en el Ejemplo 3.1.3, dada por $g(x) = \sqrt{6-2x}-1$. La intersección del gráfico con el eje de las ordenadas (eje y) corresponde al par ordenado

$$P = (0, f(0)) = (0, \sqrt{6} - 1).$$

Para encontrar la intersección entre el gráfico de esta función y el eje de las abscisas (eje x) debemos igualar la expresión que define la función a 0. Esto es

$$0 = \sqrt{6-2x} - 1 \iff \sqrt{6-2x} = 1 \iff 6 - 2x = 1 \iff x = \frac{5}{2}.$$

Así, $Q = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$ es el punto en que el gráfico intersecta al eje x (ver figura en el ejemplo anterior).

Ejemplo 3.1.5

Veamos cuál es el dominio de

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x^2-3x+2}}$$

y hallemos las intersecciones del gráfico de esta función con los ejes cartesianos.

Esta función está definida para valores de x tales que

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2} \geqslant 0 \qquad \text{y} \qquad x^2-3x+2 \neq 0.$$

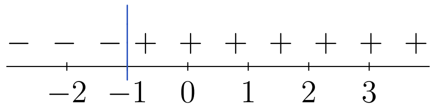
Para analizar la primera de estas condiciones debemos factorizar el denominador y luego hacer un estudio de signos. El discriminante de x^2-3x+2 es $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 > 0$ por lo que la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$ tiene dos soluciones

$$x_1 = \frac{3+1}{2} = 2, \qquad x_2 = \frac{3-1}{2} = 1.$$

Luego los valores $x_1 = 2, x_2 = 1$ no pertenecen al dominio de f. Ahora,

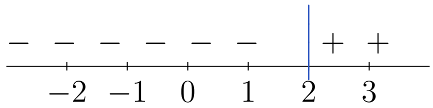
$$\frac{x+1}{x^2-3x+2} \geqslant 0 \quad \iff \quad \frac{x+1}{(x-2)(x-1)} \geqslant 0.$$

$x+1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -1$



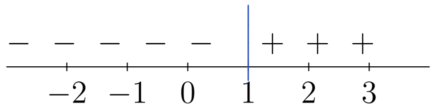
signo de $x+1$

$x-2>0 \iff x>2$



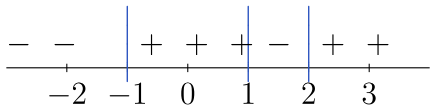
signo de $x-2$

$x-1>0 \iff x>1$



signo de $x-1$

signo de $\dfrac{x+1}{(x-2)(x-1)}$



Entonces tenemos que $\mathrm{Dom}\,(f) = [-1,1) \cup (2,+\infty)$.

Para encontrar la intersección del gráfico de f con el eje y calculamos $y = f(0) = \sqrt{\frac{1}{2}}$, y así el punto de intersección es $P = \left(0, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

Para hallar las intersecciones con el eje x buscamos las soluciones de $f(x)=0$. Esto es,

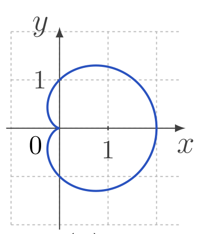
$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x^2-3x+2}} = 0 \iff \frac{x+1}{x^2-3x+2} = 0 \iff x+1=0 \iff x=-1.$$

Luego, el punto de intersección es $Q=(-1,0)$.

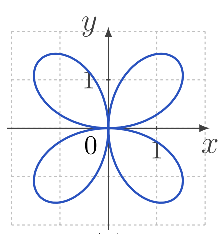
En problemas concretos, las intersecciones con los ejes coordenados pueden proporcionar información de interés particular. En la situación planteada al inicio de la sección, la intersección con el eje y es $(0,800)$, lo que nos dice que al momento de iniciar el estudio (el mes $x=0$) había $y=800$ peces. El gráfico de este ejemplo no tiene intersecciones con el eje x, lo que nos dice que los peces nunca se extinguieron (no hubo $y=0$ peces).

Revisemos lo aprendido

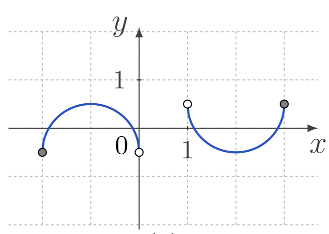
1. Los siguientes gráficos ¿corresponden a funciones de la forma $f: D \to \mathbb{R}$? ¿Por qué?



(a)



(b)



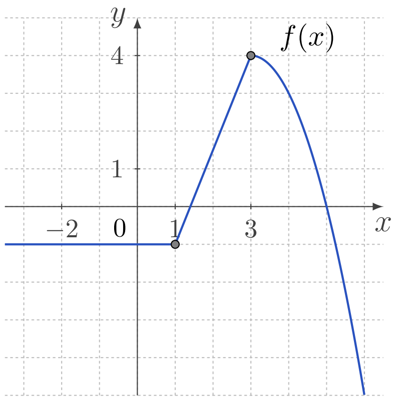
(c)

<u>Nota:</u> El círculo vacío en el gráfico (c) indica que ese punto no pertenece al gráfico de la función. El círculo pintado indica que ese punto sí pertenece al gráfico.

2. Hallar el dominio de las siguientes funciones y sus intersecciones con los ejes coordenados.

   (a) $f(x) = 3x - 1$ (b) $g(x) = \sqrt{4-x} - 1$ (c) $h(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$.

3. A partir del gráfico de f, determinar



   (a) el dominio y la imagen de esta función,
   (b) si es posible, $f(3)$, $f(-2)$,
   (c) si existen, los puntos de intersección con los ejes coordenados.

3.2 Función lineal. Rectas

Una **función lineal** es una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la fórmula

$$f(x) = ax + b,$$

donde a y b son números reales.

El gráfico en el plano cartesiano de una función lineal es una **recta** no vertical de ecuación

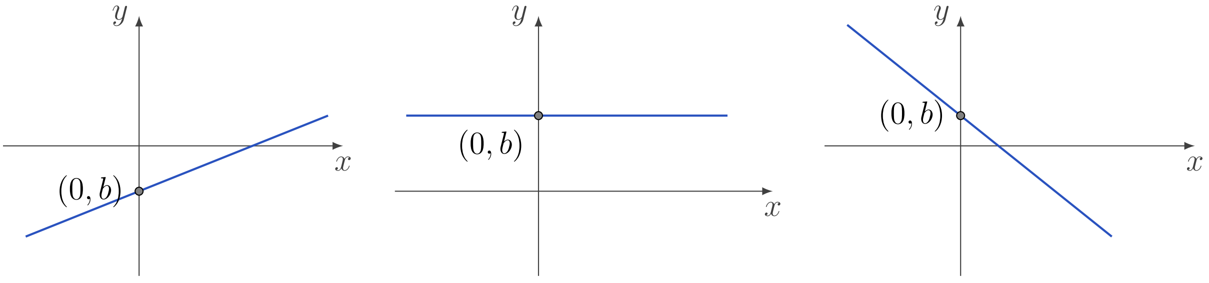
$$y = ax + b.$$

El valor a es la **pendiente** de la recta y mide la inclinación de la misma. Si la pendiente es positiva la recta es creciente, si $a = 0$ la recta es horizontal y si la pendiente es negativa la recta es decreciente. El valor b en la ecuación de la recta es la **ordenada al origen** y nos indica el punto en que la recta intersecta al eje y. Notemos que b es el valor que resulta de reemplazar en la función con $x = 0$. Es decir

$$f(x) = ax + b \qquad \Longrightarrow \qquad b = f(0).$$

Así, el punto de intersección de una recta con el eje y tiene coordenadas $(0, b)$.

En los siguientes gráficos se muestran rectas de la forma $y = ax + b$ considerando pendiente positiva, cero o negativa, y en cada caso se marca con un punto la ordenada al origen.



$a > 0$ $\qquad$ $a = 0$ $\qquad$ $a < 0$

- Si la pendiente de la recta no es cero, el gráfico intersecta al eje x, como se puede observar en los gráfico anteriores (casos $a > 0$ y $a < 0$). De acuerdo a lo visto en la sección anterior resolviendo $0 = ax + b$, obtenemos que el punto de intersección con el eje x de una recta no horizontal es $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

- Si la pendiente de la recta es cero el gráfico no intersecta al eje x como se puede observar en el gráfico anterior (caso $a = 0$), salvo que la recta sea exactamente $y = 0$ (es decir $a = b = 0$) y en este caso la recta intersecta infinitas veces al eje x. Escribimos los puntos de intersección como $(x_0, 0)$, con $x_0 \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.2.1

A continuación estudiamos la función lineal $f(x) = -3x + 2$. Nos interesa representarla gráficamente en el plano cartesiano, indicar su dominio y su imagen y calcular los puntos de intersección con los ejes coordenados.

La ecuación de la recta es

$$y = -3x + 2.$$

Para graficarla es suficiente encontrar dos puntos de la recta.

▷ Si $x = 0$ entonces $y = 2$, que es la ordenada al origen. Luego $P = (0, 2)$ pertenece a la recta.

▷ Si $x = 1$ entonces $y = -3 \cdot 1 + 2 = -1$, así encontramos el punto $M = (1, -1)$ que pertenece a la recta.

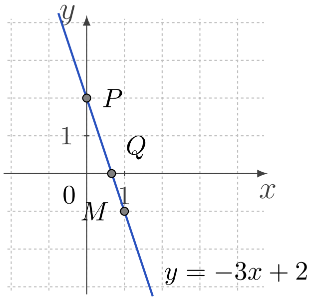
Ubicando los puntos anteriores en el plano podemos graficar la recta que los contiene. Se observa claramente que

$$\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}, \quad \mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}.$$

La intersección con el eje y es el punto $P = (0, 2)$, y si resolvemos la ecuación

$$0 = -3x + 2,$$

obtenemos el punto de intersección con el eje x, que resulta ser $Q = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$.



La ecuación de una recta puede estar dada en forma **implícita**

$$my + nx + d = 0,$$

en este caso debemos despejar la variable y para obtener la ecuación de la recta. Luego, si $m \neq 0$ resulta

$$y = -\frac{n}{m}x - \frac{d}{m}.$$

Si $m = 0$ y $n \neq 0$, la solución de la ecuación $nx + d = 0$ es un valor de x constante $\left(x = -\frac{d}{n}\right)$ que abreviamos de la forma $x = c$, con $c \in \mathbb{R}$. El gráfico correspondiente es una **recta vertical**. Esta ecuación no se corresponde con ninguna función real ya que al valor $x = c$ se le asocian todos los valores de $y \in \mathbb{R}$.
Por ejemplo,

- La recta $3x - 2y + 4 = 0$ está dada en forma implícita. Para poder decir cuál es el valor de la pendiente y cuál de la ordenada al origen, despejamos y

$$-2y = 0 - 3x - 4 \Longrightarrow y = \frac{-3x - 4}{-2} \Longrightarrow y = \frac{3}{2}x + 2$$

  En este caso, la pendiente es $\frac{3}{2}$ y la ordenada al origen es 2.

- La recta $2x + 3 = 0$ está dada en forma implícita. En este caso la variable y no aparece. Al despejar x nos queda: $x = -\frac{3}{2}$ que es una recta vertical y no es función ya que el mismo valor de x toma los infinitos valores de y.

Observación 8

Recordemos que si queremos ver si un punto pertenece a una recta basta con reemplazar las coordenadas del punto en la ecuación (dada en forma implícita o explícita) y ver si se satisface la misma. Por ejemplo, si queremos ver si el punto $(1, -1)$ pertenece a la recta $3x - 2y + 4 = 0$, reemplazamos a x por 1 y a y por -1,

$$3 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + 4 = 3 + 2 + 4 = 9.$$

Como $9 \neq 0$ concluimos que el punto no pertenece a la función dada.

Revisemos lo aprendido

1. Determinar la pendiente y la ordenada al origen de las siguientes funciones lineales.

   (a) $f(x) = 3x + 1,$

   (b) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2,$

   (c) $f(x) = -4x,$

   (d) $f(x) = -1.$

2. Para cada una de las rectas dadas a continuación se pide: calcular los puntos de intersección con los los ejes coordenados, graficar e indicar dominio e imagen.

(a) $y = 2x - 3$,

(b) $5x + 2y - 1 = 0$,

(c) $y = 3$,

(d) $-\dfrac{3}{2}x + 3y - 2 = 0$.

3. Indicar si los puntos $A = (2, 3)$, $B = (3, 1)$ y $C = (-2, 1)$ pertenecen a la recta de ecuación $y = \frac{2}{3}x - 1$.

Ecuación de una recta a partir de datos

En algunos casos no contamos con la ecuación de la recta, pero podemos deducirla a partir de distintos datos conocidos. Nos podemos encontrar con alguna de las siguientes situaciones.

1. *Conocemos la pendiente* a *y un punto* (x_0, y_0) *que pertenece a la recta.*

   Si el valor de la pendiente es a entonces la ecuación de la recta está dada por

   $$y = ax + b.$$

   Nos falta encontrar el valor de la ordenada al origen, pero sabemos que la recta pasa por el punto (x_0, y_0) entonces reemplazamos en la ecuación anterior, a x por x_0 y a y por y_0. De esta manera nos queda una ecuación donde la incógnita que tenemos que hallar es b. Despejamos b y finalmente escribimos la ecuación de la recta con el valor de a dado y el valor de b encontrado.

   Otra forma de resolver esta situación es usar directamente la fórmula que está dada por

   $$y = a(x - x_0) + y_0.$$

2. *Conocemos dos puntos* (x_0, y_0) *y* (x_1, y_1)*, con* $x_0 \neq x_1$*, que pertenecen a la recta.*

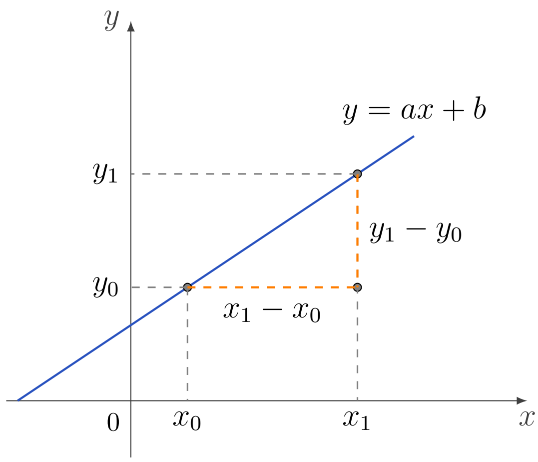
   Podemos calcular la pendiente de la recta como

   $$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

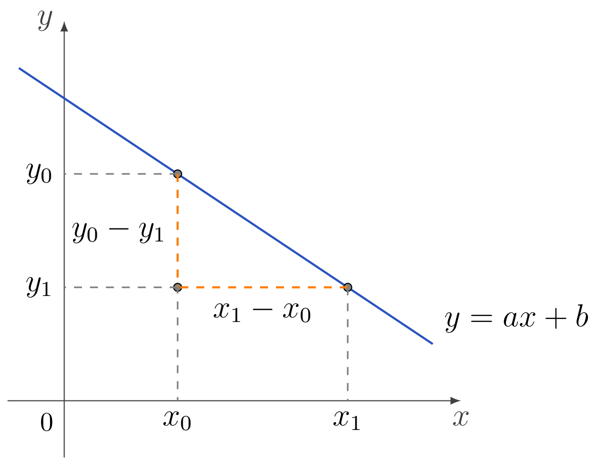
   Con la pendiente y los puntos de la recta, de acuerdo al inciso anterior, la ecuación resulta

   $$y = a(x - x_0) + y_0 \qquad \text{ó} \qquad y = a(x - x_1) + y_1.$$

Observemos que la fórmula de pendiente dada es igual al cociente del desplazamiento vertical (en la coordenada y) sobre el desplazamiento horizontal (en la coordenada x) entre dos puntos de una recta.

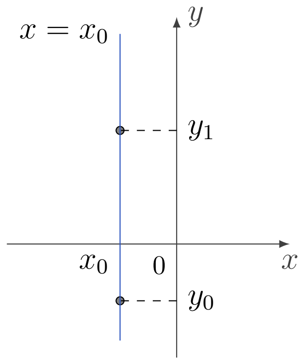


$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} > 0$$



$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = -\frac{y_0 - y_1}{x_1 - x_0} < 0$$

Si conocemos dos puntos por donde pasa la recta, pero las coordenadas de x de estos puntos coinciden (es decir $x_0 = x_1$) no podemos aplicar la fórmula dada ya que estaríamos dividiendo por $x_1 - x_0 = 0$.
En este caso no hay que hacer ninguna cuenta, la ecuación de la recta buscada está dada por $x = x_0$, y su gráfico es una recta vertical.



Ejemplo 3.2.2

Hallar la ecuación de la recta a partir de los datos que se dan en cada caso.

1. Tiene pendiente $-\frac{1}{2}$ y pasa por el punto $(-3, 2)$.

   Como la pendiente es $-\frac{1}{2}$, la ecuación de la recta va a estar dada por

$$y = -\frac{1}{2}x + b.$$

   Ahora, como sabemos que pasa por el punto $(-3, 2)$, reemplazamos en la ecuación anterior a x por -3 y a y por 2, obtenemos una ecuación para poder despejar b

$$2 = -\frac{1}{2} \cdot (-3) + b \quad \Longrightarrow 2 = \frac{3}{2} + b \quad \Longrightarrow 2 - \frac{3}{2} = b \quad \Longrightarrow b = \frac{1}{2}.$$

   Luego la ecuación de la recta buscada es $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

2. Pasa por los puntos $P = (-2, 1)$ y $Q = (-1, 7)$.

   Como no coinciden las coordenadas de x podemos aplicar la fórmula dada en el caso

2 para hallar el valor de la pendiente

$$a = \frac{7-1}{-1-(-2)} \Longrightarrow a = \frac{6}{1} \Longrightarrow a = 6$$

Luego reemplazamos en la fórmula del caso 1, usando el valor de la pendiente hallada y cualquiera de los dos puntos (el resultado es independiente del punto elegido)

$$y = 6\,(x-(-2)) + 1 \Longrightarrow y = 6x + 12 + 1 \Longrightarrow y = 6x + 13$$

3. Pasa por los puntos $A = (-1, -3)$ y $B = (-1, 5)$.

   En este caso no podemos aplicar la fórmula del caso 2 para hallar la pendiente, no hay que hacer cuentas, la recta es vertical y su ecuación es $x = -1$.

