

MEDICIÓN BILATERAL DE LA VARIABILIDAD DE LA LONGITUD DE CORRIDA DE UNA CARTA DE CONTROL ESTADÍSTICO DE PROCESOS

SU APLICACIÓN PARA DETERMINAR LA SENSIBILIDAD DE LA CARTA CUSUM NORMAL ANTE LA PRESENCIA DE PROCESOS WEIBULL

Alicia E. Quintana y Liliana A. García

Universidad Nacional del Sur, quintana@uns.edu.ar, lgarcia@uns.edu.ar

Resumen: Las Cartas de Control Estadístico de Procesos son gráficos estadísticos para monitorear el funcionamiento de los procesos críticos de una empresa mediante el control de cambios en sus parámetros. La eficiencia de una Carta se mide con el estándar Longitud de Corrida Promedio, número promedio de monitoreos desde que un cambio ocurre hasta que la carta lo detecta. Usada por sí sola, mide deficientemente el real desempeño de la carta porque la Longitud de Corrida es una variable aleatoria con alta variabilidad. Nuestro objetivo es aportar medidas de resumen complementarias a la estándar para evaluar eficientemente el desempeño de la Carta demostrando que la variabilidad de la Longitud de Corrida puede ser descompuesta en 2 componentes. Como aplicación, determinamos la sensibilidad de la Carta CUSUM Normal ante procesos Weibull, ampliamente usados en Análisis de Confiabilidad. La carta CUSUM es muy eficiente para detectar pequeños cambios en los parámetros del proceso.

Palabras claves: *Cartas de Control, Longitud de Corrida, Variabilidad Izquierda, Variabilidad Derecha, Cusum, Weibull*

1. INTRODUCCIÓN

La globalización de los mercados y la velocidad, sin precedentes, de los cambios científicos y tecnológicos son desafíos que las empresas deben enfrentar hoy en día si desean mantenerse en los mercados. Para ello, la Competitividad se ha transformado en el eje principal para la convivencia dentro de esta era de cambios constantes es. A la hora de pensar en competir, entre sus aspectos fundamentales, se encuentra la calidad con que las empresas ofrecen sus productos y servicios y, de la mano, el Control Estadístico de los Procesos (CEP) involucrados.

Entre las herramientas del CEP se destacan las Cartas de Control, métodos gráficos de diagnóstico contruidos bajo principios estadísticos y usados para monitorear el funcionamiento de los procesos de producción a través del tiempo mediante el control de cambios en sus parámetros (características de calidad *claves* para el óptimo desempeño del proceso). Estos parámetros pueden ser la media del proceso, el desvío estándar, una proporción, etc. El control de cambios en sus parámetros se hace a través de un estadístico, llamado Estadístico de Control, cuyos valores son graficados en la carta.

Todo proceso, en cada instante, se encuentra en sólo uno de dos estados: bajo control, cuando sus parámetros no han sufrido cambios, en cuyo caso el proceso sigue su curso o, fuera de control, si sus parámetros han sufrido cambios lo cual implica la necesidad de tomar medidas correctivas, preventivas y/o proactivas para restablecer el proceso a su normal funcionamiento, si el cambio detectado es perjudicial, o conducirlo a un desempeño aún más deseable que el anterior, si es beneficioso.

Si bien las primeras Cartas de Control surgieron con los procesos de producción de la mano de Walter Shewhart en el año 1924, hoy en día se han expandido y se aplican también a procesos de diversa naturaleza como ser: administrativos, de entrenamiento, capacitación, de servicio, etc.

La evolución de la tecnología y los nuevos requerimientos de calidad en productos y servicios impulsó el origen de nuevos diseños como las cartas: CUSUM, EWMA, para datos autocorrelacionados, multivariados, etc. Las cartas CUSUM se destacan de otras por su rapidez para detectar pequeños cambios en los parámetros del proceso. La carta CUSUM Normal es la más difundida y aplicada de todas. Como su nombre lo indica, está diseñada especialmente para monitorear procesos normales.

Para medir la eficiencia de una Carta de Control, una tarea fundamental es estimar la velocidad con que la carta detecta un cambio en un parámetro de interés del proceso desde que éste ocurre. Esta velocidad se mide en términos de la variable aleatoria *Longitud de Corrida (LC)* que representa la cantidad de veces que se monitorea el proceso (equivale a la cantidad de puntos graficados en la carta de control) desde que un cambio en el proceso ocurre hasta que la carta lo detecta. Aún cuando el proceso no incurra en ningún cambio (proceso bajo control) la carta puede igualmente emitir una señal de alerta, en este caso se dice que la carta ha emitido una Falsa Alarma y se habla entonces de la variable aleatoria *Longitud de Falsa Alarma (LFA)*.

Las medidas estándar usadas para evaluar esta rapidez son la *Longitud de Corrida Promedio (LCP)*, para proceso fuera de control y la *Longitud de Falsa Alarma Promedio (LFAP)*, para proceso bajo control. Desde hace años, destacados investigadores, como [10], [11] y [12], insisten en que las medidas estándar, no son suficientes por sí solas, miden de manera incompleta el real desempeño de la carta porque tanto LC como LFA son variables aleatorias que presentan alta variabilidad y además su distribución de probabilidad es asimétrica.

No en muchos trabajos, como [4], puede observarse que las medidas estándar son acompañadas por el desvío estándar de la longitud de corrida. Sin embargo, a la hora de comparar la eficiencia entre distintos diseños de cartas de control, el desvío estándar no es una medida adecuada. En cambio, el coeficiente de variación sí lo es. En [4] se agregan además los cuartiles y algunos percentiles.

La preocupación constante de los autores de esta publicación por la búsqueda de medidas de eficiencia integradoras permitió que, en [5], propusieran inicialmente un conjunto de 3 indicadores para evaluar la performance de una Carta de Control, cualquiera sea el estado del proceso. La profundización del tema impulsó el hallazgo de indicadores de eficiencia *adecuados a cada estado del proceso*, para ser aplicados al estudio de diversas Cartas Shewhart y CUSUM ante la presencia de procesos sólo normales, lo que se concretó en [6] y [7].

El objetivo de esta publicación es el aporte de medidas integradoras de eficiencia, acordes a cada estado de un proceso, para ser aplicado al estudio de la sensibilidad de la Carta CUSUM Normal ante la presencia de procesos Weibull, mediante las siguientes acciones:

- ✓ demostrando que tanto la varianza de la Longitud de Corrida como la de la Longitud de Falsa Alarma pueden ser descompuestas en 2 componentes, la varianza a izquierda y derecha de sus respectivos valores esperados
- ✓ mostrando, en cada caso, que una de las componentes contribuye a la varianza en forma beneficiosa y la otra, perjudicialmente
- ✓ extrayendo de la varianza aquella componente de mayor interés para formalizar medidas de eficiencia, complementarias de las estándar, según sea el estado del proceso

La gran popularidad de la Carta CUSUM Normal y la frecuencia en la práctica, cada vez mayor, de procesos no normales fueron los motivos que llevaron a los autores a aplicar las medidas de eficiencia propuestas para analizar la sensibilidad de la carta CUSUM Normal ante la presencia de procesos Weibull.

Los procesos Weibull son ampliamente usados en los Análisis de Confiabilidad de productos reparables (equipos), no reparables y sistemas. La distribución de probabilidad Weibull juega un papel muy importante a la hora de estudiar los tiempos de vida de muchos componentes electrónicos y mecánicos. Además, esta distribución es muy versátil, al recorrer distintos valores de sus parámetros de forma y escala, α y β , respectivamente.

El análisis de la sensibilidad permite responder a preguntas como: ¿cuál es la reacción de la carta CUSUM Normal ante la presencia de ciertos procesos no normales?, ¿la velocidad con que la carta CUSUM Normal detecta un cambio en la media del proceso para un proceso Normal es la misma que para un proceso Weibull? En la práctica, es importante tener claridad en estos aspectos para no incurrir en errores que conducen a tomas de decisiones equivocadas, costosas y a veces irreversibles.

Una vez formalizadas las medidas de resumen, se debe pasar a la instancia del cómputo. En el caso particular de las cartas de Shewhart, es posible realizarlo con exactitud porque se conoce la distribución de probabilidad de las variables LC y LFA la cual es geométrica dado que el valor que toma su Estadístico de Control depende exclusivamente de la información recogida en el reciente monitoreo y no en los

anteriores. Es decir, el resultado de cada monitoreo es independiente uno del otro. Esto se traduce en repeticiones independientes, requerimiento fundamental a la hora de usar la distribución geométrica.

Para las cartas CUSUM (como también para las EWMA), en cambio, la distribución de probabilidad geométrica no tiene cabida dado que el valor que toma su Estadístico de Control depende tanto de la información presente como de la pasada. Es decir, el resultado de cada monitoreo se relaciona con el de los monitoreos anteriores. Esto implica que las repeticiones dejan de ser independientes, fallando así el supuesto fundamental sobre el cual sólo es válida la distribución geométrica.

Sin embargo, existen varios métodos para estimar las medidas estándar, LCP y LFAP, en cartas CUSUM. Se cuentan con: el enfoque de Cadenas de Markov [3], métodos numéricos [4], y métodos de Simulación.

Para estimar las medidas estándar y complementarias propuestas en este trabajo, se optó por un método de simulación diseñado especialmente para alcanzar los objetivos planteados.

