Acotación de la Maximal de Poisson en espacios de Sobolev ultraesféricos

J. J. Betancor*, J. C. Fariña*, L. Rodríguez-Mesa*, R. Testoni**, J. L. Torrea***

En [2] Kinunnen prueba que la Maximal de Hardy-Littlewood es acotada en el espacio de Sobolev clásico $W_1^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p \leq \infty$. Utilizando la técnica de Kinunnen probamos en [1] que el operador maximal asociado a la integral de Poisson para el operador ultraesférico

$$\mathcal{L}_\lambda = -\frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{\lambda(\lambda - 1)}{\sin^2\theta} \qquad (\lambda > 0)$$

es acotado en el espacio de Sobolev ultraesférico $W_{\lambda,1}^p$.

Aquí $W_{\lambda,1}^p = \{f \in L^p(0,\pi) \ / \ \mathcal{D}_\lambda f \in L^p(0,\pi)\}$ donde el operador "derivar" $D_\lambda = (\sin\theta)^\lambda \frac{d}{d\theta}(\sin\theta)^{-\lambda}$ y su adjunto $D_\lambda^* = -(\sin\theta)^{-\lambda}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta)^\lambda$ "factorizan" a $\mathcal{L}_\lambda = D_\lambda^* D_\lambda + \lambda^2$.

Cabe comentar que el espacio de Sobolev ultraesférico $W_{\lambda,1}^p$ con la norma $\|f\|_{\mathcal{W}_{\lambda,m}^p} = \|\mathcal{D}_\lambda f\|_p$ es equivalente al espacio potencial $\mathcal{L}_\lambda^{-1/2}(L^p(0,\pi))$ donde la potencia $-1/2$ del operador $\mathcal{L}_\lambda$ se define en forma espectral y la norma es la inducida por la norma de $L^p(0,\pi)$.

La integral de Poisson para el operador ultraesférico se define como

$$P_r^\lambda(f)(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+\lambda} a_n^\lambda(f)\,\varphi_n^\lambda(\theta) \qquad (0 < r < 1)$$

donde $\{\varphi_n^\lambda\}_{n=0}^\infty$ es un sistema ortonormal y completo en $L^2((0,\pi), d\theta)$ de autofunciones (funciones ultraesféricas) del operador $\mathcal{L}_\lambda$ y $a_n^\lambda(f)$ es el $n-$ésimo coeficiente de Fourier de f en este sistema.

El operador maximal asociado a la integral de Poisson es

$$P_*^\lambda(f)(\theta) = \sup_{0\leq r<1}\left|P_r^\lambda(f)(\theta)\right|$$

y, como mensionamos en el primer párrafo, obtenemos

$$\left\|P_*^\lambda(f)\right\|_{W_{\lambda,1}^p} \leq C\,\|f\|_{W_{\lambda,1}^p}.$$

Referencias:

[1] J. J. Betancor, J. C. Fariña, L. Rodríguez-Mesa, R. Testoni, J. L. Torrea, S*obolev spaces asso-ciated with ultraespherical expansions*, preprint.

[2] J. Kinnunen, *The Hardy-Littlewood maximal function of a Sobolev function,* Israel J. Math., 100, (1997), 117–124.

* Universidad de La Laguna, Tenerife, España
** Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina
***Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, España