Las funciones lineales también nos sirven para representar situaciones problemáticas.

Ejemplo 3.2.3

En algunos países la temperatura se mide en grados Fahrenheit ($°F$). En esta unidad de medida el agua se congela a $32°F$ y el punto de ebullición se alcanza a los $212°F$. Sabiendo que la relación entre $°F$ y $°C$ es lineal, ¿cuál es la fórmula que expresa la temperatura en grados Celsius en función de la temperatura dada en grados Fahrenheit? Haciendo uso de la relación encontrada responder

1. ¿Cuál es la temperatura en grados Celsius que corresponde a $51,26°F$?
2. ¿Cuál es la temperatura en grados Fahrenheit que corresponde a $18°C$?

Llamamos y a la temperatura dada en grados Celsius y x a la temperatura dada en grados Fahrenheit. Buscamos entonces una función lineal de la forma $y = f(x) = ax + b$.

Para determinar los valores de a y b debemos utilizar los datos proporcionados por el problema y relacionarlos con datos conocidos: en grados Celsius, el agua se congela a $0°C$ y entra en ebullición a $100°C$. De esta forma, conocemos dos puntos que pertenecen al gráfico de la función lineal buscada: $P_1 = (32, 0)$, $P_2 = (212, 100)$. Utilizando la fórmula para la pendiente tenemos

$$a = \frac{100-0}{212-32} = \frac{5}{9}.$$

Calculamos b reemplazando P_1 en la ecuación de la recta

$$y = \frac{5}{9}x + b \quad \Longrightarrow \quad 0 = \frac{5}{9}32 + b \quad \Longrightarrow \quad b = -\frac{160}{9}.$$

Luego la función lineal buscada es

$$y = f(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}.$$

Para responder a las preguntas planteadas simplemente reemplazamos el valor dado en la fórmula encontrada.

1. La incógnita es el valor en grados Celsius, es decir el valor de y. Reemplazamos entonces con $x = 51,26$ y resulta

$$y = \frac{5}{9}51,26 - \frac{160}{9} = \frac{256,3 - 160}{9} = 10,7.$$

   Es decir que $51,26°F$ equivalen a $10,7°C$.

2. En este caso, el valor buscado es el de la variable x y el dato es el valor $y = 18$.

$$18 = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9} \quad \Longrightarrow \quad x = \left(18 + \frac{160}{9}\right) : \frac{5}{9} = 64,4.$$

   Es decir que $18°C$ equivalen a $64,4°F$.

En algunos casos, las variables involucradas en el problema no pueden tomar cualquier número real. Por ejemplo, si estudiamos las ganancias de un comerciante en función de la cantidad de productos vendidos, la variable asociada a los productos vendidos deberá ser un número natural. Es decir, no tendremos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Aún así podemos modelar el problema, sin olvidar estas restricciones que le dan sentido a la situación.

Ejemplo 3.2.4

Una empresa de catering ofrece un servicio que tiene un costo fijo de \$1250 más \$ 170 por persona. El salón tiene capacidad para 180 personas.

1. Encontrar una función que establezca el costo del servicio en función de la cantidad de personas.
2. ¿Cuál es el dominio de esta función? Dar una representación gráfica de la misma.
3. ¿Cuál es el costo del servicio si asisten al evento 85 personas?
4. Si el costo de un evento fue de \$ 21.310 ¿cuántas personas asistieron?
5. ¿Es posible que el costo de un evento haya sido, exactamente, de \$ 25.000?

Vamos a llamar p a la cantidad de personas, y C al costo del servicio.

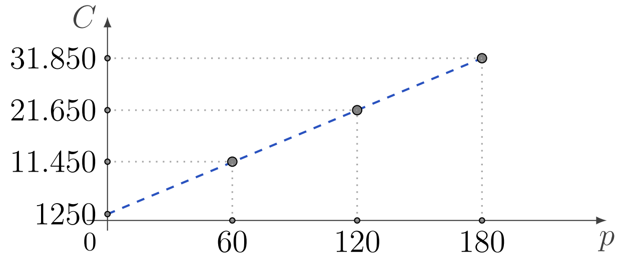
1. La relación entre costo y cantidad de personas está dada por

$$C(p) = 170\,p + 1250.$$

2. El dominio de esta función es el subconjunto de los números naturales menores o iguales a 180 (que es el número máximo de personas que entran en el salón). Es decir,

$$\text{Dom}\, f = \{1, 2, 3, ..., 180\} = \{p \in \mathbb{N} : p \leqslant 180\}.$$

   Gráficamente tenemos un conjunto finito de pares ordenados $(p, C(p))$. Marcamos algunos de ellos en el plano cartesiano y los unimos con una línea punteada.



3. Para saber el costo del servicio para 85 personas, reemplazamos en la ecuación con $p = 85$.
$$C(85) = 170 \cdot 85 + 1250 = 15.700.$$
Así, para 85 personas el costo del servicio es de $\$\,15.700$.

4. Si el costo de un evento fue de \$21.310, reemplazamos con este valor en el lugar de la variable C.
$$21.310 = 170\,p + 1250 \quad \Longrightarrow \quad p = (21.310 - 1250) : 170 = 118.$$
Entonces, podemos afirmar que al evento asistieron 118 personas.

5. En este caso tenemos
$$25.000 = 170\,p + 1250 \quad \Longrightarrow \quad p = (25.000 - 1250) : 170 \simeq 139,70.$$
Este valor de p no tiene sentido en el contexto del problema que estamos estudiando. Luego un costo exacto de $\$\,25.000$ no es posible. Puede ser que en un evento de 140 personas, cuyo costo sería $C(140) = 170 \cdot 140 + 1250 = 25.050$, la empresa decida redondear el precio a 25.000.

Hallar la ecuación de la recta a partir de diferentes datos, también nos sirve para determinar si tres puntos del plano están ubicados sobre la misma recta. Veamos el siguiente ejemplo que muestra una forma de resolver tal situación.

Ejemplo 3.2.5

Determinemos en forma analítica si los puntos $A = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $B = \left(-1, -\frac{2}{3}\right)$ y $C = (-2, -1)$ están alineados.

Una forma de resolver este problema es encontrar la ecuación de la recta que pasa por dos de estos puntos y luego verificar si el punto restante pertenece a esta recta. Empecemos entonces buscando la ecuación de la recta y_{AB} que pasa por A y B. La pendiente de esta recta es
$$a = \frac{-\frac{2}{3} - 2}{-1 - \frac{1}{2}} = -\frac{8}{3} : \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{16}{9},$$
y con esto ya conocemos la pendiente y un punto que pertenece a la recta (por ejemplo A).

Entonces la ecuación de la recta es

$$y_{AB} = \frac{16}{9}\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{16}{9}x + \frac{10}{9}.$$

Veamos si el punto $C = (-2, -1)$ pertenece a la recta y_{AB}, es decir si al remplazar $x = -2$ en la ecuación obtenemos $y = -1$. Reemplazamos $x = -2$ y encontramos

$$y = \frac{16}{9} \cdot (-2) + \frac{10}{9} = -\frac{22}{9} \neq -1.$$

Luego C no pertenece a la recta y_{AB} y por lo tanto los tres puntos no están alineados.

Revisemos lo aprendido

1. Hallar la ecuación de la recta a partir de los datos que se indican en cada caso.
   (a) La pendiente es 2 y pasa por el punto $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$.
   (b) La pendiente coincide con la de la recta $4x - 5y = 2$ y corta al eje x en 2.
   (c) Pasa por los puntos $\left(3, \frac{5}{2}\right)$ y $\left(-1, -\frac{7}{2}\right)$.
   (d) Pasa por los puntos $(3, -4)$ y $(5, -4)$.
2. Determinar, analíticamente, si los puntos $M = \left(3, \frac{5}{2}\right), N = \left(-1, -\frac{7}{2}\right)$ y $P = \left(\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}\right)$ están alineados.
3. El servicio de energía eléctrica urbana cobra, mensualmente a cada usuario, un monto fijo de 12 dólares a lo que adiciona un monto de 0,2 dólares por kilovatios-hora consumido ese mes.
   (a) Encontrar una función lineal que modele el gasto que tendrá un cliente en un mes en función de los kilovatios consumidos.
   (b) Si este mes un usuario del servicio consumió 62 kilovatios-hora, ¿cuánto deberá pagar?
   (c) Si el gasto de un cliente este mes fue de $23,6$ dólares, ¿cuantos kilovatios-hora consumió?

Rectas paralelas y perpendiculares

Dos rectas son **paralelas** si tienen la misma pendiente o si ambas son paralelas al eje y. Si además de la pendiente tienen la misma ordenada al origen las rectas son **coincidentes**.

Dos rectas de pendientes $a_1 \neq 0$ y $a_2 \neq 0$ son **perpendiculares** si $a_1 \cdot a_2 = -1$, es decir, si el valor de una pendiente es el opuesto e inverso del valor de la otra pendiente, $a_2 = -\frac{1}{a_1}$.

Si la pendiente de una recta es cero, es decir, si la recta es horizontal y tiene ecuación $y = b$, $b \in \mathbb{R}$, entonces dicha recta es perpendicular a cualquier recta vertical de ecuación $x = c$, $c \in \mathbb{R}$.

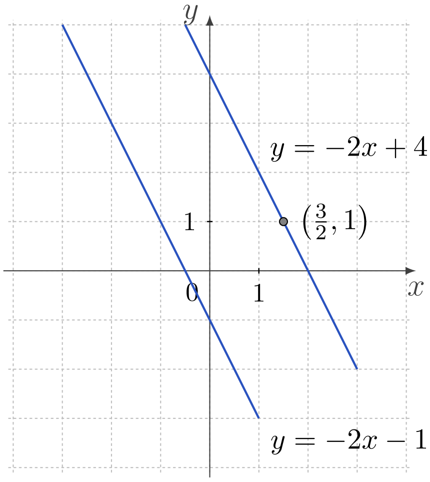
Ejemplo 3.2.6

Veamos cómo hallar la ecuación de una recta paralela a $y = -2x - 1$ y que pase por el punto $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$.

Como la recta que buscamos debe ser paralela a la dada, sabemos que la pendiente tiene que ser la misma, entonces $a = -2$. Luego, la ecuación de la recta buscada es

$$y = -2\left(x - \frac{3}{2}\right) + 1 \Longrightarrow y = -2x + 4$$

Mostramos a la derecha el gráfico de las dos rectas en un mismo sistema de ejes coordenados.



Ejemplo 3.2.7

Veamos cómo encontrar la ecuación de la recta que corta al eje de abscisas en $x = -2$ y es perpendicular a la recta $2x - 3y + 1 = 0$.

Para encontrar la pendiente de la recta dada debemos despejar la variable y.

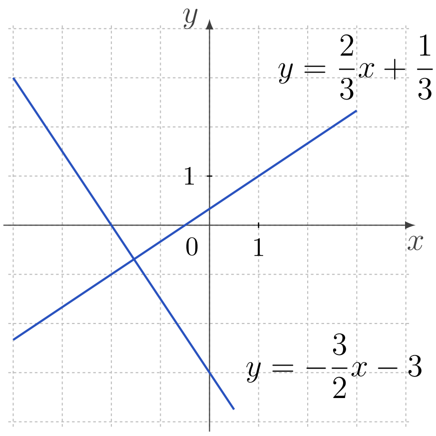
$$2x - 3y + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 3y = 2x + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}.$$

Entonces la pendiente de la recta buscada es $a = -\frac{3}{2}$.

Además, la recta corta el eje de las abscisas en $x = -2$, y esto quiere decir que la recta pasa por el punto $(-2, 0)$. Entonces, la ecuación de la recta buscada es

$$y = -\frac{3}{2}(x - (-2)) + 0 \Longrightarrow y = -\frac{3}{2}x - 3.$$

Mostramos a la derecha el gráfico de las dos rectas en un mismo sistema de ejes coordenados.



Revisemos lo aprendido

1. En cada caso, hallar la ecuación de la recta que:

(a) pasa por el punto $(1, 3)$ y es paralela a la recta $y = \frac{1}{3}x - 2$,

(b) es perpendicular al eje x y pasa por el punto $(-1, -2)$,

(c) es perpendicular a la recta $2x + 3y = 4$ y pasa por el origen.

2. Dadas las rectas

$$L_1 : y = \left(k - \frac{1}{2}\right) x - 1, \quad L_2 : y = -2kx + 4$$

hallar el o los valores de k para que las rectas sean:

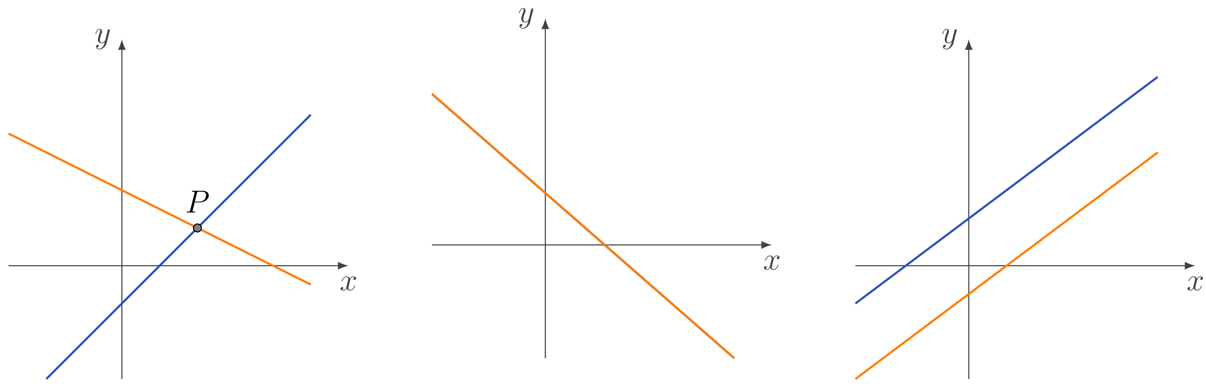
(a) paralelas,

(b) perpendiculares.

Intersección entre rectas

Para resolver muchos ejercicios nos puede interesar saber la intersección entre dos rectas $L_{1\ 2}$, si es que existe. Es decir, nos interesa un punto $P = (x_0, y_0)$ que pertenece a ambas rectas: $P \in L_1$ y $P \in L_2$.

Dadas dos rectas, se pueden dar algunas de las tres situaciones que muestra el gráfico a continuación. En el primer caso (gráfico de la izquierda) las rectas se cortan en un punto $P = (x_0, y_0)$. En el segundo caso (gráfico central) las rectas son iguales, se las llama paralelas coincidentes y se intersectan en todos sus puntos. En el último caso (gráfico de la derecha) las rectas son paralelas no coincidentes, y en este caso no se cortan, es decir, no tienen puntos de intersección.



Si queremos hallar el punto de intersección entre dos rectas, si es que este existe, necesitamos averiguar cuando coinciden los valores de y, entonces igualamos las ecuaciones. Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.8

Veamos cómo hallar el punto de intersección entre las rectas L_1 y L_2 dadas por

$$L_1 : \ y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}; \qquad L_2 : \ y = -\frac{1}{2}x.$$

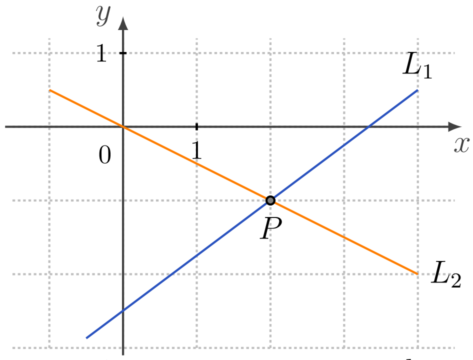
Buscamos un punto $P = (x_0, y_0)$ que pertenezca a ambas rectas. Esto es, que si lo reemplazamos en la ecuación de cada recta se verifique la igualdad. Esto significa que el valor de la coordenada y es el mismo en ambas ecuaciones. Por esto, la estrategia para encontrar este punto es igualar las expresiones:

$$\frac{3}{4}x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}x$$

Ahora tenemos una ecuación que sólo depende de la variable x, despejamos:

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x = \frac{5}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{5}{4}x = \frac{5}{2}$$

$$x = \frac{5}{2} : \frac{5}{4} \quad \Longrightarrow \quad x = 2$$



Con este valor de x reemplazamos en alguna de las dos ecuaciones para encontrar el correspondiente valor de y, aunque es conveniente reemplazar en las dos ecuaciones para corroborar que el valor de y resultante sea el mismo.

Reemplazamos en L_1 : $y = \frac{3}{4} \cdot 2 - \frac{5}{2} = -1$. Reemplazamos en L_2 : $y = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$.

De esta manera encontramos que las dos rectas se intersectan en el punto $P = (2, -1)$, lo cual coincide con lo que se observa en el gráfico.