En cuanto al formato del trabajo, las secciones 2 y 7 están dedicadas especialmente al lector con no muchos conocimientos en el campo de las Cartas de Control. En la sección 2, una breve descripción de las Cartas de Control y, en especial, de las Cartas CUSUM. En la sección 7, las etapas por las que se debe pasar para construir una Carta de Control CUSUM Normal. En la sección 3, dada la versatilidad de las Cartas de Control, se brinda el alcance del trabajo. En la sección 4, las Medidas de Eficiencia Estándar y Complementarias propuestas como así también su origen e importancia. En la sección 5, los estimadores de tales medidas y sus propiedades. En la sección 6, a modo de repaso, generalidades de la distribución de probabilidad Weibull. En la sección 8, el Modelo de Simulación diseñado especialmente para medir y comparar la eficiencia de la Carta CUSUM Normal ante la presencia de procesos Normal y Weibull usando las Medidas de Resumen propuestas en las secciones 4 y 5. En la sección 9, los resultados de las simulaciones. Primero, en tablas y, posteriormente, para visualizar rápidamente el comportamiento de estos números, en gráficos. En las secciones 10 y 11, el análisis y las conclusiones arribadas de la minuciosa observación de los gráficos de la sección 9. Finalmente, las referencias bibliográficas en las se basó el trabajo.

2. GENERALIDADES DE LAS CARTAS DE CONTROL

Una Carta de Control se construye sobre un par de ejes perpendiculares: el eje x representa al eje tiempo y el eje y, al Estadístico de Control que, como su nombre lo indica, es un estadístico que permite controlar, a través del tiempo, el desempeño de un proceso sometido a monitoreo. La estructura del Estadístico de Control depende del tipo de Carta de Control que se use y del parámetro a controlar. En las cartas más simples, como las de Shewhart, coincide con el estimador del parámetro y, en las cartas más avanzadas, como las Cartas CUSUM, se trata de una función del estimador.

El cambio, llamado habitualmente corrimiento o desplazamiento, en un parámetro del proceso, puede darse en uno de 2 sentidos: hacia arriba del valor del parámetro o hacia abajo. Una Carta de Control puede ser unilateral o bilateral dependiendo del interés en detectar corrimientos del parámetro en uno o ambos sentidos, respectivamente. En una carta bilateral, el gráfico se completa con 3 líneas horizontales: una central y 2 de control, llamadas superior e inferior que cortan al eje y en puntos determinados por principios estadísticos. La superior sirve para detectar corrimientos hacia arriba del valor del parámetro y, la inferior, hacia abajo.

Una vez determinadas las líneas de control se pone en marcha el monitoreo del proceso que consiste en recabar información del mismo a intervalos de tiempo, regulares o no, y volcarla en el Estadístico de Control para luego representar su valor con un punto en el gráfico, y así cada vez. La información recogida periódicamente consta de una observación o una muestra de observaciones de la o las características a estudiar del proceso.

En cuanto a la interpretación de la carta, si los sucesivos puntos graficados se encuentran entre las líneas de control entonces el proceso está bajo control. Un punto o más, por encima de la línea superior, es señal de un probable corrimiento del parámetro hacia arriba. En cambio, un punto o más, por debajo de la línea inferior, es indicio de un probable corrimiento hacia abajo. En cualquier situación, se recomienda la búsqueda de la causa que provocó ese corrimiento y su consecutiva enmienda o acción para restablecer el proceso a su normal funcionamiento o conducirlo a un desempeño aún más deseable que el anterior.

Las cartas CUSUM se destacan de otras por su rapidez para detectar pequeños cambios en los parámetros del proceso porque su Estadístico de Control es una suma acumulada (como su sigla lo sugiere) de la información, presente y pasada, recogida del proceso.

La construcción de la carta CUSUM requiere el preestablecimiento del corrimiento en el parámetro del proceso que se desea detectar como mínimo y que originaría problemas de calidad en el producto. Existen 2 enfoques de construcción pero, el más actual, por su atractivo a la hora de ser implementado en una computadora, es el enfoque Numérico (o también llamado Tabular), el cual exige la predeterminación de 2 parámetros: el valor de referencia “k” y el intervalo de decisión “h”:

- ✓ El valor de referencia depende de 2 factores: del corrimiento que se desea detectar como mínimo y del tipo de proceso a monitorear, Normal, Weibull, Binomial, Poisson, etc.
- ✓ El límite de decisión es la distancia a la que se ubican, de la línea central, las líneas de control superior e inferior, y depende del valor de LFAP elegido como tolerable. En los trabajos de comparación entre distintos diseños de Cartas de Control es habitual usar el valor LFAP = 370 pues corresponde a la LFAP de las cartas pioneras, las de Shewhart con límites de control situados a 3 desvíos estándar de la línea central.

La carta CUSUM bilateral plantea 2 Estadísticos de Control, representados por 2 sumas acumuladas, una superior para detectar cambios por encima de la media del proceso y otra inferior, para detectar cambios por debajo.

3. ALCANCE DEL TRABAJO

Habiendo introducido algunas generalidades de las Cartas de Control, se expone el marco de alcance del trabajo:

- ✓ monitoreo de la media de procesos Normal y Weibull con valores alternativos en su parámetro de forma α
- ✓ mediante la toma de observaciones individuales, independientes, a intervalos de tiempo regulares
- ✓ para la detección de pequeños corrimientos en la media del proceso
- ✓ mediante la carta CUSUM Normal bilateral
- ✓ bajo el enfoque Numérico (o Tabular)
- ✓ el valor de “h” establecido, para cada diseño CUSUM, fue ajustado para obtener una LFAP de, aproximadamente, 370 puntos graficados
- ✓ la performance de la carta CUSUM Normal ante la presencia de procesos Normal y Weibull fue evaluada con las medidas de eficiencia estándar y complementarias propuestas las cuales fueron estimadas por simulación

4. MEDIDAS DE EFICIENCIA: ESTÁNDAR Y COMPLEMENTARIAS

4.1. MEDIDAS DE DISPERSIÓN: VARIABILIDAD A IZQUIERDA Y DERECHA DE LCP Y LFAP

Al ser LC y LFA variables aleatorias, la Estadística sugiere que, para caracterizar una variable aleatoria, es necesario disponer de una medida de tendencia central (por ejemplo, el valor esperado) como también de una medida de dispersión (por ejemplo, el desvío estándar). Como medida de tendencia central, la literatura especializada considera los estándares LCP y LFAP.

Como medida de dispersión, se contempla, en un principio de este trabajo, los coeficientes de variación: CV(LC), para un proceso fuera de control y, CV(LFA), para un proceso bajo control. Se optó por los coeficientes de variación y no los desvíos estándar para dar cabida a la comparación entre diseños con diferentes LCP. Los coeficientes CV(LC) y CV(LFA) representan la *variabilidad total* que sufren, respectivamente, las variables LC y LFA en torno a sus propios valores esperados, medidas en términos porcentuales.

Luego, un diseño deseable es el que ofrece la LFAP más grande posible y la LCP más pequeña posible y además, los coeficientes de variación más pequeños posibles. El beneficio de una carta con longitudes de corrida poco dispersas es que tiene un comportamiento *previsible*.

En cartas CUSUM, para un corrimiento dado, cuanto mayor sea el valor del límite de decisión “h”, mayor será el valor de LFAP, lo cual es beneficioso; pero, a la par, aumentará el valor de LCP, lo que es perjudicial. Intuitivamente, esto puede ser visto así: cuanto más disten, de la línea central, las líneas de control superior e inferior, más tardará la carta en traspasarlas para emitir una señal, independientemente de que el proceso esté o no bajo control.

Luego, para un corrimiento dado, no es posible obtener una carta con la LFAP más grande posible y, por el contrario, la LCP más pequeña posible. En la práctica, lo que se hace es llegar a un valor de equilibrio. En cartas CUSUM, el parámetro “h” es elegido de tal forma que la LFAP resulte en un valor tolerable y la LCP, para un corrimiento dado, en uno satisfactorio.

La literatura especializada expone que la distribución de probabilidad de las variables aleatorias LC y LFA es asimétrica. Por lo tanto, *las variabilidades a izquierda y derecha de los promedios LFAP y LCP no contribuyen, en iguales proporciones, a la variabilidad total*, como luego, se constata de las tablas de la sección 9.1. Este argumento sirvió de base para plantear cómo separar la variabilidad a izquierda de la derecha, lo cual se prueba en los Teoremas 1 y 2 y Corolarios 1 y 2.

Teorema 1 *En el caso de un proceso fuera de control, la varianza de la LC es*

$$V(LC) = P_I(LC) V_I(LC) + P_D(LC) V_D(LC) \quad (4.1)$$

siendo:

$V(LC)$ = varianza de la longitud de corrida

$P_I(LC)$ = proporción de corridas cortas = $P(LC \leq LCP)$

$P_D(LC)$ = proporción de corridas largas = $P(LC > LCP)$

$V_I(LC)$ = varianza a izquierda del promedio LCP = $V(LC ; LC \leq LCP)$

$$= \sum_{lc \leq LCP} (lc - LCP)^2 \cdot P(LC = lc / LC \leq LCP) \quad (4.2)$$

$V_D(LC)$ = varianza a derecha del promedio LCP = $V(LC ; LC > LCP)$

$$= \sum_{lc > LCP} (lc - LCP)^2 \cdot P(LC = lc / LC > LCP) \quad (4.3)$$

Prueba. Teniendo en cuenta que la variable aleatoria LC es de naturaleza discreta entonces, para un proceso fuera de control, la varianza de la LC, $V(LC)$, puede ser desglosada como sigue:

$$V(LC) = E(LC - LCP)^2 = \sum_{lc=1}^{+\infty} (lc - LCP)^2 \cdot P(LC = lc)$$

siendo E el operador esperanza

$$V(LC) = \sum_{lc \leq LCP} (lc - LCP)^2 \cdot P(LC = lc) + \sum_{lc > LCP} (lc - LCP)^2 \cdot P(LC = lc)$$

