Caracterización de las subálgebras de una S-álgebra de Heyting finita

Autor: Hernán J. San Martín *

Coautor: José Luis Castiglioni

En [1] se define ecuacionalmente una función unaria compatible S, llamada *sucesor*, sobre ciertas álgebras de Heyting. El sucesor está definido sobre todas las álgebras de Heyting finitas. Si H es un álgebra de Heyting con sucesor, escribiremos (H, S) para indicarla, y diremos que la misma es una S-álgebra de Heyting. Las S-álgebras de Heyting forman una subcategoría plena de la categoría de álgebras de Heyting. Sean (H, S) una S-álgebra de Heyting finita y $(X, \leq)$ el espacio de Birkhoff asociado. Sea n un número natural que satisfaga la condición $S^{(n)}(0) = 1$, el cual siempre existe. Para Y subconjunto de X escribiremos Y_M para el conjunto de elementos maximales de Y. Podemos así construir los siguientes conjuntos: $X_0 = \emptyset$, $Y_i = (X^c_{i-1})_M$ (para $i = 1, ..., n$). Sean R una relación de equivalencia sobre X y $\leq_R$ el orden parcial definido en X/R del siguiente modo: $[x]_R \leq_R [y]_R \Leftrightarrow [x]_R \subseteq\downarrow [x]_R$. Llamaremos $(R1)$ y $(R2)$ a las siguientes condiciones:

(R1) $R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$, en donde $R_i = R \cap (Y_i \times Y_i)$ (para $i = 1, ..., n$).

(R2) Si $x \leq y$ entonces $[x]_R \leq_R [y]_R$.

Si M es una subálgebra de (H, S) definimos en $\mathcal{PF}(H)$ (conjunto de filtros primos de H) la siguiente relación de equivalencia: $PR^M Q \Leftrightarrow P \cap M = Q \cap M$.

Teorema. Sea H un álgebra de Heyting finita. Existe una biyección $M \mapsto R^M$ entre las subálgebras de (H, S) y las relaciones de equivalencia sobre $(\mathcal{PF}(H), \subseteq)$ tales que satisfacen $(R1)$ y $(R2)$.

El teorema anterior nos da una caracterización para las subálgebras de una S-álgebra de Heyting finita, la cual se demuestra a partir de la equivalencia categorial establecida en [2]. Este resultado nos permitirá dar un procedimiento pictórico sencillo para determinar dichas subálgebras. Expondremos finalmente algunos ejemplos.

Referencias:

[1] Caicedo X. y Cignoli R., *An algebraic approach to intuitionistic connectives*, Journal of Symbolic Logic, 66, N4, 1620-1636 (2001).

[2] Castiglioni J.L., Sagastume M. y San Martín H.J., *Heyting algebras with successor and their representation theory.* Comunicación presentada en la Conferencia Residuated Structures: Algebra and Logic (www.dc.uba.ar/rsal08).

* *CONICET y Departamento de Matemática (UNLP).*