# CARTAS DE CONTROL: SU EFECTIVIDAD PARA DETECTAR CAMBIOS MEDIANTE UN ENFOQUE POR CADENAS DE MARKOV ABSORBENTES

Lidia Toscana - Nélida Moretto - Fernanda Villarreal

*Universidad Nacional del Sur, ltoscana@criba.edu.ar*

Resumen

Las cartas de control se utilizan para chequear la estabilidad de un proceso. Cuando se evalúa cuan efectiva es una carta de control para detectar cambios en los parámetros de un proceso se pretende que los mismos sean detectados inmediatamente después de que ocurran, que la tasa de falsa alarma sea baja y que la tasa de muestreo sea razonable.

La tasa promedio de muestreo es el número promedio de observaciones hasta que una de ellas indica una condición fuera de control y se denomina Longitud de Corrida Promedio (LCP). Si bien puede evaluarse mediante cálculos probabilísticos, cuando se trabaja con una carta de control con reglas de rachas no es sencillo su cómputo en términos de simples probabilidades.

En este trabajo se presenta la determinación de la LCP para la carta X de Shewhart para observaciones individuales combinada con una regla de rachas, modelizada mediante una cadena de Markov absorbente.

Palabras claves: *Cartas de Control – Reglas de Rachas - Cadenas de Markov – Longitud de Corrida Promedio.*

## 1. INTRODUCCIÓN

Sea X la variable aleatoria que representa una característica de un proceso que se supone distribuida normalmente con media $\mu$ y variancia $\sigma^2$. Sea $X_t$ su valor observado en el instante t. Si sucesivas observaciones obtenidas en forma independiente se denotan por $X_1$, $X_2$, $X_3$.......... puede asumirse que las $X_t \approx N(\mu, \sigma^2)$ para t = 1,2,....... , es decir, están idénticamente distribuidas.

Para monitorear la media del proceso con la carta tradicional de observaciones individuales de Shewhart, en adelante la carta X, las sucesivas observaciones $X_t$ se grafican sobre la carta cuyos límites de control se toman usualmente a $\pm 3\sigma$ de la línea central, fijada en el valor de la media $\mu$ del proceso y cuyo desvío estándar se supone igual a $\sigma$. Estos límites se conocen como límites de control " 3 - sigma".

Si cuando el proceso está bajo control sus parámetros son $\mu = \mu_0$, y $\sigma = \sigma_0$ entonces se dice que la carta da una señal si $X_t$ se ubica por fuera de los límites de control $\mu_0 \pm 3\sigma_0$. Si se trabaja con valores estandarizados $Z_t = (X_t - \mu_0) / \sigma_0$, entonces la carta X dará una señal si $|Z_t| > c$, siendo usualmente c = 3.

Si se produce una señal cuando el proceso está bajo control se dice que la carta ha dado una falsa alarma; si realmente ha ocurrido un cambio en el proceso, la señal se denomina señal de detección del cambio.

Si bien la carta X da una señal de proceso fuera de control cuando un punto cae fuera de los límites de control 3 – sigma, este suceso no es el único que puede poner de manifiesto un desajuste del proceso. Es usual prestar atención a secuencias de puntos que tengan poca posibilidad de ser observadas en un proceso bajo control. Para detectarlos se dividen las dos áreas alrededor del límite central en tres zonas iguales correspondiendo cada línea a un desvío estándar. Los límites internos que se adicionan a los tradicionales 3 – sigma, reciben el nombre de límites de advertencia (Montgomery, 1991). Figura 1.

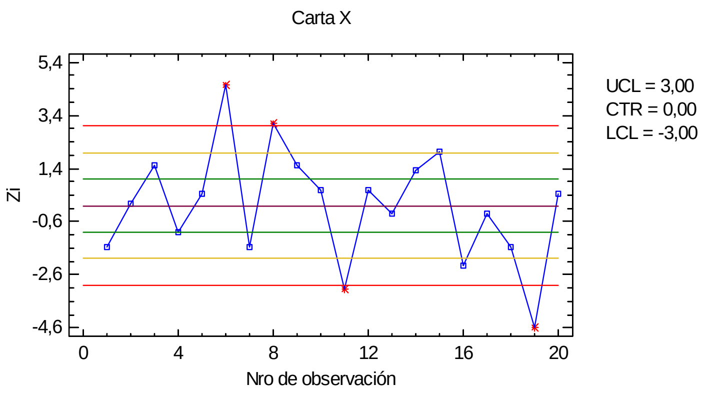


Figura 1: Carta de control con límites de advertencia

El Western Electric Handbook (1956) establece reglas para detectar patrones no aleatorios. Algunas de ellas se enuncian a continuación y sugieren llegar a la conclusión de que el proceso está fuera de control si se presenta cualquiera de las siguientes situaciones.