Dado que la primera sumatoria abarca las corridas con longitudes $LC \leq LCP$ y la segunda, con longitudes $LC > LCP$ entonces, multiplicando y dividiendo el primer término por $P(LC \leq LCP)$ y el 2º término por $P(LC > LCP)$ obtenemos:

$$V(LC) = P(LC \leq LCP) \sum_{lc \leq LCP} (lc - LCP)^2 \frac{P(LC = lc)}{P(LC \leq LCP)} + P(LC > LCP) \sum_{lc > LCP} (lc - LCP)^2 \frac{P(LC = lc)}{P(LC > LCP)}$$

Pero los cocientes $\frac{P(LC = lc)}{P(LC \leq LCP)}$ y $\frac{P(LC = lc)}{P(LC > LCP)}$ representan probabilidades condicionales. Luego,

$$V(LC) = P(LC \leq LCP) \sum_{lc \leq LCP} (lc - LCP)^2 \cdot P(LC = lc / LC \leq LCP) +$$

$$+ P(LC > LCP) \sum_{lc > LCP} (lc - LCP)^2 \cdot P(LC = lc / LC > LCP)$$

$$V(LC) = P(LC \leq LCP) E[(LC - LCP)^2 / LC \leq LCP] + P(LC > LCP) E[(LC - LCP)^2 / LC > LCP]$$

Las esperanzas que figuran en la igualdad anterior representan esperanzas condicionales. Finalmente,

$$V(LC) = P(LC \leq LCP) V(LC; LC \leq LCP) + P(LC > LCP) V(LC; LC > LCP)$$

Para simplificar la expresión se consideran las siguientes notaciones:

$$V(LC) = P_I(LC) V_I(LC) + P_D(LC) V_D(LC)$$

siendo:

$$P_I(LC) = \text{proporción de corridas cortas} = P(LC \leq LCP)$$

$$P_D(LC) = \text{proporción de corridas largas} = P(LC > LCP)$$

$$V_I(LC) = \text{varianza a izquierda del promedio LCP} = V(LC; LC \leq LCP)$$

$$= \sum_{lc \leq LCP} (lc - LCP)^2 \cdot P(LC = lc / LC \leq LCP)$$

$$V_D(LC) = \text{varianza a derecha del promedio LCP} = V(LC; LC > LCP)$$

$$= \sum_{lc > LCP} (lc - LCP)^2 \cdot P(LC = lc / LC > LCP)$$

Las varianzas laterales $V_I(LC)$ y $V_D(LC)$ no deben ser confundidas con el concepto de varianza condicional tal como se expone en la literatura estadística. En este trabajo, representan simplemente la variabilidad de los valores LC que se encuentran, respectivamente, a izquierda y derecha de la LCP *en relación a este promedio*. □

Corolario 1 Para un proceso fuera de control, el coeficiente de variación (CV) de la LC es:

$$CV(LC) = \sqrt{P_I(LC) CV_I^2(LC) + P_D(LC) CV_D^2(LC)} \quad (4.4)$$

siendo:

$$CV_I(LC) = \text{coeficiente de variación a izquierda de la LCP} = \sqrt{V_I(LC)} / LCP \quad (4.5)$$

$$CV_D(LC) = \text{coeficiente de variación a derecha de la LCP} = \sqrt{V_D(LC)} / LCP \quad (4.6)$$

Prueba. Teniendo en cuenta (4.1), la variabilidad total $CV(LC)$, medida a través de su coeficiente de variación, pueden ser expresada como sigue:

$$CV(LC) = \frac{\sqrt{V(LC)}}{LCP} = \frac{\sqrt{P_I(LC) V_I(LC) + P_D(LC) V_D(LC)}}{LCP} = \sqrt{P_I(LC) \frac{V_I(LC)}{LCP^2} + P_D(LC) \frac{V_D(LC)}{LCP^2}}$$

Finalmente,

$$CV(LC) = \sqrt{P_I(LC) CV_I^2(LC) + P_D(LC) CV_D^2(LC)}$$

siendo:

$$CV_I(LC) = \text{coeficiente de variación a izquierda de la LCP} = \sqrt{V_I(LC)} / LCP$$

$$CV_D(LC) = \text{coeficiente de variación a derecha de la LCP} = \sqrt{V_D(LC)} / LCP \quad \square$$

Teorema 2 En el caso de un proceso bajo control, la varianza de la LFA es:

$$V(LFA) = P_I(LFA) V_I(LFA) + P_D(LFA) V_D(LFA) \quad (4.7)$$

siendo:

$$\begin{aligned} P_I(LFA) &= \text{proporción de corridas cortas} = P(LFA < LFAP) \\ P_D(LFA) &= \text{proporción de corridas largas} = P(LFA \geq LFAP) \\ V_I(LFA) &= \text{varianza a izquierda del promedio LFAP} = V(LFA; LFA < LFAP) \\ &= \sum_{lfa < LFAP} (lfa - LFAP)^2 \cdot P(LFA = lfa / LFA < LFAP) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} V_D(LFA) &= \text{varianza a derecha del promedio LFAP} = V(LFA; LFA \geq LFAP) \\ &= \sum_{lfa \geq LFAP} (lfa - LFAP)^2 \cdot P(LFA = lfa / LFA \geq LFAP) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Prueba. En el caso de un proceso bajo control, como LFA es, al igual que LC, una variable aleatoria discreta, podemos realizar un trabajo algebraico muy similar al del Teorema 1 para obtener V(LFA), la varianza de la LFA:

$$V(LFA) = E(LFA - LFAP)^2 = \sum_{lfa=1}^{+\infty} (lfa - LFAP)^2 \cdot P(LFA = lfa)$$

$$\begin{aligned} V(LFA) &= P(LFA < LFAP) \sum_{lfa < LFAP} (lfa - LFAP)^2 \cdot P(LFA = lfa / LFA < LFAP) + \\ &+ P(LFA \geq LFAP) \sum_{lfa \geq LFAP} (lfa - LFAP)^2 \cdot P(LFA = lfa / LFA \geq LFAP) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(LFA) &= P(LFA < LFAP) E [(LFA - LFAP)^2 / LFA < LFAP] + \\ &+ P(LFA \geq LFAP) E [(LFA - LFAP)^2 / LFA \geq LFAP] \end{aligned}$$

Finalmente,

$$V(LFA) = P(LFA < LFAP) V(LFA; LFA < LFAP) + P(LFA \geq LFAP) V(LFA; LFA \geq LFAP)$$

Para simplificar la expresión, se consideran las siguientes notaciones:

$$V(LFA) = P_I(LFA) V_I(LFA) + P_D(LFA) V_D(LFA)$$

siendo:

$$\begin{aligned} P_I(LFA) &= \text{proporción de corridas cortas} = P(LFA < LFAP) \\ P_D(LFA) &= \text{proporción de corridas largas} = P(LFA \geq LFAP) \\ V_I(LFA) &= \text{varianza a izquierda del promedio LFAP} = V(LFA; LFA < LFAP) \\ &= \sum_{lfa < LFAP} (lfa - LFAP)^2 \cdot P(LFA = lfa / LFA < LFAP) \\ V_D(LFA) &= \text{varianza a derecha del promedio LFAP} = V(LFA; LFA \geq LFAP) \\ &= \sum_{lfa \geq LFAP} (lfa - LFAP)^2 \cdot P(LFA = lfa / LFA \geq LFAP) \end{aligned}$$

Al igual que para un proceso fuera de control, las varianzas laterales $V_I(LFA)$ y $V_D(LFA)$, no deben ser confundidas con el concepto de varianza condicional. Representan simplemente la variabilidad de los valores LFA que se encuentran, respectivamente, a izquierda y derecha de la LFAP en relación a este promedio. \square

Corolario 2 En el caso de un proceso bajo control, el coeficiente de variación (CV) de la LFA es:

$$CV(LFA) = \sqrt{P_I(LFA) CV_I^2(LFA) + P_D(LFA) CV_D^2(LFA)} \quad (4.10)$$

siendo:

$$CV_I(LFA) = \text{coeficiente de variación a izquierda de la LFAP} = \sqrt{V_I(LFA)}/LFAP \quad (4.11)$$

$$CV_D(LFA) = \text{coeficiente de variación a derecha de la LFAP} = \sqrt{V_D(LFA)}/LFAP \quad (4.12)$$

Prueba. Al igual que en la prueba del Corolario 1 y teniendo en cuenta (4.7), la variabilidad total $CV(LFA)$, medida a través de su coeficiente de variación, pueden ser expresada como en (4.10), (4.11) y (4.12). \square

4.2 IMPORTANCIA DE LAS VARIABILIDADES LATERALES SEGÚN EL ESTADO DEL PROCESO

Las variabilidades laterales no son igualmente importantes para las variables LC y LFA puesto que:

✓ ***Si el proceso está bajo control, la variabilidad que preocupa es la izquierda:***

En el campo de las Cartas de Control, la LFAP no representa el valor ideal de la LFA, sólo se trata de un valor referencial, para saber qué puede esperarse de la carta. El valor ideal de la LFA es, como se mencionó en la sección 4.1, el más grande posible. Luego, las corridas con longitudes superiores a lo esperado (LFAP) son bienvenidas, contribuyen a la variabilidad total en forma beneficiosa. Por eso, la variabilidad derecha, $CV_D(LFA)$, no nos afecta si es grande; al contrario, cuanto más grande es, mejor. Por lo tanto, el interés y la preocupación recae en $CV_I(LFA)$.

✓ ***Si el proceso está fuera de control, la variabilidad que preocupa es la derecha:***

La LCP no representa el valor ideal de la LC, sólo se trata de un valor referencial, para saber qué puede esperarse de la carta. El valor ideal de la LC es el más pequeño posible. Luego, las corridas con longitudes inferiores a lo esperado (LCP) son bien recibidas. Por eso, la variabilidad izquierda, $CV_I(LC)$, no nos perjudica si es grande; al contrario, cuanto más grande es, mejor. Como conclusión, el interés y la preocupación en este caso recae en $CV_D(LC)$.