Recordemos la fórmula que nos permite calcular la distancia entre dos puntos del plano, ya que la utilizaremos en algunos ejercicios. La **distancia** entre dos puntos $A = (x_0, y_0), B = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ está dada por

$$d((x_1, y_1), (x_0, y_0)) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

Esta fórmula se deduce a partir del Teorema de Pitágoras, y nos indica la medida del segmento determinado por esos dos puntos.

Ejemplo 3.2.9

Consideremos las rectas dadas por

$$L_1 : y = 2x + 4, \qquad L_2 : x + 2y = 2.$$

Veremos que estas rectas determinan, junto con el eje de las abscisas, un triángulo rectángulo. Luego, haciendo uso de la fórmula de distancia, calcularemos su área y su perímetro.

Comenzamos buscando la ecuación explícita de L_2, la cual resulta ser

$$L_2 : x + 2y = 2 \iff 2y = 2 - x \iff y = -\frac{1}{2}x + 1.$$

Dado que las pendientes $a_1 = 2$ y $a_2 = -\frac{1}{2}$ de ambas rectas son opuestas e inversas, las rectas son perpendiculares, es decir, se cortan formando un ángulo recto.

Veamos ahora los puntos en que cada recta intersecta al eje x reemplazando el valor de y por 0.

- ▷ Para L_1, $\quad 0 = 2x + 4 \implies x = -2.$
- ▷ Para L_2, $\quad 0 = -\dfrac{1}{2}x + 1 \implies x = 2.$

Llamemos $R = (-2, 0)$ al punto del plano en que la recta L_1 intersecta al eje x, y llamemos $Q = (2, 0)$ al punto en que se intersectan la recta L_2 con este mismo eje.

Ahora, el punto $P = (x_0, y_0)$ en el que se intersectan ambas rectas lo encontramos igualando las expresiones para la variable y de cada recta, ya que en la intersección estos valores deben ser iguales. Así

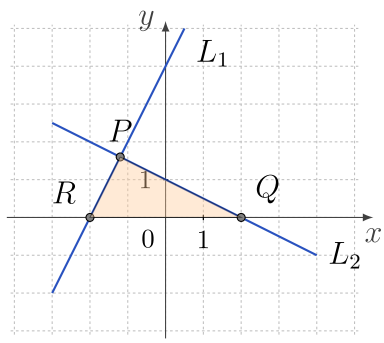
$$\begin{aligned} y_{L_1} = y_{L_2} \quad &\iff \quad 2x + 4 = -\frac{1}{2}x + 1 \\ &\iff \quad 2x + \frac{1}{2}x = 1 - 4 \\ &\iff \quad \frac{5}{2}x = -3 \quad \iff \quad x = -\frac{6}{5}. \end{aligned}$$

Con este valor de x podemos ahora encontrar el correspondiente valor de y reemplazando en cualquiera de las ecuaciones de las rectas. Por ejemplo, al reemplazar en L_1 resulta

$$y = 2\left(\frac{6}{5}\right) + 4 = -\frac{12}{5} + 4 = \frac{8}{5}.$$

Si reemplazáramos en L_2 deberíamos obtener el mismo valor.

$$\begin{aligned} x + 2(2x + 4) &= 2 \\ 5x &= -6 \\ x &= -\frac{6}{5} \end{aligned}$$



Reemplazando con este valor en la primera ecuación resulta

$$y = 2x + 4 = 2\left(-\frac{6}{5}\right) + 4 = \frac{8}{5}.$$

Así, $P = \left(-\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$ es el punto en que se intersectan L_1 y L_2.

Para calcular el perímetro y el área del triángulo $\overset{\triangle}{PQR}$ necesitamos calcular la medida de sus lados.

La medida del segmento $\overline{RQ}$ es muy simple de determinar sin necesidad de fórmulas. Tenemos $|\overline{RQ}| = 4$. Las medidas de los restantes lados de este triángulo las calculamos usando la fórmula de distancia entre dos puntos de $\mathbb{R}^2$.

◇ $|\overline{PR}| = d(P,R) = \sqrt{\left[-2-\left(-\frac{6}{5}\right)\right]^2 + \left(0-\frac{8}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25}+\frac{64}{25}} = \frac{4}{5}\sqrt{5}.$

◇ $|\overline{PQ}| = d(P,Q) = \sqrt{\left[2-\left(-\frac{6}{5}\right)\right]^2 + \left(0-\frac{8}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{256}{25}+\frac{64}{25}} = \frac{8}{5}\sqrt{5}.$

Ahora podemos calcular el perímetro del triángulo que, expresado en unidades de medida genéricas u. m., resulta

$$\mathcal{P} = 4\,\text{u.m.} + \frac{4}{5}\sqrt{5}\,\text{u.m.} + \frac{8}{5}\sqrt{5}\,\text{u.m.} = 4 + \frac{12}{5}\sqrt{5}\,\text{u.m.}$$

Además podemos calcular el área del triángulo. Si consideramos el lado $\overline{PQ}$ como base, el lado $\overline{PR}$ nos da la altura del triángulo y así obtenemos

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\sqrt{5}\,\text{u.m.}\cdot\frac{8}{5}\sqrt{5}\,\text{u.m.} = \frac{16}{5}\,\text{u.m.}^2$$

Otra forma de calcular el área es usar como base el lado $\overline{RQ}$, en este caso la altura es la coordenada y del punto P, de esta manera

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\cdot 4\,\text{u.m.}\cdot\frac{8}{5}\,\text{u.m.} = \frac{16}{5}\,\text{u.m.}^2$$

Revisemos lo aprendido

1. Hallar, si existe, el punto de intersección entre las siguientes rectas.
   (a) $L_1 : x - 3y = 1, \quad L_2 : 2x + 6y = 4$
   (b) $R_1 : -2x + 4 = 3y, \quad R_2 : y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$
   (c) $S_1 : x - y = 2, \quad S_2 : y + x = x - y + 6$
   (d) $T_1 : 2y = 4x - 3, \quad T_2 : 4y - 8x - 12 = 0$
2. Determinar $a \in \mathbb{R}$ de modo tal que las rectas

$$L_1 : y = 3a^2x - a, \quad L_2 : a + y = 3x,$$

   (a) sean paralelas no coincidentes,
   (b) sean paralelas coincidentes,
   (c) se corten en un único punto.

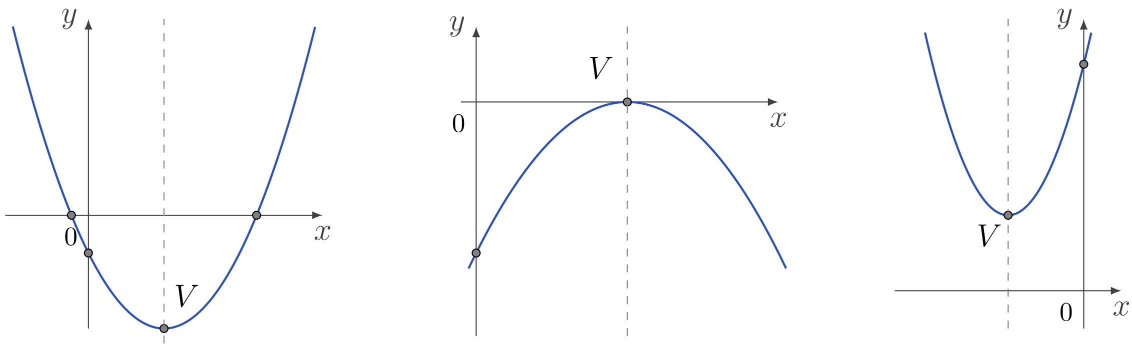
3.3 Función cuadrática. Parábolas

Una **función cuadrática** es una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuya forma general es

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

El gráfico de una función cuadrática es una **parábola** de ecuación $y = ax^2 + bx + c$, con un **vértice**, que en general notamos $V = (h, k) = (h, f(h))$, y un **eje de simetría vertical** de ecuación $x = h$. El signo de a indica la **concavidad** de la parábola: hacia arriba, si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$, según se observa en la figura.



$a > 0$ $a < 0$ $a > 0$

En la **Sección 3.1** estudiamos, en forma general, las intersecciones del gráfico de una función con los ejes coordenados. Ahora, para el caso particular de una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, encontramos que su gráfico corta a eje y en el punto $P = (0, f(0)) = (0, c)$. Por otro lado, las intersecciones con el eje x serán puntos de la forma $(x_0, 0)$, siendo x_0 una solución, si existe, de la ecuación

$$0 = ax^2 + bx + c.$$

Los valores x_0 son llamados usualmente ceros o **raíces** de la función. Sabemos, por lo estudiado en la **Sección 2.2**, que pueden existir dos, una o ninguna solución de esta ecuación dependiendo del signo del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Así, las parábolas tienen dos, una o ninguna raíz, como podemos observar en los gráficos anteriores.

Desde un punto de vista teórico, el dominio de una función cuadrática f es $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$, y su imagen depende del signo de a y del vértice V. Si el vértice tiene coordenadas $V = (h, k)$, con $h, k \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned} a > 0 \quad &\Longrightarrow \quad \mathrm{Im}\,(f) = [k, +\infty), \\ a < 0 \quad &\Longrightarrow \quad \mathrm{Im}\,(f) = (-\infty, k]. \end{aligned}$$

En el contexto de un problema, el dominio y la imagen estarán determinados por la situación particular que se esté modelando con la función cuadrática. El siguiente ejemplo ilustra esta afirmación.

Ejemplo 3.3.1

Queremos hallar una función que relacione el área de un círculo con la medida de su radio.

En este caso, conocemos la fórmula del área del círculo. Si llamamos A al área y r al radio, entonces $A = \pi r^2$.

Podemos pensar esta fórmula como una función, pues la fórmula nos muestra que el área depende del valor del radio. Esto es, dado un valor de radio (r: variable independiente) podemos saber el valor del área (A: variable dependiente). Así, la función buscada es

$$A(r) = \pi r^2,$$

y podemos decir que su dominio es $\mathbb{R}^+$, esto es $r \in (0, +\infty)$, pues el valor del radio es siempre positivo en un círculo.

Notemos que si miramos solamente la expresión que define la función, diríamos que r puede tomar cualquier valor real, positivo, negativo o nulo. Esto es, fuera del contexto del problema diríamos que el dominio de esta función es $\mathbb{R}$. Sin embargo, el contexto del problema limita el dominio a valores de r positivos.

La imagen de esta función también es R^+.

Revisemos lo aprendido

1. Sea $f(x) = x - 2x^2$. Hallar, si existe, un valor de x tal que $f(x) = \frac{1}{2}$.
2. Sea $f(x) = 1 - x^2$. El valor $y = 3$, ¿pertenece a la imagen de f?
3. Hallar el dominio y la imagen de la función cuadrática cuyo gráfico es una parábola de vértice $V = (-1, -2)$ y que corta al eje y en $y = -5$.

Expresiones de la ecuación de la parábola. Gráficos

Existen tres formas equivalentes de presentar la ecuación de una parábola, o bien la función cuadrática correspondiente.

1. Forma polinómica.
2. Forma canónica.
3. Forma factorizada.

Analizamos a continuación lo que cada una de ellas aporta al estudio de la función, así como el paso de una a otra de las expresiones.

1. En *forma polinómica* la parábola se expresa $y = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$.

   Como ya mencionamos, a partir de esta expresión es inmediato indicar el punto en que la parábola intersecta al eje y: $P = (0, c)$. También podemos encontrar las intersecciones con el eje x haciendo uso de la fórmula resolvente

   $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

   Así, por ejemplo, $y = 2x^2 + x + 3$ intersecta al eje y en $P = (0, 3)$, y no intersecta al eje x ya que el discriminante $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -23$ es negativo.

2. En *forma canónica* la expresión de la parábola es $y = a(x - h)^2 + k,\ a, h, k \in \mathbb{R},\ a \neq 0$.

   Esta expresión nos brinda explícitamente las coordenadas del vértice de la parábola: $V = (h, k)$, así como la ecuación del eje de simetría: $x = h$.

Dada una parábola en forma canónica, para encontrar la forma polinómica basta desarrollar el cuadrado del binomio y agrupar los términos que corresponda. Por otro lado, dada una parábola en forma polinómica, podemos encontrar su forma canónica a partir de un **completamiento de cuadrados**. Esta estrategia consiste en sumar y restar un término que transforma el binomio $ax^2 + bx$ en un trinomio cuadrado perfecto.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\ &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2 + c - \frac{b^2}{4a}. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que las coordenadas del vértice V son

$$h = -\frac{b}{2a}, \quad k = c - \frac{b^2}{4a}.$$

Por ejemplo, dada la parábola $y = 2x^2 + 12x + 19$, tenemos

$$\begin{aligned} 2x^2 + 12x + 19 &= 2\left(x^2 + 6x\right) + 19 \\ &= 2\left(x^2 + 6x + 3^2 - 3^2\right) + 19 \\ &= 2\left(x^2 + 6x + 3^2\right) + 19 - 18 \\ &= 2\left(x - (-3)\right)^2 + 1, \end{aligned}$$

de esta manera resulta

$$h = -3, \quad k = 1.$$

Luego la forma canónica de esta parábola es $y = 2[x - (-3)]^2 + 1 = 2(x + 3)^2 + 1$, su vértice es $V = (-3, 1)$ y su eje de simetría es $x = -3$.

3. En la *forma factorizada* podemos encontrar dos situaciones distintas. Comúnmente se asocia a esta forma la expresión $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, $a, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

   Esta representación nos indica explícitamente las raíces de la parábola: x_1 y x_2. Así las intersecciones con el eje x son los puntos de coordenadas $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.

   Sin embargo, no siempre las parábolas tienen raíces. En el caso de no tenerlas, la forma factorizada es la misma que la polinómica. Por ejemplo, $y = x^2 + 3$ es una parábola dada en forma factorizada. Más aún, esta es también su forma polinómica y canónica. Notemos que $y = x^2 + 3 = (x - 0)^2 + 3$.

   Dada una parábola en forma canónica $y = a(x - h)^2 + k$, para dar la forma factorizada debemos encontrar sus raíces. Para eso despejamos x de la ecuación $a(x - h)^2 + k = 0$.

Veamos esto a partir de un ejemplo. Consideremos $y = -2(x-1)^2 + 8$.

$$\begin{aligned} -2(x-1)^2 + 8 &= 0 \\ (x-1)^2 &= 4 \iff \begin{cases} x - 1 = \sqrt{4} & \Leftrightarrow \quad x_1 = 3, \\ \\ x - 1 = -\sqrt{4} & \Leftrightarrow \quad x_2 = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

De esta forma encontramos que $y = -2(x-1)^2 + 8 = -2(x-3)(x+1)$. A partir de la forma factorizada podemos también indicar la ecuación del eje de simetría, dado que esta recta pasa por el punto medio entre las raíces. El eje de simetría entonces tiene ecuación

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

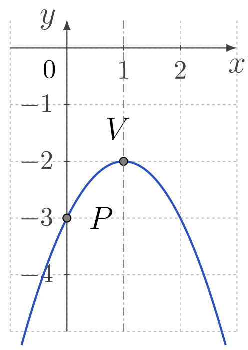
En el ejemplo anterior teníamos $x_1 = 3, x_2 = -1$, y así el eje de simetría es $x = 1$.

Para graficar una parábola es necesario, por ejemplo, conocer el vértice V y algún otro punto que pertenezca al gráfico.

Ejemplo 3.3.2

Consideremos $f(x) = -x^2 + 2x - 3$. Inmediatamente podemos decir que $P = (0, -3)$ es la intersección del gráfico de esta función con el eje y. Completemos cuadrados para encontrar el vértice.

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 - 2x) - 3 \\ &= -(x^2 - 2x + 1 - 1) - 3 \\ &= -(x - 2x + 1) + 1 - 3 \\ &= -(x-1)^2 - 2. \end{aligned}$$



De aquí concluimos que $V = (1, -2)$, el eje de simetría es $x = 1$ y la parábola es cóncava hacia abajo ya que $a < 0$. Mostramos a la derecha el gráfico de la parábola.

Las funciones cuadráticas permiten modelar problemas, y los elementos que las caracterizan (dominio, imagen, vértice, intersecciones con los ejes) proporcionan información particular respecto del problema. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.3.3

Durante un juego de basquet, un jugador lanza la pelota a un aro amurado a una altura de 3 m en una pared, y esta describe una trayectoria parabólica dada por la ecuación $y = -0,26x^2 + 1,4x + 1,5$, donde x indica la componente horizontal de la posición de avance (en metros) de la pelota hacia el aro e y indica su altura respecto del suelo (también en metros). El jugador se encuentra a 4 m horizontales del centro del aro. Esto es, si camina 4 m hacia el aro se ubicará justo debajo de su centro.

1. ¿Cuál es el dominio de la función cuadrática $y = f(x)$ que modela la trayectoria de

la pelota?

2. ¿Desde qué altura la pelota inicia su trayectoria?

3. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?

4. La pelota, ¿entra al aro?

Para responder a estas preguntas debemos entender qué información nos están pidiendo que recuperemos a partir de los datos iniciales, que en este caso son la ecuación de la parábola que dibuja la pelota en el aire, la distancia del jugador al aro y la altura del aro.

Una alternativa para resolver este problema es empezar haciendo un gráfico de la situación, luego interpretar adecuadamente este gráfico y recuperar la información pedida. Para graficar la parábola, necesitamos conocer su vértice y algún dato más, por ejemplo un punto de intersección con alguno de los ejes.

Dado que el problema involucra números decimales, hacer un completamiento de cuadrados resulta más difícil que utilizar la fórmula para encontrar h (componente x del vértice). Además, tomaremos valores aproximados pues los datos encontrados deben tener sentido en el contexto del problema.