**Regla 1:** Un punto fuera de las líneas de control de 3 - sigma
**Regla 2:** 2 puntos consecutivos ó 2 puntos de 3 puntos consecutivos más allá de los límites de advertencia 2 –sigma.
**Regla 3:** 4 de 5 puntos consecutivos se encuentran a una distancia de un sigma o más de la línea central.
**Regla 4:** 8 puntos consecutivos se hallan al mismo lado de la línea central.

Estas reglas de rachas se aplican a un lado de la línea central a la vez. Por ejemplo, si consideramos la Regla 2, un punto que aparece encima del límite superior 2 – sigma, seguido por otro que se ubica debajo del límite inferior 2 - sigma no constituye una señal de que el proceso está fuera de control. En cambio, será una señal fuera de control, tanto cuando dos observaciones consecutivas o dos de tres caen por encima de la línea de advertencia superior o por debajo de la línea de advertencia inferior.

Si se denota por T (k, m, a, b) a la regla de racha que da una señal si k de los m últimos valores individuales estandarizados, caen dentro del intervalo (a, b) con a < b, las reglas de rachas “un punto por encima de los límites 3-sigma” y la de “dos de tres observaciones consecutivas más allá de los límites de advertencia 2 –sigma”, pueden expresarse por:

$$T_1 = \{T(1, 1, -\infty, -3); T(1, 1, 3, \infty)\}$$

$$T_2 = \{T(2, 3, -3, -2); T(2, 3, 2, 3)\}$$

La carta X combinada con la regla de rachas $T_2$ puede expresarse por:

$$T_{1,2} = T_1 \bigcup T_2 = \{ T(1, 1, -\infty, -3) ; T(2, 3, -3, -2) ; T( 2, 3, 2, 3) ; T( 1, 1, 3, \infty) \}$$

Cuando se evalúa la efectividad de una carta de control para detectar cambios en los parámetros de un proceso se pretende que el mismo sea detectado inmediatamente después de que ocurra, que la tasa de falsa alarma sea baja y que la tasa de muestreo sea razonable.

Una medida para la tasa promedio de muestreo se obtiene usando el número promedio de observaciones hasta que se produce una señal. El número de observaciones requeridas hasta una señal se denomina usualmente Longitud de Corrida de la carta de control. El número promedio de observaciones que deben graficarse antes de que una de ellas indique una señal es la Longitud de Corrida Promedio (LCP). La LCP para falsa alarma debería ser suficientemente grande y la LCP para detección a un cambio debería ser pequeña.

Si bien para las cartas de Shewhart, cuando el proceso está bajo control o cuando se produce un cambio, la LCP puede evaluarse mediante el cálculo probabilístico, cuando se adicionan reglas de rachas no es sencillo expresar estas medidas en términos de simples probabilidades.

En este trabajo se modela mediante una cadena de Markov absorbente a la carta de Shewhart para observaciones individuales adicionándole la regla de rachas: “2 de 3 puntos consecutivos más allá de los límites de advertencia 2 –sigma” a fin de ilustrar este método para obtener la LCP.

## 2. Efectividad de la Carta X

Para la carta X, el número de observaciones independientes que son extraídas hasta que se produce una señal es una variable aleatoria N, con distribución de probabilidad geométrica con parámetro p, siendo p la probabilidad de que cualquier punto muestral exceda los límites de control 3 –sigma. El valor esperado o promedio de observaciones requeridas hasta una señal es:

$$E(N) = 1/p = LCP$$

siendo $p = 0.0027$, la probabilidad de que un punto caiga fuera de los límites 3 – sigma.

Entonces, la longitud de corrida promedio $LCP = 1/0.0027 \approx 370{,}4$, indica que aún cuando el proceso esté bajo control, se genera una señal de fuera de control cada 370,4 muestras en promedio. Es decir, se genera una señal de falsa alarma cada 370,4 observaciones en promedio.