Teniendo en cuenta esto, para evaluar la performance de una carta se sugiere concentrar la atención en:

✓ ***para un proceso bajo control:*** la media estándar LFAP y la variabilidad izquierda $CV_I(LFA)$

✓ ***para un proceso fuera de control:*** la media estándar LCP y la variabilidad derecha $CV_D(LC)$

5. ESTIMADORES DE LAS MEDIDAS DE EFICIENCIA

Para la estimación de todas las medidas fue diseñado un modelo de simulación. En cuanto a las cantidades LCP y LFAP, se utilizó el procedimiento habitual para estimar promedios mediante simulación.

Para la estimación de los coeficientes de variación $CV_I(LFA)$ y $CV_D(LC)$, se requirió previamente las de las varianzas laterales $V_I(LFA)$ y $V_D(LC)$ las cuales, teniendo en cuenta las expresiones (4.3) y (4.8), fue realizada como sigue:

$$\hat{V}_I(LFA) = \sum_{lfa: lfa < LFAP} (lfa - LFAP)^2 \frac{m_{lfa}}{m_I} \quad (5.1)$$

$$\hat{V}_D(LC) = \sum_{lc: lc > LCP} (lc - LCP)^2 \frac{n_{lc}}{n_D} \quad (5.2)$$

siendo:

n = n° de corridas a ejecutar (cantidad de simulaciones)

m_I = n° de corridas entre n con $LFA < LFAP$

n_D = n° de corridas entre n con $LC > LCP$

lfa = LFA de una cierta corrida (simulación) de un proceso Normal o Weibull bajo control

lc = LC de una cierta corrida (simulación) de un proceso Normal o Weibull fuera de control

m_{lfa} = n° de corridas entre m_I con $LFA = lfa$

$n_{lc} = n^\circ$ de corridas entre n_D con $LC = lc$

Las cantidades $\frac{m_{lfa}}{m_I}$ y $\frac{n_{lc}}{n_D}$ estiman, respectivamente, las probabilidades condicionales $P(LFA = lfa / LFA < LFAP)$ y $P(LC = lc / LC > LCP)$.

5.1 PROPIEDADES DE LOS ESTIMADORES DE LAS VARIANZAS LATERALES

Teorema 3 $\hat{V}_I(LFA)$ y $\hat{V}_D(LC)$ son estimadores sesgados pero consistentes.

Prueba. Dado que m_I y n_D no dependen de “i”, es posible operar algebraicamente (5.1) y (5.2) como sigue:

$$\hat{V}_I(LFA) = \frac{\sum_{lfa: lfa < LFAP} (lfa - LFAP)^2 m_{lfa}}{m_I}$$

$$\hat{V}_D(LC) = \frac{\sum_{lc: lc > LCP} (lc - LCP)^2 n_{lc}}{n_D}$$

Como se observa, estos estimadores son cocientes de variables aleatorias pues m_I sigue la distribución Binomial con parámetros n y $P_I(LFA)$ y, n_D sigue la distribución Binomial con parámetros n y $P_D(LC)$.

Luego, $V_I(LFA)$ y $V_D(LC)$ deben ser tratados como estimadores de razón. Estos se caracterizan por ser estimadores *sesgados pero consistentes*, lo que implica que su sesgo se torna despreciable siempre y cuando el tamaño de la muestra (en este trabajo, equivale a la cantidad de simulaciones) sea suficientemente grande.

[2] presenta un criterio que indica cuando el tamaño de muestra “n” usado es lo suficientemente grande como para considerar despreciable al sesgo, y es válido cualquiera sea la población de origen. Dice: “el coeficiente de variación del denominador del estimador de razón debe ser inferior al 5 % de \sqrt{n} ”.

En nuestro caso, los coeficientes de variación de los denominadores m_I y n_D , deben ser inferiores a $0.05\sqrt{n}$. Como m_I y n_D son variables Binomial entonces, para considerar al sesgo despreciable, deben satisfacerse las relaciones:

$$\frac{\sqrt{n P_I(LFA) Q_I(LFA)}}{n P_I(LFA)} < 0.05\sqrt{n} \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt{n P_D(LC) Q_D(LC)}}{n P_D(LC)} < 0.05\sqrt{n}$$

siendo:

$$Q_I(LFA) = 1 - P_I(LFA) \tag{5.3}$$

$$Q_D(LC) = 1 - P_D(LC) \tag{5.4}$$

Luego, deben verificarse:

$$\frac{\sqrt{P_I(LFA) Q_I(LFA)}}{n P_I(LFA)} < 0.05 \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt{P_D(LC) Q_D(LC)}}{n P_D(LC)} < 0.05$$

En este trabajo se realizaron 30 000 simulaciones para cada caso (como luego se explica en la sección 8.2). Por lo tanto, trabajando algebraicamente y teniendo en cuenta las relaciones (5.3) y (5.4), deben satisfacerse:

$$P_I(LFA) > \frac{1}{(0.05 * 30\,000)^2 + 1} \quad \text{y} \quad P_D(LCP) > \frac{1}{(0.05 * 30\,000)^2 + 1}$$

O sea, deben ser:

$$P_1(\text{LFA}) > 4.44 \times E-7 \quad \text{y} \quad P_D(\text{LC}) > 4.44 \times E-7$$

Dada la gran cantidad de simulaciones realizadas para cada caso contemplado, los resultados de las mismas arrojaron probabilidades estimadas $P_1(\text{LFA})$ y $P_D(\text{LC})$ que superaron ampliamente el valor límite $4.44 \times E-7$ en todos los casos, como luego puede comprobarse de las Tablas 1, 2, 3, 4 y 5 de la sección 9.1. Por lo tanto se concluye que *las cantidades $\widehat{V}_1(\text{LFA})$ y $\widehat{V}_D(\text{LC})$ resultan ser muy buenos estimadores de sus verdaderas varianzas.* \square

6. BREVE DESCRIPCIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD WEIBULL

La distribución de probabilidad Weibull de 2 parámetros goza de las siguientes características:

✓ Posee un parámetro de forma, α , y uno de escala, β . Ambos son reales positivos: α es adimensional y β se expresa en la misma unidad de tiempo que la usada para medir los tiempos de vida. El parámetro de escala, llamado usualmente vida característica, es tal que el 63.2% de los componentes fallan antes de β unidades de tiempo.

✓ Sus funciones de densidad $f(x)$ y de distribución acumulada $F(x)$, definidas para todo real x positivo, son:

$$f(x) = (\alpha x^{\alpha-1} / \beta^\alpha) \exp[-(x/\beta)^\alpha] \quad (6.1)$$

$$F(x) = 1 - \exp[-(x/\beta)^\alpha] \quad (6.2)$$

✓ Su esperanza y su varianza son como sigue, siendo Γ , la función gamma, cuyos valores pueden ser obtenidos mediante una planilla de cálculo como Excel:

$$E(X) = \beta \Gamma(1 + 1/\alpha) \quad (6.3)$$

$$V(X) = \beta^2 [\Gamma(1 + 2/\alpha) - \Gamma^2(1 + 1/\alpha)] \quad (6.4)$$

✓ Su forma es muy versátil. Dependiendo del valor de sus parámetros, la distribución pasa por distintos tipos y grados de asimetría. Si $\alpha = 1$, se obtiene la función de densidad de probabilidad exponencial

✓ Satisface la siguiente propiedad, la cual se justifica fácilmente a partir de (6.2):

$$\text{Si } X \sim W(\alpha, \beta) \text{ entonces } X/\beta \sim W(\alpha, \beta = 1) \quad (6.5)$$

✓ En Análisis de Confiabilidad, los parámetros α y β surgen en la etapa del diseño de la confiabilidad del producto. Es estimado mediante métodos ampliamente conocidos en este campo:

- ❖ Un componente con tiempos de falla distribuidos según Weibull con $\alpha < 1$ implica la presencia de un alto porcentaje de fallas iniciales. Puede deducirse, entonces que, el caso $\alpha < 1$ no es de utilidad en Confiabilidad pues ningún fabricante trabaja con este objetivo en mente
- ❖ Si $\alpha = 1$, el componente tendrá una tasa constante de fallas por unidad de tiempo. Es el caso de la distribución exponencial
- ❖ Cuanto mayor sea el valor α mejor será la calidad del componente dado que sus tiempos de falla son cada vez menos dispersos. [1] recomienda $\alpha > 4$

7. CARTA CUSUM NORMAL PARA MONITOREAR UN PROCESO MEDIANTE OBSERVACIONES INDIVIDUALES A INTERVALOS REGULARES DE TIEMPO

El enfoque Numérico para la construcción de la carta CUSUM Normal sigue las siguientes etapas:

I. Determinación de $D = d\sigma$ es el valor del corrimiento de interés a detectar como mínimo en la media del proceso, expresado en términos del desvío estándar.

II. Establecimiento de k y h : son los parámetros de la carta, llamados *valor de referencia* y *límite de decisión*, respectivamente.

En cuanto a k , la bibliografía especializada [9] recomienda que, en procesos normales, $k = d/2$. *El propósito de este trabajo es mantener este valor de k e investigar cuál es la reacción de la carta ante la presencia de ciertos procesos no normales.*

En cuanto a h , en la práctica es usual elegirlo de forma tal que la LFAP resulte en un valor considerado *tolerable* y la LCP, para el corrimiento D elegido, en uno *satisfactorio*. La calidad de *tolerable* y *satisfactorio* depende de cada problema en particular. Dado que las Cartas de Control presentan, en general, alta variabilidad, se recomienda fuertemente en este trabajo fijarlo teniendo en cuenta no sólo los promedios LFAP y LCP sino también las medidas complementarias aportadas en esta publicación.

