

Topología tipo Zariski para Álgebras de Implicación

Manuel Abad, Diego Castaño* and José P. Díaz Varela

15 de abril de 2009

Entre las estructuras algebraicas asociadas a sistemas lógicos, son particularmente frecuentes las estructuras de implicación. Dichas estructuras constan, en general, de un conjunto parcialmente ordenado cuyo orden viene dado por una operación binaria de implicación \rightarrow . Si el conjunto ordenado en cuestión es un semirreticulado superior cuyos filtros principales son álgebras de Boole, obtenemos las álgebras de implicación [2, 3], también conocidas con el nombre de álgebras de Tarski [4]. Estas álgebras pueden caracterizarse asimismo como los $\{\rightarrow\}$ -subreductos de las álgebras de Boole. Concretamente, un *álgebra de implicación* es un álgebra $\mathbf{A} = \langle A, \rightarrow \rangle$ de tipo $\langle 2 \rangle$ que satisface las siguientes identidades:

$$(I1) \quad (x \rightarrow y) \rightarrow x \approx x,$$

$$(I2) \quad (x \rightarrow y) \rightarrow y \approx (y \rightarrow x) \rightarrow x,$$

$$(I3) \quad x \rightarrow (y \rightarrow z) \approx y \rightarrow (x \rightarrow z).$$

En [1] se dio una representación de un álgebra de implicación \mathbf{A} como unión de una única familia de filtros en cierta álgebra de Boole $\mathbf{Bo}(\mathbf{A})$ y se utilizó el espacio de Stone de $\mathbf{Bo}(\mathbf{A})$ para obtener una representación topológica de \mathbf{A} . Extendiendo dicho trabajo, definimos ahora una topología tipo Zariski sobre el conjunto $Spec(\mathbf{A})$ de filtros implicativos maximales de \mathbf{A} cuya compactificación por un punto resulta homeomorfa al espacio de Stone de $\mathbf{Bo}(\mathbf{A})$. Esto permite dar una representación topológica intrínseca de \mathbf{A} en el sentido de que no depende de la inmersión de \mathbf{A} en un álgebra de Boole. Finalmente extendemos dicha representación topológica a una dualidad entre la categoría de las álgebras de implicación y la categoría de ciertos espacios topológicos particulares.

Referencias

- [1] ABAD, M., DÍAZ VARELA, J. P. AND TORRENS, A., *Topological Representation for Implication Algebras*, Algebra univers. **52** (2004), 39-48.
- [2] ABBOTT, J. C., *Semi-Boolean algebras*. Mat. Vesnik **19**(4) (1967), 177-198.
- [3] ABBOTT, J. C., *Implicational algebras*. Bull. Math. R. S. Roumaine, **11** (1967), 3-23.
- [4] MONTEIRO, A., *Unpublished papers*, Notas de Lógica Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1998.

*Expositor.