Para evaluar la Longitud de Corrida Promedio de la Carta X cuando se utilizan reglas de rachas, Brook and Evans (1972) proponen un método inicialmente utilizado para evaluar la LCP de la carta de control de Sumas Acumuladas, CUSUM y en este enfoque las cartas de control se modelan como una cadena de Markov absorbente.

## 3. Modelización de la carta X con reglas de rachas por una cadena de Markov absorvente

La carta X combinada con la regla de rachas $T_2$: “dos de tres observaciones consecutivas más allá de los límites de advertencia 2 –sigma”, puede expresarse por

$$T_{1,2} = T_1 \bigcup T_2 = \{\, T(1, 1, -\infty, -3)\ ;\ T(2, 3, -3, -2)\ ;\ T(2, 3, 2, 3)\ ;\ T(1, 1, 3, \infty)\,\}$$

En este caso el monitoreo de la media del proceso puede pensarse como una caminata aleatoria a través de una cadena de Markov con siete estados transitorios E1, E2, E3, E4, E5, E6, y E7 y uno absorbente, E8, definidos por:

$E_1$ = {dos puntos consecutivos en (-2, 2)}

$E_2$ = {el primer punto en (-2, 2) y el segundo en (2,3)}

$E_3$ = {el primer punto en (2, 3) y el segundo en (- 2, 2) }

$E_4$ = {el primer punto en (-2, -2) y el segundo en (-3, -2)}

$E_5$ = {el primer punto en (-3, -2) y el segundo en (-2, -2)}

$E_6$ = {el primer punto en (-3, -2) y el segundo en (2, 3)}

$E_7$ = {el primer punto en (2, 3) y el segundo en (-3, -2)}

$E_8$ = {un punto en ($-\infty$, -3) ó un punto en (3, $\infty$) ó dos de tres puntos en (2, 3) ó dos de tres puntos en (-3, -2)}

Se define la matriz de transición $P = [p_{i,j}]$ donde $p_{i,j}$ es la probabilidad de que para la siguiente observación la cadena pase al estado $E_j$ dado que se encuentra en el estado $E_i$.

Para determinar las probabilidades de transición observemos que al monitorear la media de un proceso estable, utilizando la carta X con límites de advertencia, una observación individual de X tomada en un instante t, estandarizada Z(t), puede pertenecer a cualquiera de las siguientes zonas:

Zona 1 = (-2, 2): zona segura

Zona 2 = (-3, -2): zona de alerta

Zona 3 = (2 ,3): zona de alerta

Zona 4 = $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$: zona de señal

La probabilidad de que se obtenga una observación en la zona i, cuando el proceso está bajo control, la designamos con $p_i$:

$p_1 = P(Z(t) \in (-2, 2))$

$p_2 = P(Z(t) \in (-3, -2))$

$p_3 = P(Z(t) \in (2, 3))$

$p_4 = 1 - p_1 - p_2 - p_3$

De lo anterior se obtiene la siguiente expresión para la matriz de transición en un paso:

| | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ | $E_4$ | $E_5$ | $E_6$ | $E_7$ | $E_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $E_1$ | $p_1$ | $p_3$ | 0 | $p_2$ | 0 | 0 | 0 | $p_4$ |
| $E_2$ | 0 | 0 | $p_1$ | 0 | 0 | 0 | $p_2$ | $p_3+p_4$ |
| $E_3$ | $p_1$ | 0 | 0 | $p_2$ | 0 | 0 | 0 | $p_3+p_4$ |
| $E_4$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $p_1$ | $p_3$ | 0 | $p_2+p_4$ |
| $E_5$ | $p_1$ | $p_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $p_2+p_4$ |
| $E_6$ | 0 | 0 | $p_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $p_2+p_3+p_4$ |
| $E_7$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $p_1$ | 0 | 0 | $p_2+p_3+p_4$ |
| $E_8$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Esta matriz de transición P, puede ser reagrupada en cuatro submatrices constituyendo lo que se conoce como su forma canónica:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c|c} I & O \\ \hline R & N \end{array}$$

I (1 x 1) = matriz identidad. I = 1 .Cada elemento representa la probabilidad de permanecer en un estado absorbente en un paso.

O (1 x 7) = matriz nula. Cada elemento representa la probabilidad de pasar de un estado absorbente a uno no absorbente en un paso.

R (7 x 1) = matriz de no absorbente a absorbente. Cada elemento representa la probabilidad de pasar de un estado no absorbente a uno absorbente en un paso

N (7 x 7) = matriz de estados no absorbentes.