III. Determinación de K y H : mediante las expresiones: $K = k \sigma$ y $H = h \sigma$.

IV. Cómputo de los Estadísticos de Control: en cada instante de observación del proceso, consisten en 2 sumas acumuladas, llamadas “suma superior” y “suma inferior”. La superior permite detectar corrimientos por encima del valor objetivo μ mientras que la inferior detecta corrimientos por debajo de él. Ambas sumas pueden ser definidas recursivamente como sigue para $i \geq 1$:

$$SS_i = \text{Max}[0, SS_{i-1} + X_i - (\mu + K)] \quad (7.1)$$

$$SI_i = \text{Min}[0, SI_{i-1} + X_i - (\mu - K)] \quad (7.2)$$

siendo X_i , el tiempo de vida del i -ésimo componente seleccionado de la línea de producción. Usualmente $SS_0 = SI_0 = 0$.

V. Construcción de la Carta de Control: Vuelco de los valores de los Estadísticos de Control en un diagrama de 2 ejes perpendiculares. El eje horizontal es el eje tiempo y el vertical, el de los Estadísticos de Control. Se completa el gráfico con 3 líneas horizontales, una central situada en 0 y dos, por encima y debajo de la línea central a una distancia H , llamadas, respectivamente, líneas de control superior e inferior.

VI. Interpretación del gráfico: si los sucesivos puntos graficados se encuentran entre las líneas de control se dice que el proceso está bajo control. En cambio, si un punto o más se encuentran encima o sobrepasa la línea de control superior o encima o debajo de la línea de control inferior, se dice que la carta ha emitido una señal y el proceso está fuera de control.

8. MODELO DE SIMULACIÓN

8.1 SUPUESTOS DEL MODELO

El modelo de simulación trabajó bajo los siguientes supuestos:

✓ **Corrimientos en la media del proceso iguales a $D_\mu = \pm d\sigma$, $0 \leq d \leq 2$, para ambos tipos de procesos, Normal y Weibull**

Se consideraron los corrimientos en la media del proceso: para un proceso bajo control, $D_\mu = 0$ y, para uno fuera de control, $D_\mu = \pm d\sigma$ con $d = 0.25, 0.50, 1, 1.5$ y 2 . No se contemplaron corrimientos más grandes pues las cartas CUSUM son aptas para detectar pequeños corrimientos en los parámetros del proceso. Se considera que un corrimiento es pequeño cuando es menor o igual a 1.5 o 2 desvíos estándar.

✓ **Valor h tal que $LFAP \cong 370$, para cada caso contemplado**

El valor base 370 es la longitud de falsa alarma para una carta tradicional de Shewhart con límites de control 3σ .

✓ **En cuanto al monitoreo de un proceso Normal, es suficiente estudiar un proceso Normal Estándar**

Toda distribución de probabilidad Normal puede ser transformada en una distribución de probabilidad Normal Estándar mediante $Z = (X - \mu) / \sigma$. El beneficio de la estandarización es obtener otra distribución más sencilla de manipular pero conservando las propiedades de la distribución original.

Luego, fijados los parámetros de la carta CUSUM, h y k , la LC de una secuencia de observaciones tomadas de un proceso normal con parámetros arbitrarios es igual a la LC de la secuencia estandarizada. Por lo tanto, basta estudiar el desempeño de la carta CUSUM Normal frente a un proceso *Normal Estándar*.

✓ **En cuanto al monitoreo de un proceso Weibull, es suficiente estudiar un proceso Weibull con $\beta = 1$**

Debido a (6.5), toda distribución de probabilidad Weibull X con parámetros arbitrarios α y β puede ser transformada en una distribución Weibull con parámetros α y $\beta = 1$ mediante $Y = X/\beta$. Otra vez el beneficio de la estandarización permite que, fijados los parámetros de la carta CUSUM, h y k , la LC de una secuencia de observaciones tomadas de un proceso Weibull con parámetros α y β arbitrarios es igual a la LC de la secuencia estandarizada. Luego, basta estudiar el desempeño de la carta CUSUM Normal frente a un proceso Weibull con parámetros α arbitrario y $\beta = 1$.

✓ **Monitoreo de la media de un proceso Weibull mediante el control del parámetro β , manteniendo α constante**

De (6.3) se observa que la media de un proceso Weibull depende de sus 2 parámetros. Luego, el control de la media puede realizarse mediante el control de su parámetro α manteniendo β constante, o controlando el parámetro α , manteniendo β constante.

En la práctica, es usual el control del parámetro β manteniendo α constante dado que β es considerado el parámetro más crítico pues afecta a la media μ en mayor medida que α . De (6.3) se observa que la media μ depende de β en forma lineal. Es decir, un cambio en β (con α constante) en una cierta proporción provoca un cambio en μ en esa misma proporción. En cambio, μ no depende de α en forma lineal sino a través de la función Gamma $\Gamma(1 + 1/\alpha)$, la cual tiende asintóticamente al valor 1 conforme aumenta el valor de α . Luego, un cambio en α (con β constante) en una cierta proporción provoca un cambio en μ en una proporción mucho más atenuada.

✓ **Valores alternativos de α que oscilan entre 1 y 10**

Una revisión de la literatura especializada de Confiabilidad ([1] y [8]) permite considerar a este rango de valores α lo suficientemente amplio como para ser aplicado a muchos casos prácticos.

✓ **Corrimientos en $\beta = 1$ iguales a $D_\beta = \pm d \cdot CV(\alpha)$, $0 \leq d \leq 2$**

Si la media μ del proceso sufre un corrimiento, hacia arriba o hacia abajo, igual a $d\sigma$, entonces el parámetro $\beta = 1$ sufre un corrimiento, en el mismo sentido, de $d \cdot CV(\alpha)$, siendo $CV(\alpha)$, el coeficiente de variación σ/μ de un proceso Weibull con parámetro de forma α . Este resultado se demuestra en el Teorema 4.

Teorema 4 Sean μ y σ , la media y el desvío estándar de un proceso Weibull con parámetros α (constante) y $\beta = 1$. Luego, si la media μ se desplaza al valor $\mu_N = \mu \pm d\sigma$ entonces el parámetro β se desplaza al valor

$$\beta_N = 1 \pm d CV(\alpha)$$

siendo $CV(\alpha)$, el coeficiente de variación σ/μ de un proceso Weibull con parámetro de forma α .

Prueba. Por hipótesis y teniendo en cuenta las relaciones (6.3) y (6.4):

$$\mu = \Gamma(1+1/\alpha) \tag{8.1}$$

$$\sigma^2 = \Gamma(1+2/\alpha) - \Gamma^2(1+1/\alpha) \tag{8.2}$$

Sea μ_N la media del proceso después que se produce un corrimiento de $d\sigma$ unidades de tiempo hacia arriba o hacia abajo en μ . Luego,

$$\mu_N = \mu \pm d\sigma$$

Por otro lado, si β_N es el nuevo parámetro β después de producido el corrimiento entonces:

$$\mu_N = \beta_N \Gamma(1+1/\alpha)$$

Se deduce entonces que:

$$\beta_N \Gamma(1+1/\alpha) = \mu \pm d\sigma$$

Despejando β_N y teniendo en cuenta la relación (8.1) se concluye que el parámetro β se desplaza del valor 1 en $d*CV(\alpha)$, siendo $CV(\alpha)$, el coeficiente de variación σ/μ . Es decir:

$$\beta_N = 1 \pm d*CV(\alpha) \quad \square$$

8.2. DISEÑO DEL MODELO

El diseño del modelo de simulación para la estimación de las medidas de eficiencia consistió básicamente en:

✓ En el caso de un proceso normal, para cada par (D, h) se realizaron 30000 simulaciones. En cada una de ellas, el programa generó valores de una población Normal desplazada $N(\mu = \pm d, \sigma = 1)$ (proceso fuera de control) hasta que alguna de las 2 sumas acumuladas indicó una señal fuera de control. También se generaron valores de una población Normal Estándar, o sea sin corrimiento (proceso bajo control), con el objeto de obtener información sobre la Longitud de Falsa Alarma. *Dado que la distribución Normal es simétrica entonces LCP y $CV_D(LC)$ para detectar un corrimiento de magnitud D en la media del proceso es la misma hacia arriba que hacia abajo.*

✓ En el caso de un proceso Weibull, para cada terna (D, h, α) , se realizaron 30000 simulaciones. En cada una, el programa generó valores de una población Weibull (α, β_N) como así también de una población Weibull $(\alpha, \beta = 1)$ con el fin de describir el comportamiento de la Longitud de Falsa Alarma.

✓ A diferencia de lo que ocurre con la distribución Normal, la distribución Weibull es asimétrica. Esto causa que, aún cuando las magnitudes de los corrimientos sean las mismas, LCP y $CV_D(LC)$ resulten en diferentes valores cuando se desea detectar corrimientos hacia arriba y hacia abajo en la media del proceso. Esto obligó a introducir nuevas notaciones:

$LCP \hat{\uparrow}$: LCP para un corrimiento hacia arriba en la media de un proceso Weibull

$LCP \hat{\downarrow}$: LCP para un corrimiento hacia abajo en la media de un proceso Weibull

$CV(LC \hat{\uparrow})$: CV de la LC para un corrimiento hacia arriba en la media de un proceso Weibull

$CV_D(LC \hat{\uparrow})$: CV derecha de la LC para un corrimiento hacia arriba en la media de un proceso Weibull

$CV(LC \hat{\downarrow})$: CV de la LC para un corrimiento hacia abajo en la media de un proceso Weibull

$CV_D(LC \hat{\downarrow})$: CV derecha de la LC para un corrimiento hacia abajo en la media de un proceso Weibull

✓ Para cada proceso, el programa generó valores hasta que alguna de las 2 sumas acumuladas emitió una señal fuera de control. La cantidad de valores generados hasta la señal es la longitud de esa corrida particular cuyo valor fue registrado por el programa para finalmente recoger los 30000 valores simulados y así estimar todas las medidas de eficiencia propuestas. A efectos de posibilitar la comparación, se generaron las mismas muestras para cada combinación (D, h) .

