Representaciones de Macdonald en el espacio de involuciones del grupo Simétrico

Araujo, J.O. - Paz, K.

Las *representaciones de Macdonald* son representaciones irreducibles de grupos de reflexiones contruidas a partir de los subgrupos de reflexiones del grupo en cuestión. Éstas fueron introducidas por Macdonald en [3] para grupos de Weyl. El grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$, o grupo de Weyl de tipo A_{n-1}, tiene asociadas las representaciones de Macdonald inducidas por cada subgrupo parabólico $\mathfrak{S}_\lambda$ donde $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ es una partición de n y $\mathfrak{S}_\lambda = \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\lambda_k}$.
Para un grupo de Weyl W, el subespacio $\mathcal{I}$ del álgebra de grupo $K[W]$ generado por las involuciones en W, tiene particular interés en conexión con sus *modelos de Gel'fand*, esto es; una representación ordinaria de W equivalente a la suma de todas las representaciones irreducibles de W. Toda representación de W puede realizarse sobre los números racionales, ver [4], y como consecuencia de esto la dimensión de un modelo de Gel'fand para W es la dimensión de $\mathcal{I}$. Es razonable entonces, usar $\mathcal{I}$ para obtener, en alguna forma natural, un modelo de Gel'fand para W. Este es el caso del modelo para $\mathfrak{S}_n$ presentado en [2] donde la acción sobre $\mathcal{I}$ está dada por:

$$\pi \cdot (i_1 i_2) \cdots (i_{2m-1} i_{2m}) = \zeta_\pi \times (\pi(i_1)\,\pi(i_2)) \cdots (\pi(i_{2m-1})\,\pi(i_{2m}))$$

donde ζ_π es el número de inversiones de π en los pares $(i_{2j-1} i_{2j})$. En ese trabajo, los autores establecen la commutatividad del anillo de $\mathfrak{S}_n$-morfismos y muestran que su dimensión coincide con el número de particiones de n.
Las involuciones en $\mathfrak{S}_n$ pueden ser agrupadas según su *longitud*, es decir, el número de transposiciones disjuntas en las que se descomponen. De este modo, el espacio de involuciones admite una descomposición en los espacios $\mathcal{I}_k$ generados por las involuciones de longitud k.
En [1] dimos las descomposiciones de los espacios de reflexiones para grupos de Weyl de tipo A, B y D. Siguiendo en esa dirección, presentamos el siguiente resultado:
Teorema: *Sea $\lambda \vdash n$ una partición n. Entonces el módulo de Macdonald asociado con $\mathfrak{S}_\lambda$ aparece en la descomposición de $\mathcal{I}_k$ si, y sólo si* $\sum \left[\frac{\lambda_i}{2}\right] = k$.
Con esto, creemos poder extender la construcción dada en [2] para otros grupos de reflexiones asociados con $\mathfrak{S}_n$.

Referencias:

[1] Araujo, J. O., *Descomposición de la acción signada del grupo simétrico sobre sus transposiciones.* Actas del IX Congreso Dr. Antonio A. R. Monteiro, (2007), 69-77.
[2] Kodiyalam, V. and Verma, D.N., *A natural representation model for symmetric groups.* arXiv:math.RT/0402216 v1, 2006.
[3] MacDonald, I., *Some irreducible representations of Weyl groups.* Bulletin of the London Mathematical Society 4 (1972) 148-150.
[4] Springer, T., A *Construction of Representations of Weyl Groups.* Inventiones Mathematicae 44 (1978) 279-293.