En la parábola dada tenemos

$$a = -0,26; \quad b = 1,4; \quad c = 1,5;$$

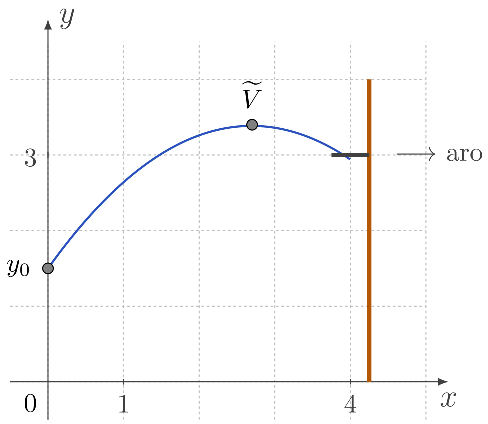
de forma que

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{1,4}{2 \cdot 0,26} \simeq 2,7.$$

Llamando f a la función cuadrática asociada a la parábola dada: $f(x) = -0,26x^2+1,4x+1,5$, resulta

$$\begin{aligned} k &= f(h) \simeq f(2,7) \\ &= -0,26 \cdot 2,7^2 + 1,4 \cdot 2,7 + 1,5 \simeq 3,4. \end{aligned}$$

De esta forma tenemos una aproximación real $\widetilde{V}$ del vértice teórico: $\widetilde{V} = (2,7; 3,4)$.



Además del vértice, tenemos que $y_0 = f(0) = 1,5$, lo que nos indica que la parábola corta al eje y en $(0; 1,5)$. Con esta información podemos hacer el gráfico que se muestra en la figura.

Ahora debemos interpretar toda esta información en el contexto del problema.

Para empezar, x indica la componente horizontal de avance de la pelota, es decir, la distancia de la pelota al jugador, por lo que sus valores deben ser positivos. La pelota sigue una trayectoria cuadrática hasta llegar al aro (que está a 4 m del jugador), dado que unos centímetros después su comportamiento cambia pues choca contra la pared . Por esto, respondiendo a la primera pregunta, el dominio que nos interesa para modelar la trayectoria de la pelota es $D = \text{Dom}\,(f) = [0, 4]$.

$x = 0$ indica que la pelota avanzó 0 m desde el lanzamiento, es decir que es el punto de partida de la pelota, es el lugar donde se encuentra parado el jugador. Ahora, $y_0 = 1,5$ m es la altura desde la cual la pelota inicia el movimiento. Queda así respondida la segunda pregunta.

Las coordenadas del vértice de la parábola nos indican la altura máxima: $k = 3,4$ m y la posición en la que esta se alcanza: a $x = 2,7$ m del punto de inicio. Esto responde a la tercera de las preguntas.

Por último, nos preguntan si la pelota entra en el aro. El aro se encuentra en el punto de coordenadas $P = (4,3)$, que corresponde a los 4 m que separan al jugador de la base del aro y los 3 m de altura al que este se ubica. Entonces, para responder esta pregunta, debemos saber si el punto P está en la trayectoria de la pelota. Es decir, debemos ver si P satisface la ecuación de la parábola. Reemplazamos $x = 4$,

$$y = -0,26 \cdot 4^2 + 1,4 \cdot 4 + 1,5 = 2,94 \simeq 3$$

y obtenemos $y = 3$, de donde podemos concluir que efectivamente la pelota entra en el aro.

Veamos un ejemplo de cómo obtener la ecuación de una parábola y su gráfico a partir de cierta información que se nos proporciona. En general, para resolver problemas de este tipo es importante tener presentes las tres formas de expresar una parábola ya que cuál será la más adecuada depende de la información que nos den.

Ejemplo 3.3.4

Queremos hallar la ecuación de la parábola que pasa por el origen de coordenadas y tiene vértice $V = (2,4)$. Dado que tenemos la información del vértice, una forma apropiada de abordar el problema es usar la forma canónica de la parábola y plantear

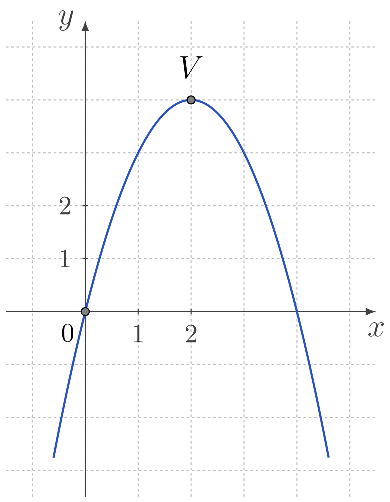
$$y = a(x-2)^2 + 4,$$

de forma que debemos encontrar el valor de a.

El dato de que la parábola pasa por el origen de coordenadas nos dice que $O = (0,0)$ es un par ordenado que satisface la ecuación. Esto es,

$$\begin{aligned} 0 = a(0-2)^2 + 4 \quad &\iff \quad -4 = 4a \\ &\iff \quad a = -1. \end{aligned}$$

De esta forma, encontramos $y = -(x-2)^2 + 4$.



También en el contexto de problemas puede ser necesario encontrar la función cuadrática que modela la situación a partir de ciertos datos que se nos proporcionan. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3.5

Consideremos los rectángulos cuya altura es dos unidades menor que la medida de la base.

1. Encontrar una función que relacione la medida del área (en cm^2) de uno de estos rectángulos en términos de la medida de la base (en cm).
2. Indicar el dominio de esta función. Representar gráficamente.
3. ¿Cuál es la medida de la base de uno de estos rectángulos cuya área es $11,25$ cm^2?

Resolvamos cada uno de los incisos anteriores.

1. Si llamamos x a la medida de la base, entonces la altura del rectángulo medirá $x-2$. Luego, el área A está dada por

$$A(x) = x(x-2) = x^2 - 2x.$$

2. La representación gráfica de esta función es una parábola. Pero la medida de la base x no puede ser cualquier número real pues tanto la base como la altura deben tener medida positiva. Entonces debe ser

$$x > 0 \quad \text{y} \quad x - 2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x > 2.$$

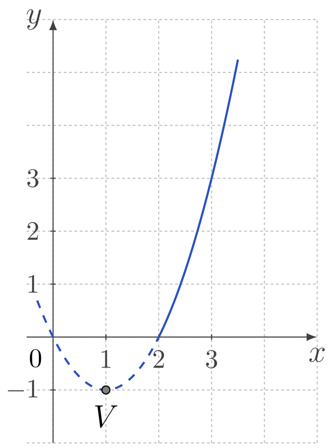
Así, el dominio de la función es $\mathrm{Dom}\,(A) = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$. Para poder dibujar la parábola buscamos el vértice $V = (h, k)$, dado por

$$h = -\frac{(-2)}{2 \cdot 1} = 1, \qquad k = A(h) = A(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1,$$

y las raíces que son fáciles de determinar,

$$x(x-2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ó} \quad x = 2.$$

Con estos datos podemos graficar la parábola, teniendo en cuenta el dominio correspondiente a este problema. Con línea punteada graficamos la parte de la parábola que no corresponde al dominio de la función para este problema particular.



3. Si el área de un rectángulo es $11,25$ cm^2, entonces la medida de la base la encontramos resolviendo
$$11,25 = x^2 - 2x \iff x^2 - 2x - 11,25 = 0.$$
Esta ecuación tiene dos soluciones,
$$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-11,25)}}{2 \cdot 1} = \frac{2+7}{2} = \frac{9}{2} = 4,5;$$
$$x_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-11,25)}}{2 \cdot 1} = \frac{2-7}{2} = -\frac{5}{2} = -2,5.$$
El valor x_2 no tiene sentido en el contexto del problema pues la medida del lado de un rectángulo no puede ser negativa. Luego, la única solución posible es $x_1 = 4,5$. Así la medida de la base del rectángulo cuya área es $11,25$ cm^2 será de $4,5$ cm.

Otro punto de interés es el de encontrar la intersección entre una recta y una parábola. La estrategia en estos casos es la misma que la vista para la intersección de rectas: igualar las ecuaciones que las definen, siempre que tengamos una ecuación explícita (esto es, que la variable y esté despejada). El siguiente ejemplo ilustra esta idea.

Ejemplo 3.3.6

Queremos hallar los puntos de intersección entre la recta $3y - 6x = 3$ y la parábola $y = -(x-1)^2 + 5$.

Al igual que en el caso de intersección de rectas, un punto de intersección entre una recta y una parábola es un par ordenado(x_0, y_0) que satisface ambas ecuaciones. Por eso, la estrategia que usaremos para encontrar estos pares ordenados es despejar y de ambas ecuaciones e igualarlas, pues el valor de y de una de las ecuaciones debe ser el mismo que el de la otra ecuación. Equivalentemente podríamos despejar x en ambas ecuaciones e igualarlas.

Para la recta, encontramos
$$3y - 6x = 3 \iff 3y = 3 + 6x \iff y = 1 + 2x.$$
La ecuación de la parábola ya tiene y despejada por lo que igualamos las dos ecuaciones para encontrar, si existe, el o los valores de x:
$$\begin{aligned} 1 + 2x = -(x-1)^2 + 5 &\iff 1 + 2x = -(x^2 - 2x + 1) + 5 \\ &\iff 1 + 2x = -x^2 + 2x - 1 + 5 \\ &\iff x^2 - 3 = 0 \\ &\iff (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0 \end{aligned}$$
de donde resultan dos valores de x: $x_1 = \sqrt{3}$; $x_2 = -\sqrt{3}$.

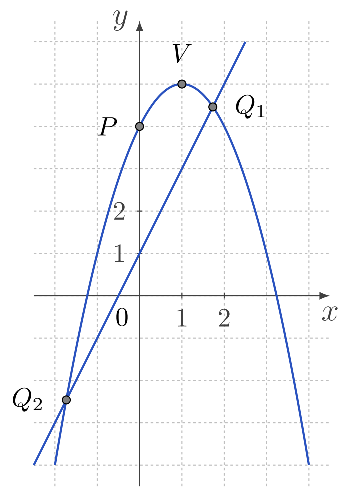
Ahora, para cada valor de x debemos encontrar su correspondiente y, el cual encontramos reemplazando en cualquiera de las dos ecuaciones. La ecuación de la recta es la más simple de reemplazar, por lo que hacemos

$$y_1 = 1 + 2\sqrt{3}; \qquad y_2 = 1 - 2\sqrt{3}.$$

Así, los puntos de intersección son

$$Q_1 = (x_1, y_1) = (\sqrt{3}, 1 + 2\sqrt{3}); \qquad Q_2 = (x_2, y_2) = (-\sqrt{3}, 1 - 2\sqrt{3}).$$

Para graficar la parábola, tenemos el vértice $V = (1,5)$ y buscamos un punto más por donde pase esta curva. Por ejemplo, para $x = 0$, encontramos $y = -(0-1)^2+5 = 4$. Es decir, $P = (0,4)$ es un punto de la parábola. El gráfico de la recta y la parábola se muestra en la figura, donde puede verificarse que los puntos de intersección encontrados coinciden con lo que nos muestra e gráfico.



Revisemos lo aprendido

1. Unir con flechas las ecuaciones que representan la misma parábola.

Forma canónica	Forma polinómica	Forma factorizada
$y = (x-2)^2$	$y = -x^3 - 6x - 8$	$y = (x-2)^2$
$y = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}$	$y = x^2 - 4x + 4$	$y = -(x-2)(x-4)$
$y = -(x+3)^2 + 1$	$y = 2x^2 + 2x - 4$	$y = 2(x+2)(x-1)$

2. Encontrar la forma canónica de la parábola $y = -4x\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

3. Encontrar la ecuación de la parábola que tiene por raíces $x_1 = \frac{1}{3}$ y $x_2 = -\frac{2}{3}$, y que corta al eje y en $y = 1$. Graficarla.

4. El costo de producción C (en dólares) de un cierto artículo puede modelarse con la función $C(x) = \frac{1}{100}x^2 - 2x + 160$, donde x es la cantidad de artículos producidos.
   (a) Hallar el dominio de la función C en el contexto del problema y graficarla.
   (b) Cómo se interpreta el vértice de la parábola en este contexto? ¿Qué información proporciona?
   (c) Si se producen 200 artículos, ¿cuál será el costo de producción?

(d) Si este mes el costo de producción de este artículo fue de 450 dólares, ¿cuántos artículos se produjeron?

5. (a) El punto $Q = (-2, -1)$, ¿es un punto de intersección entre la recta $y = \frac{1}{2}x$ y la parábola $y = (x-2)^2 - 1$?

   (b) Hallar, si existen, los puntos de intersección entre la recta $y = 1 - x$ y la parábola $y = x(1-x)$. Graficar la situación.

4 Razones trigonométricas

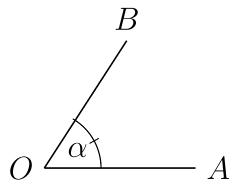
Síntesis del bloque temático

En esta unidad revisamos los conceptos vinculados a las razones trigonométricas. Los principales temas a desarrollar son los siguientes.

1. El sistema sexagesimal y el sistema radial para la medición de ángulos.
2. Razones trigonométricas sobre triángulos rectángulos y sus propiedades. Aplicación a la resolución de triángulos rectángulos.
3. Planteo y resolución de problemas haciendo uso de las razones trigonométricas.

4.1 El sistema sexagesimal y el sistema radial

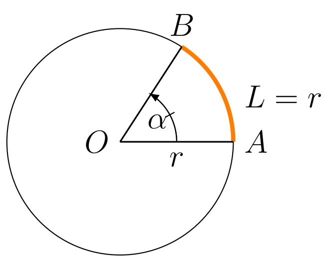
Un ángulo α está caracterizado por un par de semirrectas, que forman los lados del ángulo, y que tienen el mismo origen, llamado vértice. En la siguiente figura, $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son los lados del ángulo α y el punto O es el vértice.



Si queremos medir la amplitud de un ángulo podemos utilizar el sistema sexagesimal o el sistema radial. En el sistema sexagesimal los ángulos se miden en grados (°), minutos (′) y segundos (″). Un grado se obtiene al dividir un giro completo en 360 partes iguales, y tenemos las relaciones

$$1^\circ = 60', \qquad 1' = 60''.$$

En el sistema radial, la unidad de medida es el **radián**. Un ángulo de medida un radián es aquel que abarca un **arco de circunferencia** cuya longitud es igual a la del radio. La siguiente figura representa un ángulo α de medida 1 radián (escribimos $\alpha = 1$, es decir, usamos la letra α tanto para indicar el nombre del ángulo como su medida).



Tenemos la siguiente equivalencia entre ambos sistemas de medición: *un ángulo de un giro en el sistema sexagesimal mide* 360° *en tanto que en el sistema radial mide* 2π. De esta forma, la relación entre la medida de un ángulo α dada en cada uno de los sistemas es

$$\frac{\alpha \text{ (en grados)}}{360°} = \frac{\alpha \text{ (en radianes)}}{2\pi}.$$

Así, por ejemplo, si queremos la medida en grados de un ángulo α que en radianes mide $\frac{\pi}{6}$ hacemos

$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{\frac{\pi}{6}}{2\pi} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{360°}{12} = 30°.$$

O bien, si tenemos un ángulo que mide $127°15'$, calculamos su medida en radianes a partir de

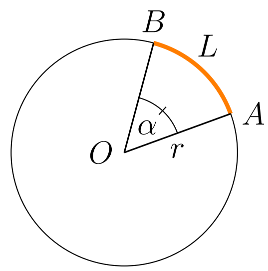
$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{127°15'}{360°} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \approx 2,22.$$

Notemos que en este caso damos un valor aproximado de la medida del ángulo α, dado que su medida exacta es un número irracional.

Tenemos también las siguientes relaciones destacadas.

α	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
Sistema sexagesimal	0	90°	180°	270°	360°
Sistema radial	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Consideremos a continuación una circunferencia de radio r y un ángulo α con vértice en el centro de la circunferencia, como mostramos en la siguiente figura.



Si llamamos L a la longitud del arco de circunferencia de radio r determinado por un ángulo de medida α dada en el sistema radial, entonces tenemos la relación

$$L = \alpha \cdot r.$$

Ejemplo 4.1.1

Consideremos una circunferencia de radio $r = 3$ cm.

1. ¿Cuál es la medida del arco determinado por un ángulo central de 120°?

   Para poder usar la relación $L = \alpha \cdot r$ en primer lugar debemos transformar la medida del ángulo al sistema radial.

   $$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{120°}{360°} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{2}{3}\pi.$$

   Ahora podemos calcular la medida del arco pedida

   $$L = \frac{2}{3}\pi \cdot 3\,\text{cm} = 2\pi\,\text{cm}.$$

2. ¿Cuál es la medida del ángulo central determinado por un arco de 10 cm?

Tenemos

$$\alpha = \frac{L}{r} = \frac{10\,\text{cm}}{3\,\text{cm}} = \frac{10}{3}$$

y esta medida está dada en radianes. En el sistema sexagesimal el valor de α es

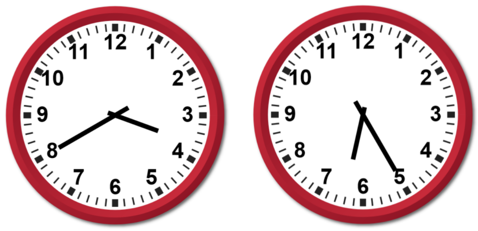
$$\alpha = \frac{\frac{10}{3}}{2\pi} \cdot 360^\circ \approx 190^\circ$$

Notemos que esto concuerda con la fórmula ya conocida para la longitud (o perímetro) de una circunferencia, pues en tal caso el ángulo que abarca la circunferencia completa mide 2π.

Ejemplo 4.1.2

La aguja que marca los minutos en un reloj de pared mide $9,5\,\text{cm}$. Obtener la distancia que recorre el extremo móvil de esta aguja entre las 15:40 y las 18:25.

