Distribuciones cuasi-estacionarias en procesos de Markov

Pablo Groisman

Consideremos una cadena de Markov a tiempo continuo en espacio de estados finito y con un estado abosrbente. Es decir, se tiene un proceso estocástico $X = (X_t, t \geq 0)$ que se construye de la siguiente manera. Las variables aleatorias X_t toman valores en un espacio finito $\Lambda \cup \{0\}$. A tiempo 0, el proceso se encuentra en cierto estado $x \in \Lambda$ (que es elegido aleatoriamente), espera un tiempo dado por una variable aleatoria exponencial (independiente) y elige (al azar) un nuevo estado $y \in \Lambda$ donde saltar. Una vez en y, repite el procedimiento sucesivamente hasta que cae en un estado particular 0, llamado estado absorbente. Cuando cae en el estado aborbente se queda ahí.

Este tipo de procesos aparece en muchas aplicaciones y en muchos procesos con interés propio dentro de la teoría de probabilidades. Entre ellos podemos nombrar a los modelos epdemiológicos, procesos de ramificación subcríticos, procesos de contácto, etc.

Una de las preguntas más importantes para este tipo de procesos es cuál es su comportamiento mientras no ha sido absorbido. Se define entonces la evolución condicionada como

$$\varphi_t^\mu(x) := \mathbb{P}_\mu(X_t = x | X_t \neq 0).$$

Aquí μ indica la distribución de la condición inicial X_0. Notar que φ_t^μ es, para cada $t \geq 0$, una probabilidad en Λ. Nos preocuparemos, en primer lugar, por dos cosas: (i) ¿Cuál es el límite, cuando $t \to \infty$, de $\varphi_t^\mu(x)$? y (ii)¿Existen distribuciones iniciales μ tales que $\varphi_t^\mu(x)$ sea constante en t? ¿Cuántas? Es decir, distribuciones que sean invariantes para la evolución condicionada. Estas distribuciones se denominan *cuasi-estacionarias* y son muy importantes ya que, de existir el límite (i), este está dado por una distribución cuasi-estcionaria.

Finalmente, construiremos el proceso de Fleming-Viot asociado a esta cadena que sirve, entre otras cosas, para poder simular la evolución condicionada y la distribución cuasi-estacionaria, que no pueden ser simuladas por el método de rechazo.

Si queda tiempo, probaremos que efectivamente, el proceso de Fleming-Viot aproxima a la evolucion condicionada y a la medida cuasi-estacionaria.