✓ Finalmente, se pasó a las etapas de verificación y validación del modelo de simulación

- ✓ Las 30000 simulaciones ejecutadas en cada caso arrojaron los siguientes errores de muestreo, en todos los casos con una confianza del 99%:
 - ❖ Para la estimación de los promedios LFAP, $LCP\uparrow$ y $LCP\downarrow$, los errores de muestreo asociados resultaron inferiores al 1.5 % de su verdadero valor
 - ❖ Para la determinación de los coeficientes de variación, fue necesario estimar previamente los desvíos estándar correspondientes. Los errores de muestreo cometidos no superan el 1 % de su verdadero valor
 - ❖ Para la estimación de las proporciones $P_I(LFA)$ y $P_D(LC)$, los errores de muestreo cometidos no superan el 0.74%
- ✓ Los resultados obtenidos de las simulaciones se presentan en las tablas que se muestran en la sección 9.

9. RECOGIDA DE LOS RESULTADOS DE LAS SIMULACIONES

9.1 TABLAS

Los resultados de las simulaciones fueron recogidos en las Tablas 9.1.1 a 9.1.5, una por cada corrimiento D. En cada una de ellas, las columnas están encabezadas con el parámetro de forma α de la distribución Weibull menos la última, encabezada con la letra «N», que corresponde al caso de un proceso Normal.

Debajo de cada valor α o la letra «N» se indica el límite de decisión "h" de la carta CUSUM Normal necesario para producir una LFAP de, aproximadamente, 370 puntos graficados. Este valor "h" fue también obtenido por simulación. A continuación, se encolumna los valores simulados de las diversas medidas de eficiencia. Las celdas señaladas con "-" indican que no fue posible completarlas pues el valor β_N resultó ser negativo.

A modo de información, se incorporan los datos recogidos de los coeficientes de variación globales $CV(LFA)$, $CV(LC\uparrow)$ y $CV(LC\downarrow)$, todos expresados en términos porcentuales, y de las proporciones de corridas cortas $P_I(LFA)$ y de corridas largas $P_D(LC)$.

9.2 GRÁFICOS

Para una rápida y efectiva comparación del comportamiento de las diversas medidas de eficiencia de la carta CUSUM Normal ante la presencia de procesos Normal y Weibull se visualiza en las Figuras 9.2.1 a 9.2.4 el porcentaje de variación de cada medida para un proceso Weibull en relación con igual medida para un proceso Normal. El valor referencial 0 indicado en cada figura con una línea horizontal gruesa de color azul representa el valor de cada medida para un proceso Normal.

Por ejemplo, en la Figura 9.2.1, la $LCP\uparrow$ de la carta para detectar un corrimiento $D = 1\sigma$ hacia arriba en la media de un proceso Weibull con $\alpha = 1$ es, aproximadamente, un 20 % superior a la misma medida para detectar igual corrimiento en la media de un proceso Normal.

Como un segundo ejemplo, en la Figura 9.2.4, el $CV_D(LC\downarrow)$ de la carta para detectar un corrimiento $D = 0.25\sigma$ hacia abajo en la media de un proceso Weibull con $\alpha = 2$ es, aproximadamente, un 10 % inferior a la misma medida para detectar igual corrimiento en la media de un proceso Normal.

10. ANÁLISIS Y COMPARACIÓN

10.1 CONCLUSIONES GENERALES

Necesidad de que los promedios LFAP y LCP estén acompañados por medidas de variabilidad: la importancia de contar con ellas queda demostrada al observar las altas magnitudes que éstas presentan, tanto para Weibull como para la distribución Normal. Las medidas promedio por sí solas proporcionarían una visión distorsionada del real comportamiento de una Carta de Control.

Necesidad de una medida de variabilidad acorde a cada estado del proceso: la gran diferencia en magnitud que observamos entre la variabilidad izquierda y la total para la LFA y, entre la variabilidad

α	1	2	4	6	8	10	N
h	12.05	12.12	12.12	12.12	12.12	12.11	12.09
LFAP	370.67	370.46	370.28	370.67	370.75	370.03	370.45
CV_I(LFA)	59.20	58.74	58.78	58.80	58.76	58.75	58.88
CV(LFA)	92.61	91.00	89.94	89.98	90.19	90.09	90.61
P _I (LFA)	63.48	63.41	63.24	63.16	63.11	63.11	63.17
LCP\uparrow	69.86	71.02	72.09	72.59	72.68	72.83	74.89
CV_D(LC\uparrow)	101.77	95.69	90.57	87.79	87.04	86.45	86.20
CV(LC \uparrow)	74.52	69.59	66.12	64.62	63.99	63.66	63.39
P _D (LC \uparrow)	38.43	37.98	38.12	38.67	38.62	38.72	38.70
LCP\downarrow	82.40	79.37	77.99	77.77	77.59	77.49	74.89
CV_D(LC\downarrow)	68.40	77.90	82.58	84.46	85.36	85.75	86.20
CV(LC \downarrow)	51.25	57.99	61.60	62.74	63.28	63.57	63.39
P _D (LC \downarrow)	39.26	38.91	39.24	38.94	38.75	38.71	38.70

Tabla 9.1.1: $D = 0.25 \sigma$

α	1	2	4	6	8	10	N
h	8.39	8.045	8.015	8.03	8.055	8.07	7.995
LFAP	370.70	370.23	370.13	370.16	370.23	370.24	370.47
CV_I(LFA)	62.89	61.84	62.06	62.18	62.35	62.33	61.93
CV(LFA)	97.34	96.11	95.44	95.67	95.85	96.52	95.72
P _I (LFA)	63.20	63.39	63.10	63.16	63.01	63.18	63.01
LCP\uparrow	28.08	26.88	27.26	27.57	27.79	27.91	28.63
CV_D(LC\uparrow)	105.37	91.35	85.06	81.58	79.51	77.93	76.71
CV(LC \uparrow)	76.17	68.03	62.51	60.48	59.34	58.57	57.85
P _D (LC \uparrow)	37.40	39.42	38.17	38.83	39.30	39.81	39.71
LCP\downarrow	33.10	30.65	30.04	30.00	30.08	30.14	28.63
CV_D(LC\downarrow)	40.95	60.13	71.26	74.09	75.56	76.56	76.71
CV(LC \downarrow)	31.92	46.55	53.44	55.45	56.61	57.39	57.85
P _D (LC \downarrow)	40.09	40.92	38.84	38.69	38.84	38.93	39.71

Tabla 9.1.2: $D = 0.50 \sigma$

α	1	2	4	6	8	10	N
h	6.12	4.905	4.725	4.815	4.9	4.97	4.764
LFAP	370.27	370.26	370.62	370.29	370.62	370.14	370.21
CV_I(LFA)	63.90	63.88	63.63	63.94	64.06	64.09	63.37
CV(LFA)	98.81	98.93	97.82	98.31	98.33	98.12	97.96
P _I (LFA)	63.33	63.04	62.96	62.71	62.70	62.80	63.29
LCP\uparrow	12.08	9.43	9.17	9.40	9.62	9.77	9.90
CV_D(LC\uparrow)	110.70	96.32	86.29	79.20	74.59	71.95	67.15
CV(LC \uparrow)	78.60	70.04	61.72	58.23	56.06	54.90	53.16
P _D (LC \uparrow)	36.26	37.92	36.43	38.33	39.93	41.17	43.17
LCP\downarrow	-	10.45	10.17	10.39	10.59	10.76	9.90
CV_D(LC\downarrow)	-	34.56	54.19	58.71	59.51	60.02	67.15
CV(LC \downarrow)	-	28.29	41.84	46.07	47.65	48.73	53.16
P _D (LC \downarrow)	-	42.39	38.97	40.73	42.44	43.66	43.17

Tabla 9.1.3: $D = 1 \sigma$

α	1	2	3	4	5	6	7	8	10	N
h	5.13	3.588	3.236	3.237	3.313	3.402	3.486	3.562	3.685	3.332
LFAP	370.10	370.18	370.66	370.59	370.49	370.66	370.30	370.62	370.44	370.45
CV_I(LFA)	64.15	64.23	64.12	64.50	64.27	64.34	64.41	64.38	64.51	64.23
CV(LFA)	99.23	99.21	99.09	99.06	99.42	99.09	99.12	99.27	99.25	98.87
P _I (LFA)	63.18	63.21	63.19	62.76	63.08	62.90	62.87	62.91	62.83	63.02
LCP↑	7.67	5.24	4.74	4.75	4.85	4.97	5.09	5.19	5.36	5.19
CV_D(LC↑)	108.27	100.94	86.27	80.92	75.58	71.24	81.42	77.93	72.52	70.33
CV(LC↑)	79.66	71.28	66.01	62.28	59.52	57.43	55.86	54.64	52.64	50.89
P _D (LC↑)	39.04	35.68	41.64	42.12	43.92	45.95	33.24	34.66	37.01	35.97
LCP↓	-	5.33	4.97	5.03	5.19	5.34	5.48	5.59	5.78	5.19
CV_D(LC↓)	-	16.98	26.87	44.92	47.14	48.38	48.51	48.32	48.09	70.33
CV(LC↓)	-	13.06	26.64	33.01	36.36	38.64	39.96	40.84	42.12	50.89
P _D (LC↓)	-	35.27	59.49	33.33	37.16	40.12	42.75	44.98	48.24	35.97