En general, en una cadena de Markov con la matriz de transición expresada en forma canónica puede obtenerse:

a) el número esperado de veces que el proceso pasa por cada estado no absorbente antes de ser absorbido analizando cada uno de los elementos de la matriz $(I - N)^{-1}$

b) el número esperado de transiciones que el proceso tarda en ser absorbido cuando comienza en el i-ésimo estado, sumando los elementos de la i-ésima fila de la matriz $(I - N)^{-1}$

La suma de los elementos de cada una de las filas de la matriz $(I - N)^{-1}$ da el número promedio o esperado de observaciones hasta que el proceso es absorbido por el estado $E_8$, que expresada en términos de una carta de control, es la Longitud de Corrida Promedio.(Brook et al,1972).

Para evaluar la LCP para falsa alarma de la carta X cuando se adiciona la regla $T_2$: "dos de tres observaciones consecutivas caen más allá de un límite 2 – sigma", las probabilidades $p_1$, $p_2$, $p_3$ y $p_4$ se determinan para una distribución normal con media $\mu = \mu_0$ y desvío estándar $\sigma = \sigma_0$ (proceso bajo control) y son respectivamente 0.9544; 0.02145, 0.02145 y 0.00265. Con estas probabilidades se arma la matriz de transición, se establece su forma canónica y se construye la matriz $(I - N)^{-1}$.

A partir de la suma de los elementos de cada una de las filas de la matriz $(I - N)^{-1}$ se obtiene la siguiente matriz columna $(225{,}44 \quad 215{,}88 \quad 220{,}39 \quad 215{,}88 \quad 220{,}39 \quad 211{,}34 \quad 211{,}34)^T$.

Cada uno de estos valores representa en concepto de promedio la cantidad de observaciones para que la carta dé una señal. El valor 225,44 expresa que en concepto de promedio se necesitan aproximadamente 225 observaciones para que la carta dé una señal cuando las dos primeras se encuentran en la zona segura (-2,2). Como estos valores se obtuvieron considerando al proceso bajo control, ellos indican la longitud de falsa alarma. Es decir, aún cuando el proceso esté bajo control se genera una señal de fuera de control cada 225,44 muestras en promedio.

Cuando lo que se desea es la LCP para la detección de un cambio, se calculan las probabilidades $p_1$, $p_2$, $p_3$ y $p_4$ para una distribución normal con media $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$, siendo $\delta$ el corrimiento en desvíos estándar y se construye con ellas la nueva matriz de transición.

Supongamos que se produce un corrimiento de un desvío estándar en la media del proceso, es decir la nueva media es $\mu_1 = \mu_0 + \sigma_0$. En este caso las probabilidades $p_1$, $p_2$, $p_3$ y $p_4$ son 0.83995, 0.00135, 0.1359 y 0.0228 respectivamente.

Para determinar la LCP o número promedio de observaciones que deberán ser observadas hasta detectar el cambio, se suman los elementos de cada una de las filas de la matriz $(I - N)^{-1}$ obteniéndose la siguiente matriz columna $(20{,}01 \quad 19{,}85 \quad 17{,}70 \quad 19{,}81 \quad 19{,}83 \quad 15{,}87 \quad 17.66)^T$ . El valor 20,01 expresa que en concepto de promedio se necesitaran 20 observaciones para que la carta dé la señal de detección del cambio en la media.

En la tabla siguiente se presentan los valores obtenidos correspondientes a la LCP para falsa alarma y para la detección de cambios en la media del proceso tanto para la carta X sin regla de rachas, columna 2, como para la carta X con la regla de rachas $T_2$, columna 3.

| **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|
| $\delta$ | **X** | **X y $T_2$** |
| **0.00** | 370.4 | **225.44** |
| **0.20** | 308.4 | 176.35 |
| **0.50** | 155.2 | 77.5 |
| **1.00** | 43.9 | 20.01 |
| **2.00** | 6.3 | 3.65 |

Si el proceso está bajo control con media $\mu_0$ y desvío $\sigma_0$, el valor numérico de la LCP para la carta X utilizando límites "3 -sigma" y sin adicionarle regla alguna es igual a 370.4 observaciones en promedio hasta una señal de falsa alarma, fila 1 columna 2. Los valores de las siguientes filas de la columna 2, corresponden a cambios o corrimientos en la media $\mu_0$.

