ESTABILIDAD DE ÓRBITAS PERIÓDICAS BIFURCADAS EN EL DOMINIO FRECUENCIA

G. Calandrini[1,2], J. Moiola[1] y A. Torresi[2]

(1) Instituto de Inv. en Ing. Eléctrica IIIE (UNS-CONICET),
Depto. Ing. Eléctrica y de Computadoras, Universidad Nacional del Sur,
(8000) Bahía Blanca, Argentina; calandrini@criba.edu.ar, jmoiola@criba.edu.ar
(2) Depto. de Matemática, Universidad Nacional del Sur,
(8000) Bahía Blanca, Argentina; atorresi@criba.edu.ar

En este trabajo se reveen las hipótesis del teorema de bifurcación de Hopf gráfico [2, 3, 4]. Se obtiene una ecuación de bifurcación de soluciones periódicas en el domino frecuencia como la encontrada en [1] en el dominio tiempo, que presenta la ventaja de ser adaptable a casos degenerados. Se determina la existencia y estabilidad de las órbitas periódicas bifurcadas.

Se considera un sistema dinámico como sigue:

$$\dot{x} = A(\mu)x + BD(\mu)y + Bu, \quad y = Cx, \quad u = g(y,\mu) - D(\mu)y,$$

$A(\mu)$ es la parte lineal en el equilibrio $(0,0)$, $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^l$ es no lineal, $B \in \mathbb{R}^{n\times l}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $D(\mu) \in \mathbb{R}^{l\times m}$. Se lo representa como un sistema de entrada-salida

$$\mathcal{S} : \quad (\mathcal{L}e)(s) = -G(s,\mu)(\mathcal{L}u)(s),$$

donde $G(s,\mu) \in \mathbb{C}^{m\times l}$ es la función transferencia definida como $G(s,\mu) = C\left[sI - (A(\mu) + BD(\mu)C)\right]^{-1} B$, $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^l$ es C^k es la parte no lineal definida $f(e,\mu) = g(y,\mu) - Dy$, y $e = -y$. Supongamos que $\hat{e}$ es localmente la única solución de $G(0,\mu)f(e,\mu) + e = 0$ y $J = (Df)_{\hat{e}} = D(\mu)$. Sean $G(s,\mu)J$ la función transferencia de lazo abierto con funciones características $\lambda_k(s,\mu)$, $k = 1, \cdots, m$ y $\xi_1(\omega_0,\mu_0)$ un complejo cuyo cálculo incluye derivadas hasta orden tres de $f(e,\mu)$ y se encuentra explicitado en [3, 4].

Teorema 1. *Sea el sistema $\mathcal{S}$ verificando:*

***(H1)**$_{df}$: $\hat{\lambda}(\omega,\mu) = \lambda_j(i\omega,\mu)$, para algún j, $1 \le j \le m$, es la única función característica que verifica $\hat{\lambda}(\omega_0,\mu_0) = \lambda_j(i\omega_0,\mu_0) = -1$;*

***(H2)**$_{df}$: $\begin{vmatrix} \frac{\partial Re\,\hat{\lambda}}{\partial \mu}|_{(\omega_0,\mu_0)} & \frac{\partial Re\,\hat{\lambda}}{\partial \omega}|_{(\omega_0,\mu_0)} \\ \frac{\partial Im\,\hat{\lambda}}{\partial \mu}|_{(\omega_0,\mu_0)} & \frac{\partial Im\hat{\lambda}}{\partial \omega}|_{(\omega_0,\mu_0)} \end{vmatrix} \neq 0$, y*

***(H3)**$_{df}$: $Re\xi_1 \frac{\partial Im\hat{\lambda}}{\partial \omega}|_{(\omega_0,\mu_0)} - Im\xi_1 \frac{\partial Re\hat{\lambda}}{\partial \omega}|_{(\omega_0,\mu_0)} \neq 0$.*

Entonces la ecuación de bifurcación de soluciones periódicas en el dominio frecuencia es

$$\theta\,(\epsilon\,\theta^2 + \delta\,\mu + \mathcal{O}(\theta^2)) = 0,$$

con $\epsilon = Re\xi_1 \frac{\partial Im\hat{\lambda}}{\partial \omega}|_{(\omega_0,\mu_0)} - Im\xi_1 \frac{\partial Re\hat{\lambda}}{\partial \omega}|_{(\omega_0,\mu_0)}$, $\delta = \left[\frac{\partial Re\,\hat{\lambda}}{\partial \mu}\frac{\partial Im\,\hat{\lambda}}{\partial \omega} - \frac{\partial Im\hat{\lambda}}{\partial \mu}\frac{\partial Re\hat{\lambda}}{\partial \omega}\right]|_{(\omega_0,\mu_0)}$. Luego, existe una rama de soluciones periódicas no triviales que nace del punto de equilibrio a partir de $\mu = \mu_0$.

Si $G(s,\mu)J$ no tiene polos en el semiplano derecho, el punto $(-1,0)$ es rodeado sólo por esta función característica y $\frac{d\,Re\hat{\lambda}}{d\mu}(\mu_0) < 0$, definimos $\sigma_1 = -\frac{\epsilon}{\delta}$. Luego si $\sigma_1 < 0$, las soluciones periódicas que nacen a partir de μ_0 son estables.

Referencias

[1] M. Golubitsky and D. Schaeffer. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Vol. I.* Appl. Math. Sci. **51**. Springer-Verlag, 1985.

[2] A. Mees. *Dynamics of Feedback Systems.* John Wiley & Sons, Chichester, 1981.

[3] A. Mees and L. Chua. The Hopf bifurcation theorem and its aplications to nonlinear oscillations in circuits and systems. *IEEE Trans. on Circ. Sys.*, 26:235–254, 1979.

[4] J. Moiola and G. Chen. *Hopf Bifurcation Analysis: A Frequency Domain Approach*, volume 21. Nonlinear Science, World Scientific, 1996.