Tabla 9.1.4: D = 1.5 σ

α	1	2	3	4	5	6	7	8	10	N
h	4.5	2.854	2.3715	2.353	2.465	2.6	2.721	2.823	2.976	2.513
LFAP	370.10	370.71	370.43	370.20	370.29	370.24	370.31	370.47	370.62	370.10
CV_I(LFA)	64.35	64.31	64.27	64.37	64.53	64.55	64.60	64.50	64.55	64.40
CV(LFA)	98.82	99.54	98.74	98.62	99.06	99.16	99.54	99.20	99.71	99.50
P _I (LFA)	63.04	63.22	63.15	62.82	62.90	62.93	63.01	62.97	63.05	63.23
LCP↑	5.67	3.57	3.03	2.97	3.06	3.18	3.31	3.41	3.57	3.27
CV_D(LC↑)	109.71	96.29	102.41	75.21	91.26	84.15	78.05	73.59	67.15	67.34
CV(LC↑)	80.77	71.45	66.99	63.34	60.34	57.61	55.48	53.73	51.13	48.84
P _D (LC↑)	39.30	39.35	30.37	49.75	30.51	32.68	35.18	37.20	40.52	35.26
LCP↓	-	-	2.93	2.95	3.11	3.28	3.43	3.56	3.74	3.27
CV_D(LC↓)	-	-	12.98	22.51	42.80	41.97	41.14	40.52	40.12	67.34
CV(LC↓)	-	-	17.61	25.60	29.92	32.48	34.28	35.53	37.16	48.84
P _D (LC↓)	-	-	83.14	72.39	29.26	36.28	42.10	46.31	51.73	35.26

Tabla 9.1.5: D = 2 σ

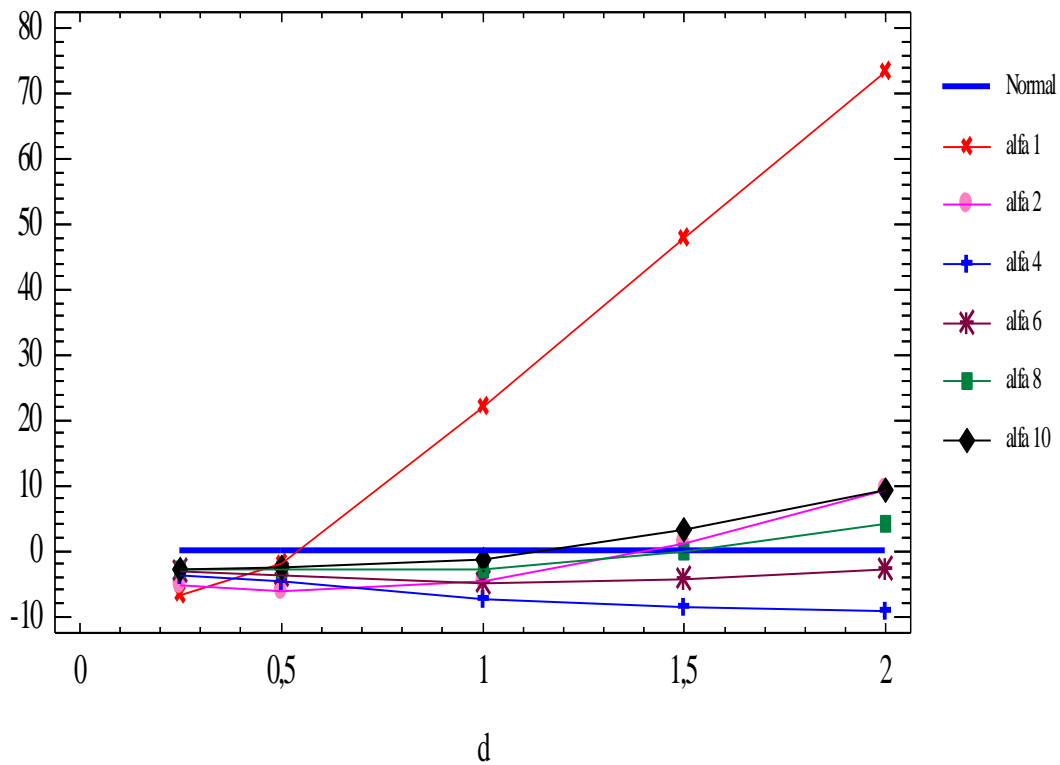


Figura 9.2.1: Variación % de $LCP\uparrow$ para Weibull con respecto a igual medida en un proceso Normal

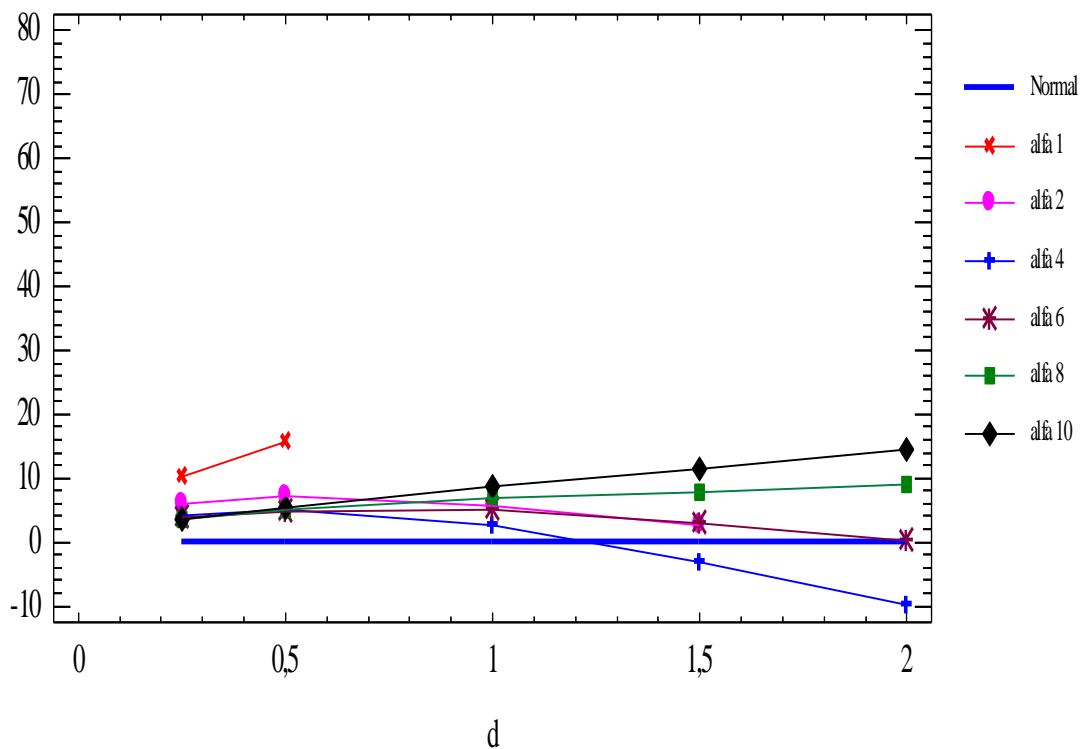


Figura 9.2.2: Variación % de $LCP\downarrow$ para Weibull con respecto a igual medida en un proceso Normal

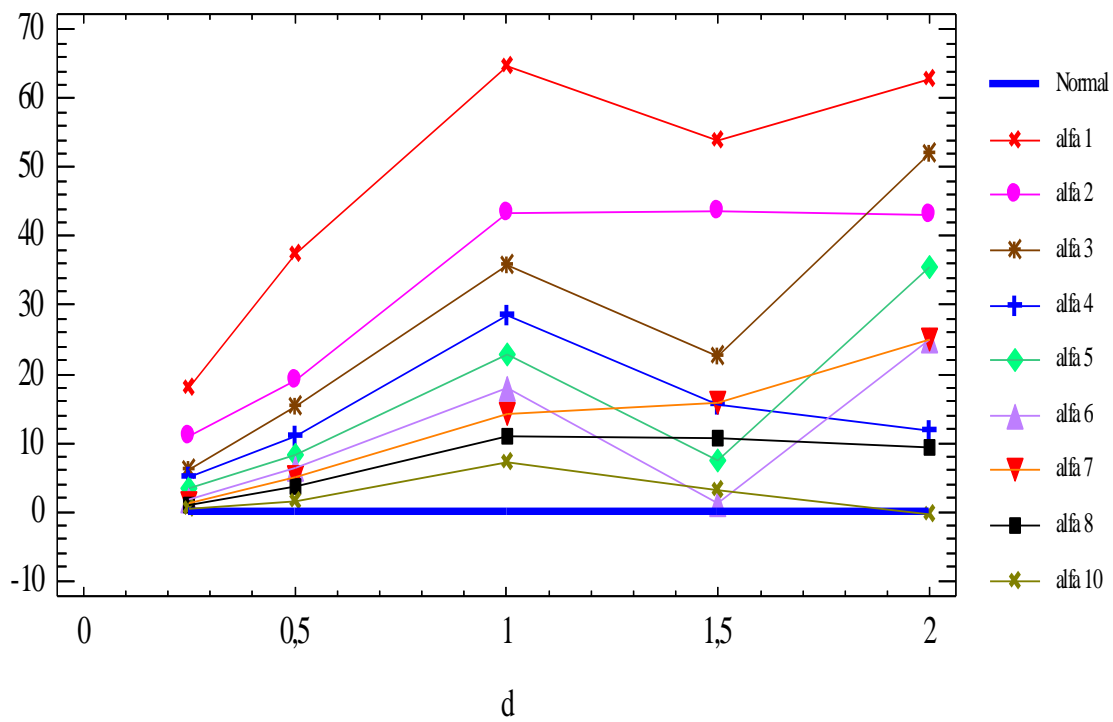


Figura 9.2.3: Variación % en $CV_D(LC\uparrow)$ para Weibull con respecto a igual medida en un proceso Normal