Del mismo modo se interpretan los valores de la columna 3 correspondiente a la carta X utilizada con la regla $T_2$. Por ejemplo, el valor señalado en negrita, fila 1 columna 3, expresa que en concepto de promedio, se necesitarán aproximadamente 225 observaciones para que la carta dé una señal. Es decir, aún cuando el proceso esté bajo control, se genera una señal de falsa alarma cada 225 observaciones en promedio.

Si comparamos este valor con el 370.4 de la tradicional carta X, es decir sin regla de rachas, vemos que se genera mayor cantidad de falsas alarmas al ser la LCP menor.

Para la carta X sola, la probabilidad de detectar un corrimiento en la media del proceso en la siguiente observación luego del cambio, es función de la magnitud del corrimiento. Supongamos que ocurre un corrimiento de un desvío estándar en la media del proceso, es decir, la nueva media es $\mu_1 = \mu_0 + \sigma_0$. La probabilidad de detectar este corrimiento es 0.0228 y el número promedio de observaciones hasta que la carta detecte el cambio es LCP = 43.9. (Moretto, Toscana, 2005). En cambio, se necesitan en promedio 20 observaciones para detectar el mismo corrimiento en la media cuando se utiliza la carta X con la regla $T_2$.

Si ha ocurrido un cambio en la media del proceso de manera que se ha desplazado $\mu_1 = \mu_0 + 0.20\sigma_0$ los valores de LCP para detectar el corrimiento son 308.4 cuando se trabaja con la carta X y 176.35 cuando se trabaja con la carta X utilizada con la regla $T_2$. Este último valor es menor al obtenido para la carta X usada sola, lo cual significa que se necesitan menos observaciones en promedio para detectar el cambio en la media.

Si bien la carta X utilizada con la regla $T_2$ detecta antes que la carta X los cambios en la media, debe notarse que genera mayor cantidad de falsas alarmas. Es decir, X utilizada con la regla $T_2$ es más sensible para la detección de los cambios en detrimento de la tasa de falsas alarmas. Una forma de lograr que dicha tasa de falsa alarma se mantenga igual a 370 ó tome un valor conveniente, consiste en diseñar las cartas considerando límites de control alternativos a los "3 -sigma".

Cuando se implementa una carta de control hay que analizar qué carta es la más conveniente en cada situación real, teniendo en cuenta cuáles son las consecuencias de que se produzcan más cantidad de falsas alarmas versus las consecuencias de la detección tardía de cambios en el proceso.

## 4. CONCLUSIONES

Las tradicionales cartas de Shewart son simples de implementar y utilizar para el control estadístico de procesos. Su efectividad para detectar cambios puede evaluarse fácilmente mediante cálculos probabilísticos, determinando la Longitud de Corrida Promedio (LCP) para distintos cambios en el proceso.

La evaluación de la efectividad de las cartas para detectar cambios en un proceso, cuando se la utiliza combinada con reglas de rachas ó tests de inestabilidad, no es tan simple. Resultados aproximados pueden determinarse utilizando un modelo de Simulación, mientras que el enfoque por cadenas de Markov permite obtener resultados exactos.

En este trabajo la aplicación de cadenas de Markov absorbentes permitió el cálculo de la Longitud de Corrida Promedio cuando a la tradicional Carta X se le adiciona reglas de rachas. Presentamos la metodología para una combinación en particular, pero la misma puede emplearse para otras combinaciones de reglas definiéndose cuidadosamente los estados de la cadena y el número de ellos.

## REFERENCIAS

[1] Brook,D and Evans, D. "An approach to the probability Distribution of CUSUM Run Length" Biometrika 59, pág 539-549

[2] C. Champ and W. Woodall. "Exact Results for Shewhart Control Chart with Supplementary Runs Rules". Technometrics 29, (1987), pp. 393 – 399.

[3] D. Montgomery. "Control Estadístico de la Calidad". Grupo Editorial Iberoamericana. (2001).

[4] E.S. Page. "Control Charts with Warning Lines". Biometrics, 42, (1955), pp. 243 – 25

[5] L. S. Nelson. “Control Chart for Individual Measurements”. Journal of Quality Technology 14, (1982), pp 172- 173.
[6] N. Moretto y L. Toscana. “Desempeño de Cartas de Control para Observaciones Individuales”. Revista de la Escuela de Investigación Operativa, Año XIII, Nº 26, (2005), pp. 39 -.59.