Miremos la situación en los relojes. En 2 horas la aguja dio 2 vueltas.



$$1 \text{ vuelta} \longleftrightarrow 360^\circ,$$

$$2 \text{ vueltas} \longleftrightarrow 2 \times 360^\circ = 720^\circ.$$

Luego de 2 horas, el reloj marca las 17:40, en 20 minutos más serán las 18:00 y en 25 minutos más se cumplió la hora señalada.

En total pasaron 2 horas y 45 minutos, esto es

$$2\,\text{horas} \longleftrightarrow 720^\circ$$

$$15\,\text{minutos} \longleftrightarrow \frac{1}{4}\text{de hora} \longleftrightarrow \frac{1}{4} \times 360^\circ = 90^\circ$$

$$45\,\text{minutos} \longleftrightarrow 3 \times 15\,\text{minutos} \longleftrightarrow 3 \times 90^\circ = 270^\circ$$

En 2 horas y 45 minutos recorrió

$$\underbrace{720^\circ}_{\text{2 horas}} + \underbrace{270^\circ}_{\text{45 minutos}} = 990^\circ.$$

Ahora, el problema nos pide la distancia recorrida y esto se refiere al arco de la circunferencia. Usamos la fórmula $L = \alpha(\text{rad}) \times r$, la cual requiere que el ángulo esté en radianes. Para encontrar este valor, hacemos

$$990^\circ \text{ expresado en rad} \longrightarrow \frac{990^\circ}{360^\circ} \times 2\pi = \frac{11}{4} \times 2\pi = \frac{11}{2}\pi$$

Concluimos que la distancia recorrida por el extremo móvil de la aguja es

$$L = \frac{11}{2}\pi \times 9,5\,\text{cm} \approx 164,15\,\text{cm}.$$

Revisemos lo aprendido

1. Expresar en grados, minutos y segundos sexagesimales la medida de un ángulo que en el sistema radial mide

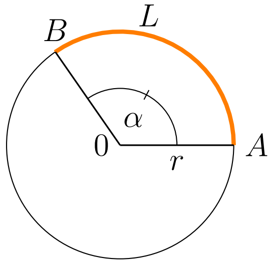
   (a) $\frac{2}{5}\pi$ radianes, (b) $2,5$ radianes, (c) $\frac{5}{6}\pi$ radianes.

2. Expresar en radianes la medida de un ángulo que en el sistema sexagesimal mide

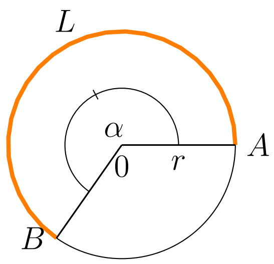
   (a) $171°\,53'\,14''$, (b) $35°\,40'$, (c) $70°\,10'\,40''$.

3. Determinar el radio r de cada una de las siguientes circunferencias.

   (a) $\alpha = 125°$, $L = 5\pi$ cm.



   (b) $\alpha = 4$ radianes, $L = 18$ cm.



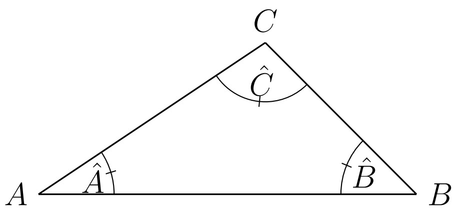
4.2 Razones trigonométricas. Triángulos rectángulos

Dado un triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ vamos a indicar sus ángulos interiores de la forma $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, y sus lados los indicaremos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.

Recordemos dos propiedades fundamentales vinculadas a los triángulos. La primera de ellas es válida para cualquier triángulo y establece una relación entre sus ángulos interiores.

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a $180°$.

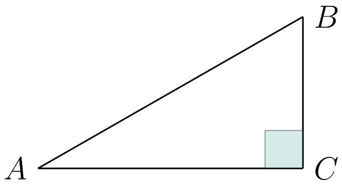
Simbólicamente: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$.



La segunda propiedad, válida para triángulos rectángulos (triángulos que tienen un ángulo recto), es el **teorema de Pitágoras**.

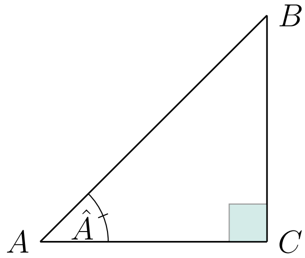
La suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de su hipotenusa.

Simbólicamente: $|\overline{AC}|^2 + |\overline{CB}|^2 = |\overline{AB}|^2$.



Para un triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ rectángulo en $\hat{C}$, como el de la figura, definimos el **seno**, **coseno** y **tangente** del ángulo $\hat{A}$ (no recto) de la forma

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\hat{A} &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|}, \\ \cos\hat{A} &= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|}, \\ \operatorname{tg}\hat{A} &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|}. \end{aligned}$$



Estas relaciones se denominan **razones trigonométricas**. Definimos también la **secante**, **cosecante** y **cotangente** del ángulo $\hat{A}$ de la forma

$$\operatorname{cosec}\hat{A} = \frac{1}{\operatorname{sen}\hat{A}}, \qquad \sec\hat{A} = \frac{1}{\cos\hat{A}}, \qquad \operatorname{cotg}\hat{A} = \frac{1}{\operatorname{tg}\hat{A}}.$$

Observemos en primer lugar que

$$\operatorname{tg}\hat{A} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|}\,\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|} = \frac{\operatorname{sen}\hat{A}}{\cos\hat{A}}.$$

Además, a partir del teorema de Pitágoras se deduce lo que se conoce como **relación pitagórica**

$$\operatorname{sen}^2\hat{A} + \cos^2\hat{A} = \left(\frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|}\right)^2 + \left(\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|}\right)^2 = \frac{|\overline{AC}|^2 + |\overline{BC}|^2}{|\overline{AB}|^2} = \frac{|\overline{AB}|^2}{|\overline{AB}|^2} = 1.$$

Veamos cómo se definen, de manera poco formal, el **arco seno**, **arco coseno** y **arco tangente** de un número $x \in \mathbb{R}$.

- Dado $x \in [-1, 1]$, el arco seno de x es un ángulo θ cuyo seno vale x.
  En símbolos: $\operatorname{arcsen} x = \theta \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = x$.
- Dado $x \in [-1, 1]$, el arco coseno de x es un ángulo θ cuyo coseno vale x.
  En símbolos: $\arccos x = \theta \Leftrightarrow \cos\theta = x$.
- Dado $x \in \mathbb{R}$, el arco tangente de x es un ángulo θ cuya tangente vale x.
  En símbolos: $\operatorname{arctg} x = \theta \Leftrightarrow \operatorname{tg}\theta = x$.

Para calcular el seno, coseno y tangente de un ángulo dado, así como el arco seno, arco coseno y arco tangente de un valor dado, usamos la calculadora científica. En general estos valores no son números racionales por lo que vamos a utilizar aproximaciones.

Uso de calculadora

Para obtener el resultado correcto al calcular razones trigonométricas, es necesario ajustar la calculadora al modo correcto de acuerdo con la unidad de medida del ángulo.

1. **Modo Grados**: Si el ángulo está dado en grados sexagesimales (°), la calculadora debe estar en el modo **DEG** (Degrees). La mayoría de las calculadoras muestran una indicación en la pantalla, como "D" o "DEG", para indicar que están en el modo de grados.

2. **Modo Radianes**: Si el ángulo está dado en radianes, la calculadora debe estar en modo **RAD** (Radians). En este modo, la calculadora interpretará los valores de ángulo como radianes.

En la figura de la derecha se pueden ver dos visores de calculadora de diferentes modelos. En cada una se puede observar cómo aparece los modos.

Ejemplo 4.2.1

Veamos, mediante un ejemplo, el paso a paso correcto para calcular el seno de un ángulo dado. Lo mismo aplica al cálculo de las restantes razones trigonométricas.

- Si nos piden calcular el seno de 60°, la calculadora debe estar en modo DEG:
  - ▷ Seleccionamos el modo DEG en la calculadora.
  - ▷ La tecla para calcular senos es sin. Escribimos entonces $\sin 60$.
  - ▷ El resultado será $\frac{\sqrt{3}}{2}$ que es aproximadamente $0,866$. Dependerá del modelo de la calculadora cual sea respuesta que muestre en pantalla.
- Si nos piden calcular el seno de $\frac{\pi}{3}$, que es el mismo ángulo que en el caso anterior pero ahora en radianes, la calculadora debe estar en modo RAD:
  - ▷ Seleccionamos el modo RAD en la calculadora.
  - ▷ Escribimos $\sin(\pi/3)$.
  - ▷ El resultado será el mismo que para el ejemplo anterior.

Observación 9

Si tenemos un ángulo de 90° y calculamos su seno en modo radianes, la calculadora interpretará ese 90 que le ingresamos como 90 radianes en lugar de 90 grados. Esto resultará en un valor incorrecto, ya que 90 radianes es un ángulo muy grande (más de 14 vueltas alrededor del círculo), por lo que el valor de $\operatorname{sen} 90$ radianes no es el mismo que $\operatorname{sen} 90°$.

Haciendo uso de las razones trigonométricas y de las propiedades enunciadas podemos resolver problemas que involucran triángulos rectángulos. Dado un triángulo rectángulo, es suficiente conocer dos datos (ya sean dos lados o un lado y un ángulo), además del ángulo recto, para poder encontrar los restantes ángulos y lados. Cuando hablamos de **resolver un triángulo rectángulo** nos referimos a encontrar todos sus lados y todos sus ángulos, a partir de ciertos datos conocidos.

Veamos a continuación, a partir de algunos ejemplos, cómo resolver un triángulo rectángulo.

Ejemplo 4.2.2

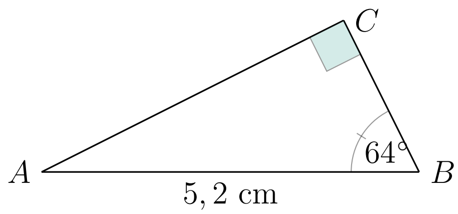
Consideremos un triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ rectángulo en $\hat{C}$ y tal que $|\overline{AB}| = 5,2$ cm y $\hat{B} = 64°$. Veamos cómo encontrar la medida de los restantes lados y ángulos.

En primer lugar, conocemos dos ángulos: $\hat{B} = 64°$ y $\hat{C} = 90°$. Luego el ángulo restante es

$$\hat{A} = 180° - 64° - 90° = 26°.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \hat{A} &= \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|} \\ \operatorname{sen} 26° &= \frac{|\overline{BC}|}{5,2\,\text{cm}} \\ |\overline{BC}| &= 5,2\,\text{cm} \cdot \operatorname{sen} 26° \approx 2,28\,\text{cm}. \end{aligned}$$



Para encontrar el lado restante podemos usar el teorema de Pitágoras, o bien alguna de las razones trigonométricas. Por ejemplo,

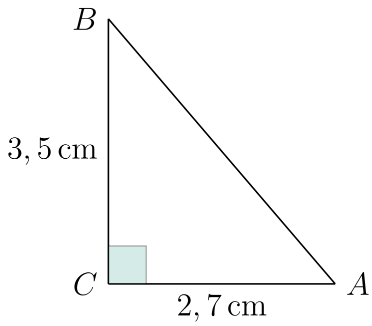
$$\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{tg} 26° = \frac{2,28\,\text{cm}}{|\overline{AC}|} \quad \Longrightarrow \quad |\overline{AC}| = \frac{2,28\,\text{cm}}{\operatorname{tg} 26°} \approx 4,67\,\text{cm}.$$

Ejemplo 4.2.3

Sea $\overset{\triangle}{ABC}$ un triángulo rectángulo en $\hat{C}$, para el cual $|\overline{AC}| = 2,7$ cm y $|\overline{BC}| = 3,5$ cm. Calculemos el lado restante y sus ángulos interiores.

Para encontrar la longitud del lado $\overline{AB}$ usamos el teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned} |\overline{AB}|^2 &= |\overline{AC}|^2 + |\overline{BC}|^2 \\ &= (2,7\,\text{cm})^2 + (3,5\,\text{cm})^2 \\ &= 19,54\,\text{cm}^2. \end{aligned}$$



Luego $|\overline{AB}| = \sqrt{19,54\,\text{cm}^2} \approx 4,42\,\text{cm}$. Ahora, para encontrar el ángulo $\hat{A}$ usamos, por ejemplo, su tangente.

$$\operatorname{tg}\hat{A} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|} = \frac{3,5\,\text{cm}}{2,7\,\text{cm}} \approx 1,296 \quad \Longrightarrow \quad \hat{A} \approx \operatorname{arctg} 1,296 \approx 52°21'.$$

Finalmente, el ángulo restante resulta ser,

$$\hat{B} \approx 180° - 90° - 52°21' \approx 37°39'.$$

En el ejemplo anterior calculamos el ángulo $\hat{B}$ usando el ángulo hallado $\hat{A}$ y sabiendo que la suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es 180°.

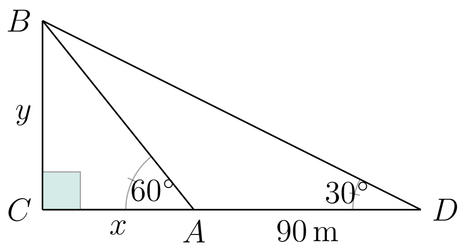
Observemos que, siempre que sea posible, es conveniente usar los datos dados en el problema para calcular todo lo que se pida en vez de ir calculando a partir de los resultados obtenidos para evitar errores, ya que lo calculado en otros incisos puede no ser correcto y en caso de usar estos resultados vamos arrastrando los errores.

Ahora veamos cómo resolver un problema usando las propiedades de los triángulos y las razones trigonométricas.

Ejemplo 4.2.4

Queremos calcular la altura de una torre si el ángulo de elevación disminuye de 60° a 30° cuando un observador, que está situado a x metros del pie de la torre, se aleja 90 metros en la misma dirección.

Para resolver este tipo de problemas es conveniente realizar un esquema gráfico de la situación. De esta forma, volcando los datos sobre el gráfico, podemos decidir más fácilmente qué propiedades aplicar en base a lo que sabemos y a lo que queremos calcular.



Llamamos y a la altura de la torre, dato que nos interesa calcular. Observemos que y es la medida del segmento opuesto a los ángulos conocidos, y los restantes datos se encuentran sobre el cateto adyacente a dichos ángulos. Por esto, la razón trigonométrica que vamos a usar es la tangente. Planteamos entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 60° &= \frac{y}{x} \quad \Longrightarrow \quad y = (\operatorname{tg} 60°)x \approx 1,73\,x \\ \operatorname{tg} 30° &= \frac{y}{x + 90\,\text{m}} \quad \Longrightarrow \quad y = (\operatorname{tg} 30°)(x + 90\,\text{m}) \approx 0,58\,x + 51,96\,\text{m}. \end{aligned}$$

Para poder hallar el valor de las incógnitas, de la primera ecuación despejamos x y encontramos que $x \approx 0,58\,y$. Con esta expresión reemplazamos en la segunda ecuación, donde resulta

$$y \approx 0,58(0,58y) + 51,96\,\text{m} \quad \Longrightarrow \quad y \approx 78,3\,\text{m}.$$

Así encontramos que la altura aproximada de la torre es 78, 3 m.

Revisemos lo aprendido

1. Calcular

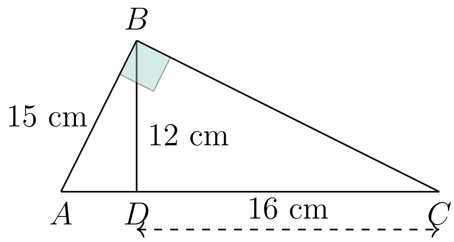
   (a) El seno de $\frac{\pi}{4}$ radianes,

   (b) La tangente de 30°,

   (c) El seno de 18°,

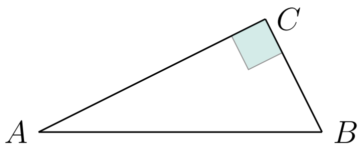
   (d) El coseno de $1,2$ radianes.

2. Calcular las razones trigonométricas de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{C}$, $A\hat{B}D$ y $C\hat{B}D$ del siguiente triángulo y completar la tabla.



θ	$\hat{A}$	$\hat{C}$	$A\hat{B}D$	$C\hat{B}D$
$\operatorname{sen}\theta$				
$\cos\theta$				
$\operatorname{tg}\theta$				

3. Resolver el triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ indicado en la figura, para cada uno de los siguientes casos.



   (a) $\hat{A} = 42°$, $|\overline{AB}| = 7$ cm.

   (b) $|\overline{AB}| = 43,9$ cm, $|\overline{AC}| = 24,3$ cm.

   (c) $\hat{B} = 55°$, $|\overline{AC}| = 12$ cm.

Actividades

1. Aritmética

1.1 Conjuntos numéricos

1. Para cada afirmación, indicar si es verdadera (V) o falsa (F) y justificar.
   (a) Todo número real es racional.
   (b) Todo número entero es racional.
   (c) Todo número real es irracional.
   (d) Existen números racionales que no son enteros.

1.2 La recta numérica. Valor absoluto

2. Escribir, en cada caso, todos los **números enteros** que verifican las siguientes condiciones.
   (a) Mayores que el opuesto de 101 y menores que -97.
   (b) Mayores o iguales que -17 y menores que el inverso de $-\frac{2}{25}$.
   (c) Menores o iguales que $|2|$ y mayores o iguales que $-\sqrt{5}$.