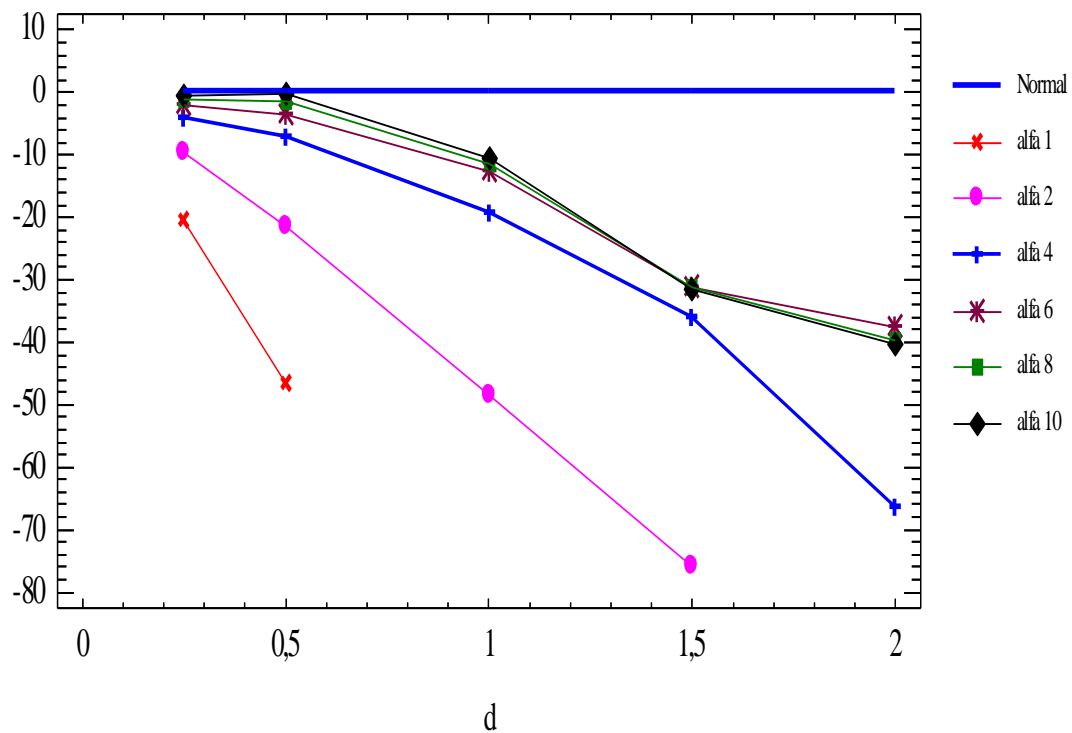


Figura 9.2.4: Variación % de $CV_D(LC\downarrow)$ para Weibull con respecto a igual medida en un proceso Normal

derecha y la total para la LC, para ambas distribuciones, permite darnos cuenta de que el uso de una medida de dispersión global oculta el componente de variabilidad más significativo para cada estado del proceso.

La LFA presenta características comunes para observaciones normales y Weibull: la variabilidad $CV_I(LFA)$ en Weibull es similar al caso normal para los corrimientos y valores α contemplados.

10.2 CONCLUSIONES PARTICULARES

Analizando el comportamiento de la carta CUSUM Normal para procesos Weibull para diferentes combinaciones de valores α y corrimientos D observamos:

✓ **Para detectar corrimientos hacia arriba:**

si $\alpha = 1 \Rightarrow$ muy poco robusta

si $2 \leq \alpha \leq 7 \Rightarrow$ grado de robustez dependiente del valor de D

si $\alpha \geq 8 \Rightarrow$ robusta

La $LCP\uparrow$ para lecturas Weibull es similar al correspondiente caso Normal (sus valores fluctúan dentro de un rango del 10 % de la $LCP\uparrow$ para lecturas normales), excepto para $\alpha = 1$ con corrimientos $D \geq 1$ donde sus valores son significativamente superiores al caso Normal

La variabilidad derecha es siempre superior para lecturas Weibull. Es muy sensible a los cambios de D y α . El peor de los casos se obtiene para $\alpha = 1$ pues allí los incrementos alcanzan su mayor magnitud, aunque, a medida que α crece, sus valores disminuyen acercándose a los correspondientes registros normales de tal forma que, para valores $\alpha \geq 8$, los valores del $CV_D(LC\uparrow)$ son superiores al correspondiente caso Normal en a lo sumo un 10 %, aproximadamente.

✓ **Para detectar corrimientos hacia abajo:**

muy robusta para todos los valores α contemplados

La $LCP\downarrow$ para lecturas Weibull es similar al correspondiente caso normal (sus valores fluctúan dentro de un rango del 10 % de la $LCP\downarrow$ para lecturas normales), excepto para: $\alpha = 1$ con corrimientos muy pequeños $D < 1$ o $\alpha = 10$ con corrimientos $D > 1$ aunque sus valores son levemente superiores al caso Normal

La variabilidad derecha tiene un excelente desempeño, es siempre menor para lecturas Weibull. Es muy sensible a los cambios de D y α . El mejor de los casos se obtiene para $\alpha = 1$ dado que allí las reducciones alcanzan su mayor magnitud, pero luego estas magnitudes disminuyen a medida que α crece. El comportamiento es muy similar para valores α grandes ($\alpha \geq 6$).

✓ **Caso $\alpha = 1$ (proceso exponencial):**

De lo expresado se puede concluir que, la carta CUSUM Normal es muy poco robusta frente a procesos exponenciales para la mayoría de los corrimientos.

11 CONCLUSIONES FINALES

La carta CUSUM Normal ante la presencia de procesos Weibull, teniendo en cuenta el rango de valores α contemplados en este trabajo, es apta para cuando el parámetro de forma oscila entre 8 y 10, tanto para detectar corrimientos hacia arriba como hacia debajo de la media del proceso.

Las medidas de eficiencia presentadas permiten *desengañarnos* sobre la *visión limitada* que nos ofrece la sola consideración de un promedio.

El principal aporte de este trabajo, la distinción entre variabilidad derecha e izquierda, permite concentrar nuestra atención en el tipo de dispersión que más contribuye negativamente a un incremento de la variabilidad global.

Lo expresado, de ninguna manera implica que el promedio de la longitud de corrida no sirva para medir la performance de una Carta de Control sino, por el contrario, sigue siendo la medida básica para la

evaluación del comportamiento de una Carta de Control. Las otras medidas son *complementarias, no suplementarias*. Su contribución permite tener un conocimiento más profundo del desempeño de una Carta de Control y, por ende, brinda información sumamente útil a la hora de elegir un diseño.

Las medidas de eficiencia presentadas pueden ser aplicadas para comparar otros diseños de Cartas de Control existentes o nuevos.

REFERENCIAS

- [1] R. Abernethy. *The New Weibull Handbook*. Third edition. Florida. Robert Abernethy Editor (1998)
- [2] M. Hansen, W. Hurwitz and W. Madow. *Sample Survey Methods and Theory*?. Vol. I: *Methods and Applications*. New York. Ed. Wiley. (1993).
- [3] J. Lucas and R. Crosier. *Fast Initial Response for Cusum Quality Control Schemes: Give Your Cusum a Head Start*, *Technometrics*, 24 N° 3 (1982), pp. 199-205.
- [4] A. Luceño and J. Puig-Pey. *Evaluation of the Run-Length Probability Distribution for Cusum Charts: Assessing Chart Performance*, *Technometrics*, 42 n° 4 (2000), pp. 411-416.
- [5] A. Quintana y L. García. *Medición de la Performance de una Carta de Control mediante el Uso de Tres Indicadores* en Anales del XXXV Coloquio Argentino de Estadística, Universidad Nacional de Mar del Plata, (2007), CD ISBN 978-987-23990-0-9.
- [6] A. Quintana y L. García. *Indicadores Complementarios para medir la Performance de una Carta de Control. Su Aplicación a las Cartas Cusum* en Anales del I ERABIO (Encuentro Regional Argentino Brasileño de Investigación Operativa), XXI ENDIO (Encuentro Nacional de Docentes de Investigación Operativa) y XIX EPIO (Escuela de Perfeccionamiento en Investigación Operativa), Universidad Nacional de Misiones, (2008), CD ISBN 978-987-24267-0-5.
- [7] A. Quintana, L. García y R. Casal. *Medidas de Resumen para evaluar la Performance de una Carta de Control para cada estado de un proceso. Su Aplicación a Cartas de Shewhart y Cusum*. *Revista de la Escuela de Perfeccionamiento en Investigación Operativa*, 30 (2009), en prensa.
- [8] Reliasoft Corporation. *Life Data Analysis (Weibull Analysis)*. e-textbook. <http://www.weibull.com>. (2007).
- [9] C. S. Van Dobben de Bruyn. *Cumulative Sum Tests-Theory and Practice*. Griffin's Statistical Monographs and Courses. N° 24. New York. Hafner Publishing Company (1968).
- [10] K. Waldmann. *Bounds for the Distribution of the Run Length of One-Sided and Two-Sided Cusum Quality Control Schemes*. *Technometrics*, 28 N° 1(1986), pp. 61-67.
- [11] W. Woodall. *The Distribution of the Run Length of One-Sided Cusum Procedures for Continuous Random Variable*, *Technometrics*, 25 N° 3(1983), pp. 295-301.
- [12] W. Woodall. *On the Markov Chain Approach to the Two-Sided Cusum Procedure*, *Technometrics*, 26 N° 1 (1984), pp 41-46.