

Curso de Postgrado:

Tópicos de Lógica avanzada: Teoría de Modelos y Lógica Modal II

Fundamentación

A comienzos del siglo XX la Lógica, como disciplina de conocimiento, experimentó una ola de renovación fundamental a través de la acentuación de su proceso de *matematización*, iniciado en la segunda mitad del siglo anterior con los trabajos seminales de Frege, Boole y Cantor. Así, a partir de esta feliz combinación la Lógica comenzó a desarrollarse rápidamente, nuevas áreas de estudio surgieron dentro de esta disciplina y muchas antiguas cuestiones fueron solucionadas, aclaradas y/o generalizadas a partir del uso de una metodología formal.

La “nueva lógica” nacida en el siglo XX recibió diferentes nombres, tales como “lógica matemática” y “lógica simbólica” (lo que se reflejó en el nombre de la más prestigiosa asociación de lógica a nivel mundial, la norteamericana *Association for Symbolic Logic* que publica una de las más rigurosas revista del área, *The Journal of Symbolic Logic*). Creemos, sin embargo, que estos nombres no hacen justicia al alcance actual de la Lógica, que se ha transformado en una área de conocimiento interdisciplinaria, con aplicaciones y motivaciones tanto en las Ciencias Humanas (principalmente a través de la Filosofía y la Lingüística) como en las las Ciencias Exactas (principalmente en las Matemáticas, la Computación e inclusive la Física). De esta manera, deberíamos tal vez hablar de una *Lógica Contemporánea* para intentar aproximar el inmenso alcance de la Lógica actual.

Una de las nuevas áreas de estudio que surgieron dentro de la lógica contemporánea en el siglo pasado es la llamada *Teoría de Modelos* (*Model Theory*, en el inglés original). De manera sucinta, esta área trata de las relaciones entre un lenguaje formal y sus interpretaciones, los llamados *modelos*. Usualmente por “teoría de modelos” se entiende el estudio de lenguajes y estructuras de lógica clásica de primer orden (los llamados *lenguajes de predicados*), pero los estudios de esta disciplina no se restringen apenas a este tipo de lenguajes, existiendo una teoría de modelos para lenguajes proposicionales (para lógicas clásicas y no-clásicas), lenguajes de orden superior etc.

Los trabajos pioneros en teoría de modelos fueron desarrollados por Löwenheim (1915), Skolem (1920), Gödel(1930), Tarski (1931) y Mal'cev (1936). Fue a partir de los trabajos sistemáticos de Henkin, Robinson y Tarski entre 1940 y 1950 que la teoría de modelos recibió el *status* de disciplina dentro de la lógica.

Por otro lado, la historia de la Lógica Modal se remonta a los orígenes de la disciplina, cuando Aristóteles presentó el problema de los futuros contingentes a través del célebre argumento de la batalla naval (“habrá mañana una batalla naval?”). Los primeros desarrollos formales de la lgica modal se remontan a los Escolsticos durante la Edad Media, en particular William de Ockham y John Duns Scotus.

El nacimiento de la lógica modal moderna se debe a los trabajos del filósofo americano Clarence Irving Lewis (fundador también del pragmatismo conceptual) desarrollados a partir de 1910 hasta la publicación en 1932 de su libro *Symbolic Logic* (escrito junto con C. H. Langford), en el que fueron introducidos los cinco sistemas (hoy clásicos) S1 a S5 de lógica modal. A su vez, la lógica modal contemporánea nació en 1959 con el trabajo revolucionario de Saul Kripke, entonces un joven estudiante de Harvard de 19 años, que introdujo la *semántica de mundos posibles*, hoy conocida como *semántica de Kripke*, y que se transformó en una herramienta conceptual casi indispensable para el estudio de la lógica modal. Además de ser un lenguaje particularmente apropiado para el estudio de ciertos problemas filosóficos, la lógica modal contemporánea ha encontrado diversas aplicaciones en otras áreas del conocimiento formal, por ejemplo en la Computación.

El presente curso introductorio pretende abordar algunas cuestiones básicas de la teoría de modelos y de la lógica modal, con énfasis en el desarrollo formal pero sin perder de vista, principalmente en el caso de la lógica modal, la perspectiva filosófica de algunas cuestiones interligadas a estos conceptos y resultados.

La organización del curso, así como los temas elegidos, permitirán al alumno interesado profundizar el estudio de estos temas en cursos posteriores o a través de seminarios de posgrado.

Programa Analítico

Parte I: Teoría de Modelos

Módulo 1: Lógica de Primer Orden

1. Lógica Clásica de Primer Orden
 - 1.1. Presentación axiomática de la lógica de primer orden.
 - 1.2. Semántica: estructuras de primer orden.
 - 1.3. El predicado de igualdad *standard*.

Módulo 2: Nociones básicas de Teoría de Modelos

2. Modelos contruidos a partir de constantes.
 - 2.1. Homomorfismos de estructuras, isomorfismos e inmersiones elementales.
 - 2.2. Prueba de Henkin del Teorema de Completitud de la lógica de primer orden.
 - 2.3. El Teorema de Compacidad de la lógica de primer orden.

- 2.4. El método de diagramas: aplicaciones.
- 2.5. Axiomatización y Equivalencia Elemental

Módulo 3: Nociones más avanzadas de Teoría de Modelos

- 3. Omisión de tipos e interpolación
 - 3.1. El Teorema de omisión de tipos y sus aplicaciones.
 - 3.2. El Teorema de interpolación de Craig y sus aplicaciones: Teorema de definición de Beth y Teorema de Consistencia Conjunta de Robinson.

Parte II: Lógica Modal

Módulo 4: Nociones básicas

- 4. Lenguajes modales y estructuras de Kripke
 - 4.1 Lenguajes modales.
 - 4.2 Estructuras de Kripke y estructuras generales de Kripke.
 - 4.3 Relación de consecuencia modal.
 - 4.4 Lógicas modales normales.
 - 4.5 La traducción *standard*: Lógicas modales como teorías de primer orden.

Módulo 5: Nociones avanzadas

- 5. Frames generales y álgebras modales
 - 5.1. Definibilidad.
 - 5.2. Propiedades definibles y no definibles.
 - 5.3. Teorema de Goldblatt-Thomanson.
 - 5.4. Modelos canónicos.
 - 5.5. Teorema del Modelo Canónico.
 - 5.6. Algebrización de lógicas modales.

Bibliografía

- [1] J.L. Bell and A.B. Slomson. *Models And Ultraproducts: An Introduction*. Dover Publications, 2006.
- [2] P. Blackburn, M. de Rijke and Y. Venema. *Modal Logic*. Cambridge University Press, 2002.

- [3] C.C. Chang and H.J. Keisler. *Model Theory* (Third Edition). North Holland, 1990.
- [4] M.E. Coniglio. *Um curso de Teoria de Modelos*. Notas de classe. UNICAMP, 1999.