3. Representar en una recta numérica los siguientes conjuntos. Expresar con palabras de qué conjunto se trata.
   (a) $A = \{a \in \mathbb{N} : a > 3\}$
   (b) $B = \{b \in \mathbb{Z} : -3 < c \leqslant 4\}$
   (c) $C = \left\{c \in \mathbb{R}^+ : b \leqslant \dfrac{5}{4}\right\}$

1.3 Números reales. Operaciones combinadas

4. Calcular el valor exacto **sin utilizar calculadora**.
   (a) $-6 \cdot 3 - (-5) \cdot [-9 : (-3)]$
   (b) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-1} : |-2| + \dfrac{3}{2} : (-2) - \left[\left(\dfrac{1}{2} - 1\right)^{-1} + 2\right]$
   (c) $|2^{-1} + 8^{-1} + 16^{-1} - 2|$
   (d) $\dfrac{3}{2} \cdot \left(-\dfrac{3}{2}\right) : \left(4^{-1} : \dfrac{2}{3}\right)$

5. Indicar cuáles de los siguientes números NO están entre $2,47$ y $2,48$.

$$8 : \pi \qquad 2,4\overset{\frown}{7} \qquad \frac{245}{99} \qquad 2,\overset{\frown}{48} \qquad \sqrt[4]{25 + 3\pi} \qquad 0,404^{-1}$$

6. Para cada afirmación, indicar si es verdadera (V) o falsa (F) y justificar.
   (a) El inverso de cualquier número entero es un número entero.
   (b) El inverso de un número natural nunca es un número natural.
   (c) El opuesto de cualquier número entero siempre es negativo.
   (d) El opuesto de cualquier número natural es un entero negativo.

7. (a) Resolver las operaciones indicadas en cada caso
   i. $a = 6,\ b = 2 \longrightarrow$ $|a+b| = ...$ $|a-b| = ...$

      $|a|+|b| = ...$ $|a|-|b| = ...$

   ii. $a = \frac{2}{3},\ b = \frac{5}{2} \longrightarrow$ $|a+b| = ...$ $|a-b| = ...$

      $|a|+|b| = ...$ $|a|-|b| = ...$

   iii. $a = 2,\ b = -\frac{12}{5} \longrightarrow$ $|a+b| = ...$ $|a-b| = ...$

      $|a|+|b| = ...$ $|a|-|b| = ...$

   (b) Observando los resultados encontrados en el inciso anterior, ¿podemos decir que para cualquier par de números reales a, b valen las igualdades

$$|a+b| = |a|+|b| \quad \text{y} \quad |a-b| = |a|-|b|?$$

8. Indicar cuáles de los siguientes resultados son correctos y cuales incorrectos. En los casos incorrectos, resolver correctamente el cálculo planteado.

   (a) $\dfrac{3}{2+5} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2}$

   (b) $\dfrac{7+2}{9} = \dfrac{7}{9} + \dfrac{2}{9}$

   (c) $\dfrac{4+9}{2+5} = \dfrac{4}{2} + \dfrac{9}{5}$

   (d) $\dfrac{2+7}{4} = \dfrac{\overset{1}{\cancel{2}}+7}{\underset{2}{\cancel{4}}} = \dfrac{1+7}{2}$

   (e) $\dfrac{3\cdot 8}{2+5} = \dfrac{3\cdot \overset{4}{\cancel{8}}}{\overset{1}{\cancel{2}}+5} = \dfrac{3\cdot 4}{1\cdot 5}$

   (f) $\dfrac{3\cdot 8}{2\cdot 5} = \dfrac{3\cdot \overset{4}{\cancel{8}}}{\overset{1}{\cancel{2}}\cdot 5} = \dfrac{3\cdot 4}{1\cdot 5}$

   (g) $\dfrac{4+6}{3\cdot 3} = \dfrac{4}{3} + \dfrac{6}{3}$

   (h) $\dfrac{3:4}{2:5} = \dfrac{3}{4} : \dfrac{2}{5}$

9. Sean a, b, c tres números reales no nulos. Indicar en cada caso a qué es igual la expresión de la izquierda.

   (a) $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = ...$ ☐ $a : \dfrac{b}{c}$ ó ☐ $\dfrac{a}{b} : c$

   (b) $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = ...$ ☐ $a : \dfrac{b}{c}$ ó ☐ $\dfrac{a}{b} : c$

1.4 Potenciación y radicación

10. Decir cuáles de las siguientes desigualdades son verdaderas (V) y cuáles son falsas (F). Justificar haciendo las cuentas correspondientes.

(a) $(-2)^3 < (-2)^4$

(b) $(-2)^3 > -2^2$

(c) $2 \cdot (-2)^2 > -2 \cdot 2^2$

(d) $2 \cdot (-2)^2 > -2 \cdot (-2)^2$

(e) $1 - (-2)^2 > (-2)^2 : (-2)$

(f) $(-2)^2 + (-2)^3 > -2 \cdot (-2)$

11. Indicar cuáles de los siguieres cálculos son correctos y cuáles son incorrectos. Resolver correctamente los cálculos incorrectos.

(a) $81 \cdot 49 = 9^2 \cdot 7^2 = (9 \cdot 7)^2$

(b) $81 + 49 = 9^2 + 7^2 = (9+7)^2$

(c) $\sqrt{25+16} = \sqrt[\cancel{2}]{5^{\cancel{2}} + 4^{\cancel{2}}} = 5 + 4$

(d) $\sqrt{25 \cdot 16} = \sqrt{5^2 \cdot 4^2} = \sqrt[\cancel{2}]{(5 \cdot 4)^{\cancel{2}}} = 5 \cdot 4$

(e) $\sqrt{2 \cdot 9} = \sqrt[\cancel{2}]{2 \cdot 3^{\cancel{2}}} = 2 \cdot 3$

12. Resolver las siguientes operaciones **sin usar calculadora**.

(a) $\sqrt[3]{\left(\dfrac{5}{-15} + 3^{-3}\right)} - 2 : \left|\dfrac{3}{4} - 1\right|^{-1}$

(b) $\dfrac{12 : \dfrac{4}{3}}{\dfrac{9}{2} \cdot \sqrt[3]{-\dfrac{8}{27}}}$

(c) $\dfrac{\dfrac{15}{7} \cdot 6^{-1}}{(-2)^{-2} : 7}$

(d) $\dfrac{3 - 3^{-1}}{2} + \dfrac{(-2)^3 + \sqrt[4]{81}}{1 + 2^{-2}}$

13. Resolver utilizando la definición y las propiedades de la potenciación y radicación.

(a) $2^{-1} \cdot 2^{-3} \cdot 2^{-4}$

(b) $\left(7^{-1} : 7^{-3}\right) \cdot 7^{-2}$

(c) $\sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2}}}$

(d) $\left(\sqrt[5]{(-4)^3} : (-4)^{\frac{1}{5}} \cdot \left(-\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{4}{5}}\right)^{-1}$,

(e) $\left(7^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1}{2} \cdot 7^{-2}} : \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{3}}$

(f) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{5}} \cdot \sqrt[6]{5^5}\right)^3$

(g) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-\frac{5}{3}} \cdot \sqrt[5]{\left(\dfrac{1}{5}\right)^{10} \cdot \sqrt[3]{(-2)^{-1} : (-2)^{-2}}}$

(h) $\dfrac{\sqrt{3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-3}} \cdot \sqrt[4]{3 \cdot 2^3}}{\left(\sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[3]{3}\right)^6}$

14. Mostrar la validez de las siguientes igualdades **sin utilizar calculadora**.

(a) $\left(\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[3]{2}}}\right)^{96} + \left\{\left[\left(\sqrt[6]{\sqrt[3]{2}}\right)^2\right]^3\right\}^9 = 24$

(b) $\dfrac{\sqrt{5^{999} + 5^{999} + 5^{999} + 5^{999} + 5^{999}}}{\sqrt[3]{5^{1.493} + 5^{1.493} + 5^{1.493} + 5^{1.493} + 5^{1.493}}} = 25$

1.5 Operaciones con radicales. Racionalización

15. Efectuar las siguientes operaciones e indicar a qué conjuntos numéricos pertenece el resultado.

(a) $2 \cdot (1 + 2\sqrt{5}) - (\sqrt{5} - 2)^2$

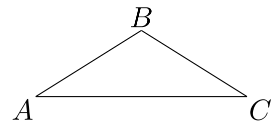
(b) $\left(-\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2 - \dfrac{4 - 2\sqrt{6}}{3}$,

(c) $\left(\sqrt{5} - \sqrt{6}\right) \cdot \left(\sqrt{5} + \sqrt{6}\right) \cdot \dfrac{1}{2}$,

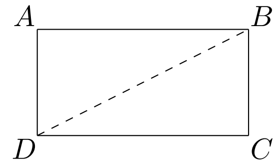
(d) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2$.

16. Haciendo uso de las fórmulas elementales de la geometría, calcular en forma exacta el área y el perímetro de las siguientes figuras.

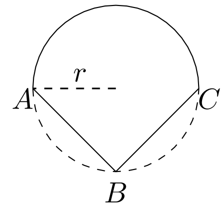
(a) $\overset{\triangle}{ABC}$ es un triángulo isósceles,
$|\overline{AC}| = 12\sqrt{3}$ cm,
$|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = 10\sqrt{3}$ cm.



(b) $ABCD$ es un rectángulo,
$|\overline{AB}| = 4\sqrt{2}$ cm,
$|\overline{BD}| = 5\sqrt{2}$ cm.



(c) Los puntos A, B, C están sobre la circunferencia de radio $r = 3$ y forman un triángulo isósceles.



17. Racionalizar las siguientes expresiones y, cuando sea posible, operar algebraicamente hasta obtener una expresión más simple.

(a) $\dfrac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{12}}$

(b) $\left(\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1}$

(c) $\dfrac{3}{\sqrt{5} - 2}$

(d) $\dfrac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{3\sqrt{3} + 2}$

(e) $\dfrac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} - \dfrac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$

(f) $\dfrac{2\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{12}}{1 - \sqrt{3}}$

1.6 Logaritmos, aproximaciones y notación científica

18. Redondear cada número con 3 cifras significativas y ubicarlo entre dos números enteros consecutivos. Por ejemplo:

$$-2\pi \approx -6,283; \qquad -7 < -2\pi < -6$$

(a) $\pi + 2 \approx \ldots\ldots\ldots$; $\quad \ldots\ldots < \pi + 2 < \ldots\ldots$

(b) $10\ln(7) \approx \ldots\ldots\ldots$; $\quad \ldots. < 10\ln(7) < \ldots.$

(c) $\sqrt{2} + 2\sqrt[3]{-20} \approx \ldots\ldots\ldots$; $\quad \ldots. < \sqrt{2} + 2\sqrt[3]{-20} < \ldots.$

(d) $\ln(0,05) - 2 \approx \ldots\ldots\ldots$; $\quad \ldots. < \ln(0,05) - 2 < \ldots.$

19. Plantear y resolver cada uno de los siguientes problemas, dando una respuesta adecuada al contexto.
    (a) El valor de un tractor se devalúa a razón de 8% cada año que transcurre. Si su valor al momento de comprarlo es de 38.000 dólares, ¿cuál será su valor al año siguiente?
    (b) La magnitud M de un terremoto se calcula mediante la fórmula

$$M = \frac{\log(E) - 11,8}{1,5}$$

    donde E es la energía liberada, medida en ergios. En el año 2011, en Japón hubo un sismo que liberó una energía de 2×10^{25} ergios. ¿Cuál fue su magnitud?

20. Sean $a = 7,4 \times 10^3$ y $b = 4,9 \times 10^5$.
    (a) Expresar estos números en notación decimal.
    (b) Indicar cuáles de los siguientes cálculos son correctos y cuales incorrectos. Resolver correctamente los cálculos incorrectos.

    i. $ab = 362.600.000.000$ $\quad$ ii. $a - b = 2,5 \times 10^{-2}$ $\quad$ iii. $3b : a = 197,767$

21. Sean $a = 0,005$ y $b = 0,02$.
    (a) Expresar estos números en notación científica.
    (b) Indicar cuáles de los siguientes cálculos son correctos y cuales incorrectos. Resolver correctamente los cálculos incorrectos.

    i. $ab = 10^{-4}$ $\quad$ ii. $2a : b = 5 \times 10^{-2}$ $\quad$ iii. $b : (4a) = 1 \times 10^1$

22. Sean

$$x = 0,0075 : 250; \qquad y = 7,5 \times 10^{-3}; \qquad z = 0,75 : 25.000.$$

    ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

    (a) $y < x = z$ $\quad$ (c) $z < x < y$ $\quad$ (e) $z < y < x$
    (b) $y < z < x$ $\quad$ (d) $z = x < y$ $\quad$ (f) $x = y = z$

23. Plantear y resolver los siguientes problemas, haciendo uso de la notación científica y dando una respuesta acorde al contexto.

(a) Calcular el número aproximado de glóbulos rojos que tiene una persona, sabiendo que tiene unos 4.500.000 por milímetro cúbico y que su cantidad de sangre es de 5 litros ($1l = 1.000.000$ mm^3). ¿Qué longitud ocuparían esos glóbulos rojos puestos en fila si su diámetro es de 0,008 milímetros por término medio? Expresar este valor en kilómetros (1 km= 1.000.000 mm).

(b) Una vacuna tiene 100.000.000 bacterias por centímetro cúbico. ¿Cuántas bacterias habrá en una caja de 120 ampollas de 80 milímetros cúbicos cada una?

(c) En una mina se extrajeron, en cierto mes, $3,7 \times 10^4$ kg de mineral y al siguiente se extrajeron $4,2 \times 10^5$ kg.

i. ¿Cuántos kilogramos de mineral se extrajeron en total en los dos meses?

ii. ¿Cuántos kilogramos más se extrajeron el segundo mes respecto del primero?

2. Álgebra

2.1 Expresiones algebraicas. Operaciones. Factorización

1. Operar algebraicamente para obtener una expresión más simple.

(a) $x(y + 2x) + 2y(y - 3)$

(b) $\dfrac{(x-\sqrt{3})^2}{2} - \left(\dfrac{x+\sqrt{3}}{2}\right)^2$

(c) $(a - 2b)(b - a) + (a - b)(a + b)$

(d) $\left(2x^2 - \dfrac{2}{3}\right) x^2 - \dfrac{3}{2}\left(x^2 + 2\right)^2$

2. Completar cada uno de los binomios (sumando o restando un término) para que resulte un trinomio cuadrado perfecto. Expresar cada trinomio encontrado en la forma $(a + b)^2$ con expresiones adecuadas de a y b. Por ejemplo,

$$9 + 12a^2 + \underline{\quad 4a^4 \quad} = (\underline{\,3\,} + \underline{\,2a^2\,})^2.$$

(a) $4x^2 + 1 + \_\_\_\_\_ = (\_\_\_\_ + \_\_\_\_)^2$

(b) $x^2 - 8x + \_\_\_\_\_ = (\_\_\_\_ + \_\_\_\_)^2$

(c) $-4xy + 4y^2 + \_\_\_\_\_ = (\_\_\_\_ + \_\_\_\_)^2$

(d) $9 + 24x + \_\_\_\_\_ = (\_\_\_\_ + \_\_\_\_)^2$

3. Factorizar lo más posible las siguientes expresiones.

(a) $5x^3 - 6x^2 - x^4$

(b) $4x^2y - 4xy^2 + y^3$

(c) $9a^2 + 3a^4$

(d) $x^4 - 64y^2$

2.2 Ecuaciones

4. Resolver las siguientes ecuaciones lineales.

(a) $2x-3=\dfrac{1}{2}$

(b) $5-2\,(x+3)=-\dfrac{1}{2}\,(4x+2)$

(c) $\dfrac{4x-6}{12}-\dfrac{3x-8}{4}=\dfrac{2x-9}{6}-\dfrac{x-4}{8}$

(d) $\dfrac{2-(1-x)}{3}-x=1-\dfrac{2}{3}x$

5. Encontrar, si existen, las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas y bicuadráticas.

   (a) $2x+3-x^2=0$

   (b) $2x^2+\dfrac{1}{2}x+1=x(x-2)$

   (c) $\dfrac{8}{3}x^4+4x^2-\dfrac{9}{2}=0$

   (d) $2x^4+6=8x^2$

6. Determinar el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones y verificar el resultado obtenido.

   (a) $(x^2-2)^2=0$

   (b) $3\,(x^2+x+8)\,(x^2+5x)=0$

   (c) $\left(x^2-\dfrac{3x-1}{2}\right)\left(\sqrt{2}x-2\sqrt{2}\right)=0$

   (d) $(x^2-25)\,(x+1)\,x=0$

   (e) $(x^2+1)\,(12-x)=0$

   (f) $\left(x^4-\dfrac{1}{16}\right)(2x^3-3x^2)=0$

7. Encontrar un valor de k de forma que

   (a) $x=-3$ sea solución de $5x+3k=1$,

   (b) $x=\sqrt{2}$ sea solución de $2x^2+kx=6$,

   (c) $x=-\frac{1}{3}$ sea solución de $3kx^2+x=k$.

8. Plantear y resolver los siguientes problemas.

   (a) Después de un 20% de descuento, un proyector se vendió en \$9600. ¿Cuál es el precio original del artículo?

   (b) En un almacén hay un total de 270 latas de pintura de 5, 10 y 20 litros. Si el número de latas de 5 ℓ supera en 28 unidades al de latas de 10 ℓ, y las latas de 20 ℓ son el doble de las de 10 ℓ, ¿cuántas latas de cada tipo hay?

   (c) La entrada a un cine cuesta 9 dólares. En la última función se vendieron las tres quintas parte de las entradas disponibles, lo cual reportó una recaudación de 567 dólares. ¿Cuántas entradas quedaron sin vender?

