Consistencia de M-estimadores en regresión no lineal

Ma. Victoria Fasano (Universidad Nacional de La Plata - CONICET)
Ricardo A. Maronna (Universidad Nacional de La Plata - CIC)

Resumen

En el modelo de regresión no lineal se observan $\mathbf{z}_i = (y_i, \mathbf{x}_i)$ $1 \leq i \leq n$ vectores i.i.d. con $y_i \in R$ y $\mathbf{x}_i \in R^m$ que satisfacen

$$y_i = g(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}_0) + u_i \;\; 1 \leq i \leq n$$

donde $\boldsymbol{\theta}_0$ es el vector desconocido de parámetros de regresión perteneciente a un conjunto $\Theta \subset R^p$, g la función de regresión de $R^m \times \Theta \rightarrow R$ y u_i los errores aleatorios i.i.d. con distribución F.

El estimador clásico para estos modelos es el de mínimos cuadrados, que tiene propiedades óptimas cuando F es normal, pero es muy sensible a observaciones atípicas. Por esta razón, son necesarios estimadores *robustos* que sean más estables frente a distintas perturbaciones del modelo y que a su vez sean eficientes bajo normalidad.

Un método básico de estimación robusta son los *M-estimadores,* definidos como

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n = \arg\min_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\frac{y_i - g(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta})}{\widehat{\sigma}}\right)$$

donde $\widehat{\sigma}$ es un estimador de la escala σ de los errores y ρ es una función de pérdida.

Los resultados sobre consistencia en regresión no lineal, tanto para mínimos cuadrados como para M-estimadores, requieren en general que el espacio de parámetros Θ sea compacto o que la función de regresión sea acotada. En este trabajo nos ocupamos del caso de "componentes lineales", en que $p = p_1 + p_2$, $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ con $\boldsymbol{\alpha} \in A \subset R^{p_1}$ y $\boldsymbol{\beta} \in R^{p_2}$ y la función de regresión g tiene la forma:

$$g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\beta}' \mathbf{h}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$$

donde $\mathbf{h} : R^m \times A \rightarrow R^{p_2}$. Aquí g no es acotada. Se demostrará para estos modelos la consistencia de M-estimadores en condiciones mucho más generales que las existentes en la literatura.