   (d) Cuatro socios de una empresa se reparten la ganancia de una operación comercial de la siguiente manera: a Eduardo le corresponde la tercera parte de lo ganado, a Jorge las dos quintas partes de lo ganado y los \$ 2420 restantes se los reparten Miguel y Roberto en partes iguales. ¿Cuál fue la ganancia que dejó la operación comercial? ¿Cuánto recibió cada uno?

   (e) Un empleado de un negocio de venta de electrodomésticos cobra un sueldo fijo de 540 dólares más una comisión de 5,5 dólares por cada artículo que vende. Su sueldo del mes pasado fue de 792 dólares. ¿Cuántos artículos vendió?

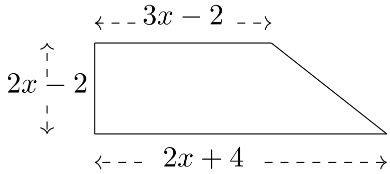
9. Plantear cada uno de los siguientes problemas, resolver y verificar la validez de la respuesta obtenida.

(a) Hallar dos números naturales consecutivos tales que su producto sea 9506.

(b) Hallar la medida del lado de un cuadrado sabiendo que al disminuir en 6 m uno de sus lados, se obtiene un rectángulo cuya área es 91 m^2.

(c) Calcular las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su base es tres centímetros mayor que su altura y su área $78,75$ cm^2.

(d) Calcular la medida en cm de las bases y la altura del siguiente trapecio sabiendo que su área es de 34 cm^2.



2.3 Inecuaciones

10. Resolver las siguientes inecuaciones, graficar el conjunto solución y expresarlo usando la notación de intervalo.

(a) $10 - \dfrac{5x}{2} \geqslant 0$

(b) $-3x + 1 \leqslant 5(x-3) + 2$

(c) $\dfrac{34-2x}{3} - 9 < \dfrac{3x+8}{4} - x$

(d) $x - 7 > 2(x-1) - (3-2x)$

11. Resolver las siguientes inecuaciones haciendo uso de las reglas de signos y expresar la solución en forma de intervalo.

(a) $(2x-1)(x-3) \geqslant 0$

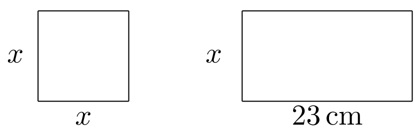
(b) $(x - 2x^2)\left(x + \dfrac{1}{2}\right) \leqslant 0$

(c) $x^2 \leqslant x$

(d) $x^4 - (3x)^2 > 0$

12. Plantear y resolver los siguientes problemas.

(a) Hallar los valores de x para los cuales el área del cuadrado es mayor que la del rectángulo.



(b) Se quiere alquilar un auto para un viaje y las opciones con que se cuenta son

i. un costo fijo de \$ 100 al que se agrega \$ 20 por km recorrido,

ii. un cargo inicial de \$ 400 más \$ 17 por km recorrido.

¿Cuántos kilómetros hay que recorrer para que la opción ii) resulte la más conveniente?

(c) El perímetro de un cuadrado es inferior a 30 cm. Si aumentamos cada lado en 2,5 cm su perímetro supera los 30 cm. ¿Entre qué valores se encuentra la medida de su lado?

(d) En un examen de tipo multiple choice con 40 preguntas se suman 2,5 puntos por cada respuesta correcta y se restan 0,5 puntos por cada respuesta incorrecta. ¿Cuántas preguntas hay que contestar bien para obtener como mínimo 40 puntos, si es obligatorio responder a todas?

(e) El régimen de cursado de Análisis Matemático I requiere obtener un promedio no menor a 60 puntos entre las notas de los tres exámenes parciales. Quienes no logran ese promedio deben rendir un examen recuperatorio. Cada examen, parcial o recuperatorio, se puntúa con un valor entre 0 y 100. Un estudiante obtuvo un 47 en el primer parcial y un 68 en el segundo. ¿Qué notas puede sacar en el tercer parcial de forma de cursar la materia sin tener que rendir el recuperatorio?

<u>Aclaración:</u> el promedio entre tres cantidades se calcula sumando estos tres valores y dividiendo el resultado por 3.

2.4 Polinomios. Elementos y operaciones

13. Determinar los valores de a y $b \in \mathbb{R}$ para que el polinomio

$$Q(x) = (3a-6)x^2 + (4a-b-9)x,$$

sea igual al polinomio nulo.

14. Hallar el valor de m en los siguientes polinomios para que se cumplan las condiciones indicadas en cada caso.

(a) $P(x) = x^3 + 2x^2 - mx \quad \text{y} \quad P(-1) = 3,$

(b) $Q(x) = x^4 - \dfrac{1}{3}x^2 - m \quad \text{y} \quad Q(1) = 2,$

(c) $R(x) = -x^2 + 3\sqrt{5}x - m \quad \text{y} \quad R(\sqrt{5}) = 0.$

15. Dados $P(x) = 2x^2 + 3x - 4$ y $Q(x) = x - 3x^2 + 1$, resolver las siguientes operaciones.

(a) $3P(x) - 2Q(x)$ (b) $(x-1)Q(x) + xP(x)$ (c) $P(x) \cdot Q(x)$

16. Determinar cuáles de los números $x_1 = 2$, $x_2 = -1$ y $x_3 = -\dfrac{1}{2}$ son raíces del polinomio $P(x) = -2x^3 + x^2 - x - 1$.

17. Hallar, si existen, las raíces reales de los siguientes polinomios, indicando, en cada caso, el orden de multiplicidad. Dar una expresión factorizada de cada polinomio.

(a) $P(x) = 2x^5 + x^4 + x^2$, sabiendo que -1 es raíz.

(b) $P(x) = x^5 + 2x^3 + x$

(c) $P(x) = 8x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 9x - 2$, sabiendo que $\frac{1}{2}$ es raíz.

(d) $P(x) = (x^4 - 18x^2 + 81)(x^5 + 4x^3)$

(e) $P(x) = (x^4 - 25)(x^2 + 2x + 2)$

(f) $P(x) = 3x^4 - 9x^3 + 9x^2 - 3x$, sabiendo que 1 es una raíz.

18. Indicar, en cada caso, un polinomio $P(x)$ de grado mínimo con coeficientes reales que cumpla las condiciones establecidas.

(a) $P(x)$ tiene por raíces $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{4}$, $x_3 = \frac{2}{3}$ y $x_4 = -1$, x_4 es raíz de multiplicidad dos. ¿Es único el polinomio $P(x)$?, justificar.

(b) $P(x)$ es un polinomio mónico que tiene por raíces a $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = 4$, ambas de multiplicidad dos.

(c) $P(x)$ su coeficiente principal es -3 y sus raíces son $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$, $x_3 = \sqrt{2}$ y $x_4 = -\sqrt{2}$.

(d) $P(x)$ tiene por raíces $x_1 = 2$, $x_2 = -3$ y su valor en $x = 0$ es 3.

2.5 Expresiones algebraicas racionales. Simplificación

19. Operar algebraicamente, factorizar y simplificar al máximo las siguientes expresiones.

(a) $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{x+3}{x^2+4x+4}$

(b) $\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1} - \dfrac{x^2+1}{x^2+x}$

(c) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{q+1} - \dfrac{\sqrt{3}}{q-1}\right) \cdot \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{3}q^2}{6}$

(d) $\left(p+5+\dfrac{25}{p-5}\right) \cdot \left(1-\dfrac{25}{p^2}\right)$

(e) $\left(x+\dfrac{2x}{x-2}\right) : \left(1+\dfrac{4}{x^2-4}\right)$

(f) $\dfrac{6-n^2}{\sqrt{6}n+n^2} \cdot \dfrac{\sqrt{6}n}{6-2\sqrt{6}n+n^2}$

20. (a) Verificar la validez de la igualdad $\dfrac{b}{\sqrt{a}-\sqrt{a+b}} = -\sqrt{a}-\sqrt{a+b}$.

(b) Usando el resultado anterior, operar algebraicamente y simplificar la expresión

$$\frac{b}{(a+b)\left(\sqrt{a}-\sqrt{a+b}\right)} + \frac{1}{\sqrt{a+b}}.$$

21. Resolver las siguientes ecuaciones.

(a) $\dfrac{x}{x-3} + \dfrac{2}{x+3} = \dfrac{x^2}{x^2-9}$

(b) $\dfrac{5x-3}{4-x^2} = \dfrac{5+x}{2+x} + \dfrac{x-3}{2-x}$

(c) $\dfrac{x^2-4x+1}{x-1} = \dfrac{x^2-3x}{x-1} - 1$

(d) $x + \dfrac{2}{x+5} = \dfrac{12+2x}{x+5}$

(e) $\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4} = -1$

(f) $\dfrac{(x+1)(x+3)}{x+1} = \dfrac{x^2-1}{x-1}$

22. Resolver las siguientes inecuaciones haciendo uso de las reglas de signos y expresar la solución en forma de intervalo.

(a) $\dfrac{-1-3x}{1-4x} < 2$,

(b) $\dfrac{x+2}{2-x} \geqslant 1$,

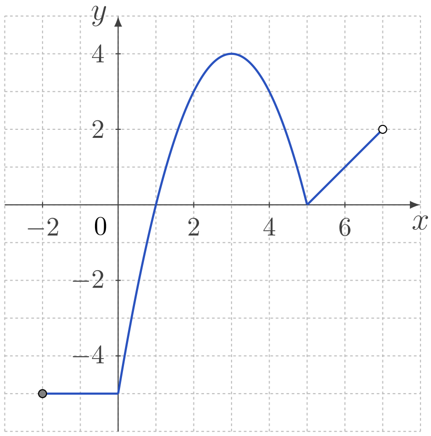
(c) $\dfrac{1}{x+2} \leqslant -\dfrac{x^2}{x+2}$,

(d) $-\dfrac{2}{x} > -\dfrac{5x}{x^2+6}$.

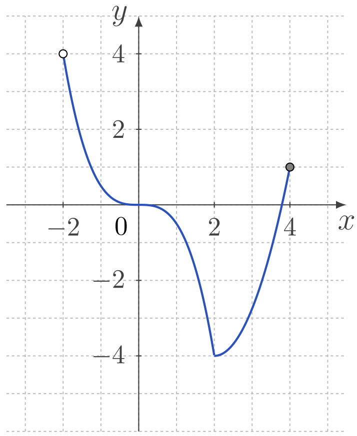
3. Funciones de variable real

3.1 Funciones: conceptos elementales

1. A partir de los gráficos de las siguientes funciones



f



g

determinar, si es posible,

(a) el dominio e imagen de cada una de ellas,

(b) los valores $f(4)$, $f(-2)$, $f(6)$, $g(0)$, $g(4)$,

(c) los puntos de intersección de f y de g con los ejes coordenados,

(d) los puntos x del dominio de f donde $f(x) = 2$.

2. Para cada una de las siguientes funciones

$$g(x) = \frac{4x^2 - x}{3x - 4}, \qquad h(x) = \frac{1 - x}{x},$$

determinar, si es posible

(a) $g(-2)$, $g\left(\frac{4}{3}\right)$,

(b) los x tales que $g(x) = 0$,

(c) $h(1)$, $h(0)$,

(d) los x tales que $h(x) > 1$.

3. Dada $f(x) = \dfrac{1}{x - 2} + 1$, determinar los valores del dominio de f para los cuales

(a) $f(x) = 0$, (b) $f(x) = 3$, (c) $f(x) < -1$, (d) $f(x) > 3$.

4. Hallar el dominio de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2 - 16}$,

(b) $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{4x - x^2}$,

(c) $f(x) = \dfrac{x + 1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{6x}{2 - 5x}$,

(d) $f(x) = \left(\sqrt{2x - 1} + \sqrt[4]{x - 4}\right)^2$,

(e) $f(x) = \sqrt{8-x} + \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$,

(f) $f\,(x) = \sqrt[3]{x+2} + 3\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-1}}$.

5. Determinar el dominio de las siguientes funciones.

$$f\,(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}-3}, \qquad g\,(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}+3}.$$

   (a) ¿Son iguales los dominios?

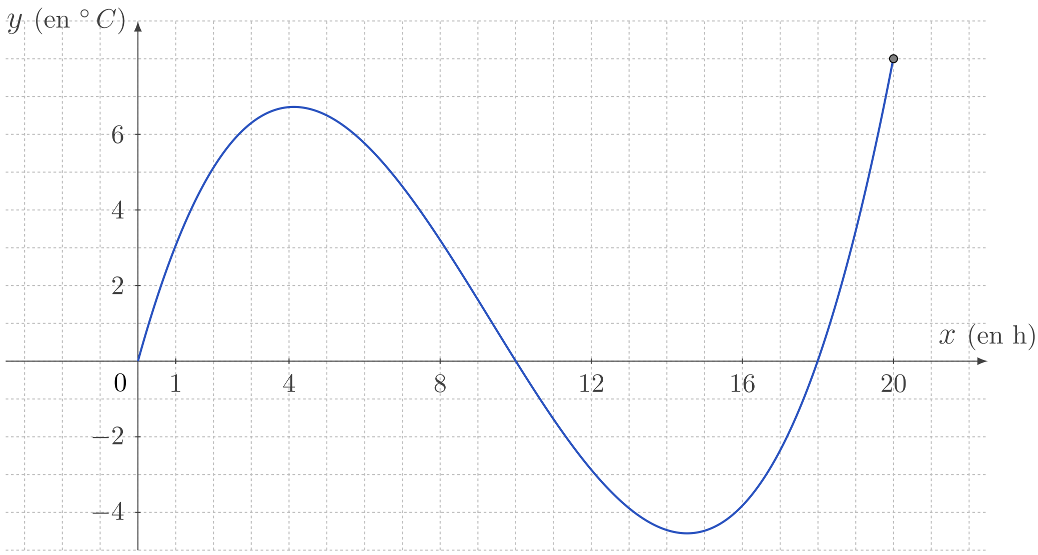
   (b) Calcular, si es posible, $f\,(-8)$ y $g\,(-8)$.

6. Dada $g(x) = ax^3 - 3x + a$, determinar, en cada caso, los valores de a para los cuales se verifican las siguientes condiciones.

   (a) $g(-2) = 27$,

   (b) g intersecta al eje de las abscisas en $x = -2$.

7. En un laboratorio se toma la temperatura de una cierta sustancia a partir de las 8 de la mañana. Se obtiene la siguiente gráfica que modela la evolución la temperatura (en grados centígrados) a medida que transcurre el tiempo (medido en horas) desde iniciadas las mediciones.



Se supone que el modelo (la curva) refleja adecuadamente la temperatura en cada instante. Para responder las siguientes consignas, puede ser necesario aproximar algunos valores a partir de lo que se observa en el gráfico.

   (a) Hallar el dominio y la imagen de esta función, e indicar qué información refleja cada uno.

   (b) ¿Cuál fue la temperatura a la hora de haber comenzado las mediciones?

   (c) Hallar las intersecciones de la función con los ejes cartesianos e interpretar esta información en el contexto del problema.

   (d) ¿Hubo algún momento en el cual la temperatura fue negativa?

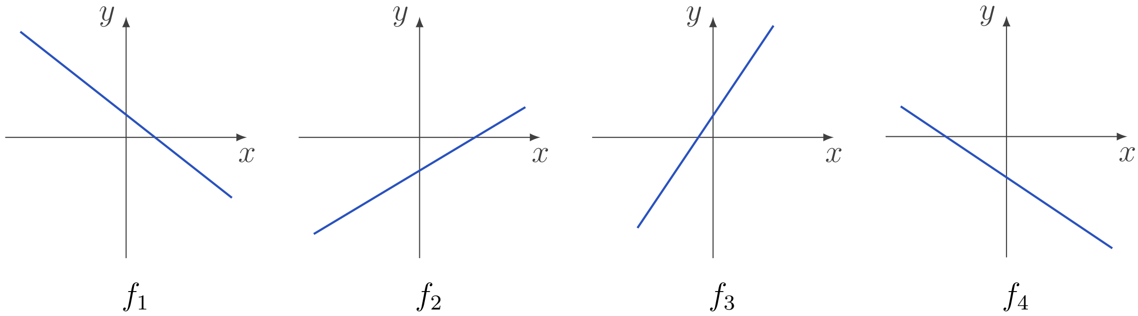
(e) ¿En qué momento la temperatura fue de $3^\circ\,C$?

(f) ¿Cuál fue la temperatura máxima que alcanzó esta sustancia y cuál la mínima? ¿En qué instante se alcanzó cada una?

3.2 Función lineal. Rectas

8. Sabiendo que las gráficas corresponden a funciones del tipo $f(x) = ax + b$, asociar cada condición con su gráfica correspondiente.

   (a) $a < 0$ y $b < 0$, (b) $a > 0$ y $b < 0$, (c) $a < 0$ y $b > 0$, (d) $a > 0$ y $b > 0$.



9. Cuatro puntos A, B, C y D pertenecen a la recta $3x - 2y - 6 = 0$, sus abscisas son 4, 0, 2 y $\frac{2}{5}$, respectivamente. Determinar las ordenadas de los puntos. Representar gráficamente la recta y los puntos.

10. Sea la función lineal $f(x) = -\dfrac{2}{3}x + 5$.

    (a) Graficar e indicar el dominio y la imagen.

    (b) Hallar $f(6)$, $f(-1)$ y $f(0,75)$.

    (c) Hallar $a, b \in \mathrm{Dom}\,(f)$ tal que $f(a) = 30$ y $f(b) = -14$.

    (d) Hallar los valores de $x \in \mathrm{Dom}\,(f)$ tales que $f(x) \geq 9$.

11. La humedad gravimétrica (HG) es una forma de indicar la humedad del suelo en un campo. Para medirla, se extrae el agua de una muestra de suelo mediante evaporación, lavado y una reacción química. La humedad gravimétrica del suelo depende del peso (más precisamente, de la masa) de la muestra cuando está húmeda y cuando está seca.

    En cierto campo, la masa de una muestra de suelo seco es de 197 gramos y su humedad gravimétrica H es una función lineal de la m de una muestra de suelo húmedo (dada en gramos) dada por:

$$H(m) = \frac{100}{197}m - 100.$$

    Esta función H representa el *porcentaje de humedad* del suelo.

    (a) Indicar el dominio de H en el contexto del problema y graficarla. (Atención: la masa m de una muestra de suelo húmedo ¿puede pesar menos que cuando está seca?).

    (b) Si la masa de una muestra de suelo húmedo es de 230 gramos, ¿cuál es el porcentaje de humedad del suelo?

(c) ¿Cuál debe ser la masa de la muestra de suelo húmedo para que la humedad H del suelo alcance el 100%?

(d) Hallar (si existen) las intersecciones de H con los ejes cartesianos, e interpretar estos valores en el contexto del problema.

12. Durante 48 días se realizó un experimento con gallinas. Se determinó que durante ese lapso el peso promedio es una función lineal del número de días trascurridos. Sabiendo que el peso promedio al inicio del experimento fue de 45 gramos y que 26 días después fue de 226 gramos, determinar la fórmula de dicha función lineal y calcular el peso promedio de las gallinas a los 35 días.

13. En un parque de diversiones se paga una entrada y luego un adicional por cada juego (todos los juegos tienen el mismo costo). Martín gastó \$ 35 y utilizó 4 juegos, y Leonel por utilizar 7 juegos gastó \$ 50.

    (a) Encontrar la fórmula de la función lineal que relaciona el costo del paseo con la cantidad de juegos que se utilizan. Representar gráficamente dicha función.

    (b) ¿Qué representan la pendiente y la ordenada al origen en este problema?

    (c) ¿Cuál será el costo de utilizar 6 juegos?

    (d) Si se dispone de \$ 70, ¿cuántos juegos se pueden utilizar?

14. En cada caso, hallar la ecuación de la recta que

    (a) tiene pendiente 2 y ordenada al origen -3,

    (b) pasa por el punto $P = (2, 3)$ y corta al eje de abscisas en $x = -1$,

    (c) corta a los ejes coordenados en $y = -2$ y en $x = 4$,

    (d) pasa por el punto $(-2, 3)$ y sea paralela al eje x,

    (e) pasa por el punto $(5, -1)$ y es perpendicular a la que pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(-3, -2)$.

15. Hallar todos los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ de modo tal que las rectas

$$L_1 : -3x + 2y - 4 = 0, \qquad L_2 : \ 3ax + 2y - b = 0$$

    sean

    (a) paralelas y distintas, (b) coincidentes, (c) perpendiculares.

16. Determinar, en cada caso, el o los valores de k para los cuales la recta de ecuación $kx + (2k + 1)y + 3 = 0$,

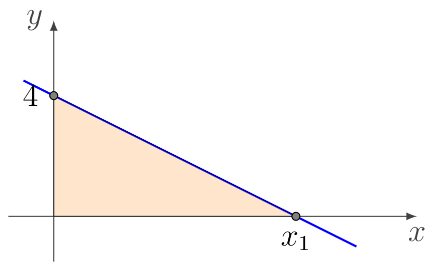
    (a) sea vertical,

    (b) tenga pendiente igual a $-\frac{1}{3}$,

    (c) pase por el punto $P = \left(k, -\frac{k}{2}\right)$,

    (d) corte en un punto a la recta $4x + 2y = 7$.

17. Dada la recta $y = mx + 4$, determinar el valor de m para que el área de la figura sea igual a 24.



18. Mostrar que los puntos $A = (3, 3)$, $B = (11, 5)$ y $C = (8, 17)$, son los vértices de un triángulo rectángulo y hallar su perímetro.

19. Los pares ordenados

$$A = (1, 3), \quad B = (3, -2), \quad C = (-1, -3), \quad D = (-3, 2),$$

determinan los vértices de un cuadrilátero.

(a) ¿De qué tipo de cuadrilátero se trata?

(b) Calcular su perímetro.

(c) Encontrar las ecuaciones de las rectas que contienen a sus diagonales.

20. Hallar, si existe, el punto de intersección entre los siguientes pares de rectas.

(a) $L_1 : 3x - y = 7, \quad L_2 : 2x + y = 4,$ (b) $L_1 : 3x - y = 6, \quad L_2 : 6x - 2y = 12,$

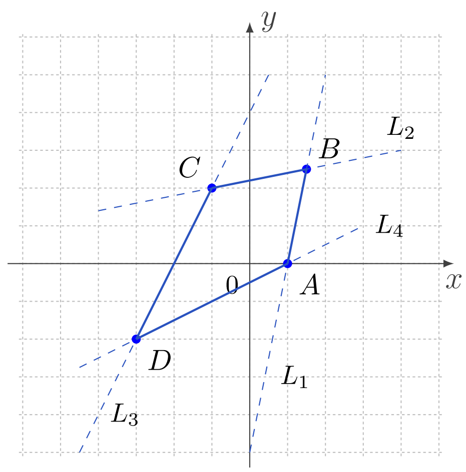
21. Encontrar las coordenadas de los vértices del romboide $ABCD$ a partir de las ecuaciones de las rectas que contienen a sus lados. Calcular el perímetro de esta figura.

$$L_1 : \ y = 5x - 5,$$

$$L_2 : \ y = \frac{1}{5}x + \frac{11}{5},$$

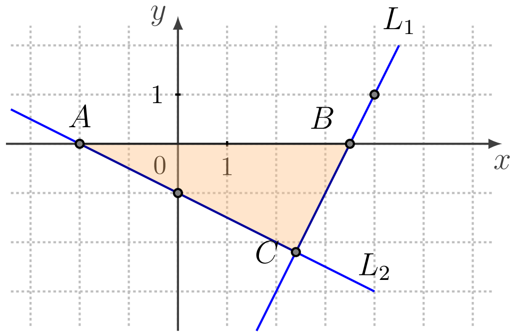
$$L_3 : \ y = 2x + 4,$$

$$L_4 : \ y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$



22. Encontrar el área del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ a partir de los siguientes datos.

- ▷ La recta L_2 interseca al eje de las abscisas en $(-2, 0)$ y al de las ordenadas en $(0, -1)$.
- ▷ La recta L_1 es perpendicular a L_2 y el punto $(4, 1)$ pertenece a L_1.



3.3 Función cuadrática. Parábolas

23. Determinar analíticamente si los puntos

$$P_1 = (0, 2), \quad P_2 = (3, -6), \quad P_3 = \left(-2, -\frac{2}{3}\right),$$

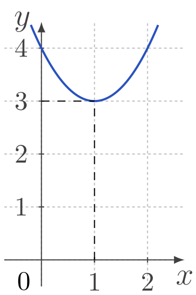
pertenecen al gráfico de $f(x) = x^2 + \dfrac{10}{3}x + 2$.

24. Si $f(x) = 2kx^2 + 1$ determinar, en cada caso, los valores de k de forma que

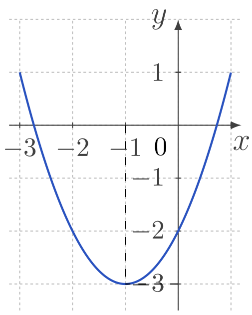
(a) la imagen de $x = 1$ sea $y = 1$, (b) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 5$.

25. Relacionar cada una de las siguientes parábolas con la ecuación correspondiente.

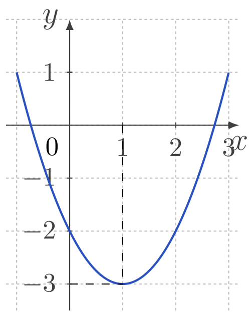
f_1



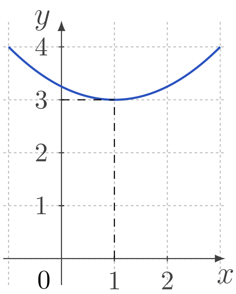
f_2



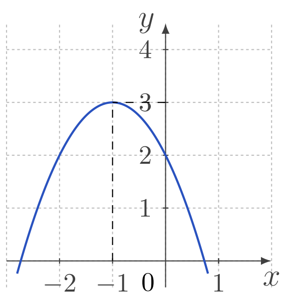
f_3



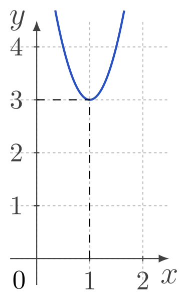
f_4



f_5



f_6



(a) $y = (x-1)^2 - 3$

(b) $y = \frac{1}{4}(x-1)^2 + 3$

(c) $y = -(x+1)^2 + 3$

(d) $y = (x-1)^2 + 3$

(e) $y = 4(x-1)^2 + 3$

(f) $y = (x+1)^2 - 3$

26. Dadas las funciones cuadráticas

i. $f(x) = -5x^2 - 3$,

ii. $f(x) = x^2 + 4x$,

iii. $f(x) = x^2 - 9x + 9$,

iv. $f(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}x - 1\right)\left(\sqrt{3}x + 1\right)$.

(a) expresarlas en forma canónica,

(b) determinar las coordenadas del vértice,

(c) indicar la imagen de cada una de las funciones,

(d) hallar la intersección con el eje y,

(e) verificar los resultados obtenidos mediante la representación gráfica de cada función.

27. Dadas las siguientes funciones cuadráticas

i. $f(x) = x^2 - x - 20$,

ii. $f(x) = 3x^2 - 42x + 147$,

iii. $f(x) = x^2 - 2x + 4$,

iv. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{2}{3}$.

(a) Indicar, sin trazar la gráfica, el número de intersecciones con el eje de abscisas.

(b) En caso de ser posible, expresar la función cuadrática en forma factorizada.

28. Hallar los posibles valores de m de modo tal que

(a) $f(x) = x^2 + mx + 4$ tenga dos ceros reales distintos,

(b) $g(x) = 2x^2 - x - m$ no tenga ceros reales,

(c) $h(x) = -x^2 - mx - 5$ tenga un único cero.

29. Hallar, en cada caso, la ecuación de la parábola que verifica las condiciones dadas.

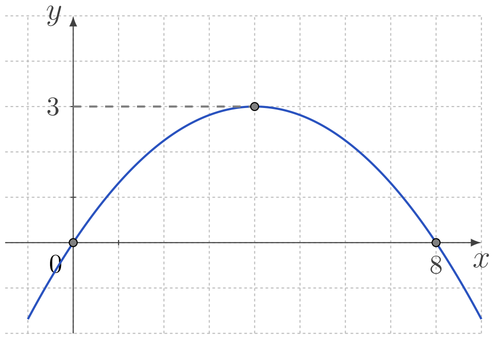
(a) Pasa por el punto $(1, -1)$ y su vértice es el punto $V = (-2, 3)$.

(b) Intersecta al eje y en el punto $(0, 3)$ y su vértice es el punto $V = (1, 2)$.

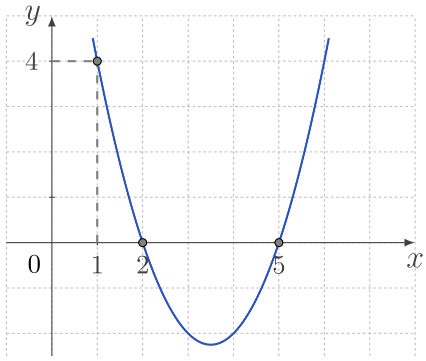
(c) Tiene a $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$ como ceros y cuyo gráfico pase por el punto $(0, 8)$.

(d) Tiene a $x_1 = \sqrt{3}$ y $x_2 = -\sqrt{3}$ como ceros y $f(1) = 1$.

30. Hallar, en cada caso, la ecuación de la función cuadrática utilizando los datos indicados en los gráficos (a) y (b).

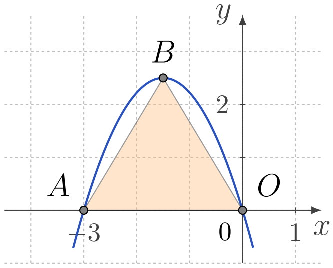


(a)



(b)

31. Hallar la ecuación de la parábola de vértice B sabiendo que $A = (-3, 0)$, $O = (0, 0)$ y el triángulo $\overset{\triangle}{ABO}$ es equilátero.



32. Un fabricante encuentra que la ganancia G obtenida por la venta de uno de sus productos está dada por

$$G(q) = -0,1q^2 + 150q - 2.000$$

donde q es la cantidad de unidades vendidas de dicho producto.

(a) ¿Cuántos productos debe vender para obtener la máxima ganancia posible? ¿Cuál es esa ganancia máxima?

(b) Si en marzo la venta de este producto le dejó una ganancia de $ 48.000 ¿Cuántas unidades vendió?

33. Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba. La altura alcanzada por la pelota (h, expresada en metros) en función del tiempo (t, expresado en segundos), está dada por la siguiente función

$$h(t) = 1 + 12\,t - 5\,t^2.$$

(a) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota y en qué instante se alcanza?

(b) ¿En qué instante la pelota toca el suelo?

(c) ¿En qué intervalo de tiempo la pelota asciende? ¿En qué intervalo de tiempo la pelota desciende?

34. Se desea construir un gallinero rectangular, y se dispone de 80 m de cerco alambrado para determinar sus lados.

(a) Llamando b y h a las medidas de los lados del rectángulo, hallar una función $h = f(b)$ que permita determinar h en función de b.

(b) Hallar una función $A = A(b)$ para modelar el área A del corral en función de b. Indicar el dominio y la imagen de esta función en el contexto del problema.

(c) ¿Para qué valor de b el área del corral será la más grande posible?

4. Razones trigonométricas

4.1 El sistema sexagesimal y el sistema radial

1. Completar la siguiente tabla.

Medida sexagesimal	0°	30°			90°		135°	150°		240°	270°		360°
Medida radial	0		$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$		$\frac{2}{3}\pi$			π			$\frac{5}{3}\pi$	

2. Determinar la longitud del arco de una circunferencia de 5 cm. de radio, determinado por un ángulo con vértice en el centro de la misma, que mide 60°.

3. Dos niños juegan en un sube y baja que tiene una longitud de 5,5 m. Al subir uno de los extremos de la barra recorrió un arco de 1,25 m. Calcular la medida radial del ángulo que describió dicha barra.

4. Una pista de carreras tiene una curva en forma de arco circular. El radio de la curva es de 50 m, y el ángulo central asociado al arco es de 120°.

   (a) ¿Cuál es la longitud del arco de la curva?

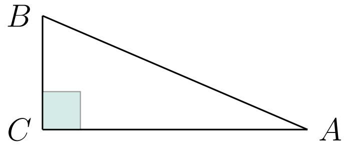
   (b) Si un automóvil recorre esta curva en 5 s, ¿cuál es su velocidad promedio en ese tramo?

   Nota: La velocidad promedio se calcula haciendo el cociente (la división) entre la distancia recorrida (aquí dada en metros) y el tiempo transcurrido (que lo damos en segundos), es decir,

   $$v_{prom} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo}}$$

   y las unidades correspondientes son m/s (metros sobre segundos, lo que en el lenguaje coloquial se dice metros por segundo).

4.2 Razones trigonométricas. Triángulos rectángulos



5. Dado el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ rectángulo en $\hat{C}$, ¿qué relación existe entre las razones trigonométricas del ángulo $\hat{A}$ y las del ángulo $\hat{B}$?

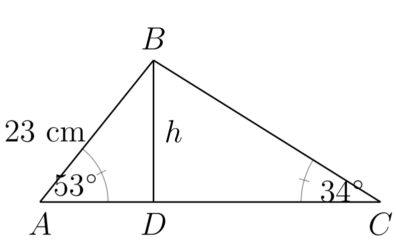
6. Un jugador de fútbol patea un penal derecho al centro del arco, y dándole a la pelota un ángulo de elevación de 15°. El punto de penal está a 11 metros de la línea del arco, y la altura de este es de 2,4 metros. Suponiendo que la pelota se desplaza en línea recta hasta llegar al arco, ¿puede entrar al arco, o pasa por arriba del travesaño?

7. Calcular la altura que alcanza un barrilete que sostiene un chico a 80 cm del suelo, si la cuerda tensada mide 35 m y forma un ángulo de 35° con el piso.

8. Los brazos de un compás, que miden 12 cm, forman un ángulo de 50°. ¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esa abertura?

9. Un poste se quiebra. La parte superior se inclina formando con la parte inferior un ángulo de 70°. El extremo superior toca el piso a una distancia de $2,10$ m del pie del poste. Determinar la longitud del poste.

10. A partir del dibujo, hallar



(a) la altura h del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$,

(b) la longitud de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$,

(c) el área del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$,

(d) el perímetro.

11. Desde el lugar donde se encuentra Lucía, puede observar el extremo superior de una torre con un ángulo de elevación de 32°. Si Lucía avanza 25 m en dirección a la torre, lo observa con un ángulo de 50°. Calcular la altura de la torre si la altura de Lucía es de 1,65 m.

12. En la cima de un cerro se ha levantado una antena de telefonía celular. Desde un punto ubicado en el valle se miden los ángulos de elevación del extremo superior y la base de la antena, obteniendo como resultado 57° y 42°, respectivamente. ¿Cuál es la altura del cerro si la antena mide 80 m de alto?

13. Sabiendo que el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ de la figura es isósceles, que $\overline{AC}$ mide 30 cm y que $\hat{A} = 30°$. Calcular la medida de los lados del triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{ADB}$.