Representaciones de Macdonald en el espacio de involuciones del grupo Simétrico

Araujo, J. O. araujo@exa.unicen.edu.ar
Paz, K. A. kapaz@exa.unicen.edu.ar
NuCOMPA-Facultad de Ciencias Exactas, UNICEN
Paraje Arroyo Seco s/n, 7000, Tandil, Argentina

Resumen

En este artículo se presenta una descomposición del espacio de involuciones $\mathcal{M}$ del grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$, interpretado como $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$-módulo bajo la acción dada por la conjugación signada. Esta descomposición, se consigue estableciendo una conexión entre funciones signos de subgrupos parabólicos de $\mathfrak{S}_n$ y módulos de Macdonald de $\mathfrak{S}_n$. En particular, se obtiene una forma alternativa de establecer que $\mathcal{M}$ es un modelo de Gelfand para $\mathfrak{S}_n$, en relación con los resultados de Kodiyalam y Verma en [12].

1. Introducción

Un *modelo de Gelfand* para un grupo finito G, es una representación ordinaria del grupo, cuyo carácter es la suma de todos los caracteres irreducibles de G (ver [15]). Después de la construcción de Bernstein, Gelfand y Gelfand, de este tipo de modelos para grupos de Lie compactos en [7], el primero en introducir un modelo de Gelfand para grupos finitos fue Klyachko en [11], en este caso, para el grupo general lineal sobre un cuerpo finito. El modelo de Klyachko, fue también tratado por Howlett y Zworestine en [9] y por Inglis y Saxl en [10]. Pantoja y Soto-Andrade presentan un modelo para un grupo de movimientos en [15].

Modelos polinomiales de Gelfand para el grupo simétrico generalizado y grupos de Weyl de tipos A_n, B_n y D_n fueron tratados en [3], [1], [4] y [5]. Desde un enfoque diferente, *modelos por involuciones* son presentados por Baddeley en [6] y un modelo para el grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$ es también estudiado por Kodiyalam y Verma en [12].
Estamos interesados en esta última realización de modelo de Gelfand para $\mathfrak{S}_n$. Con el objeto de entender mejor esta construcción y evaluar la posibilidad de extenderla a otros grupos de reflexiones, en el presente trabajo nos hemos ocupado en obtener la descomposición de los espacios generados por una clase de conjugación de una involución en $\mathfrak{S}_n$, conforme con el resultado principal de este artículo establecido en el Teorema 5.9. Algún avance en esta dirección se obtuvo en [2], donde se trató la descomposición del espacio generado por las reflexiones de un grupo de Weyl clásico, es decir, un grupo de tipo $A_n \simeq \mathfrak{S}_{n+1}$, de tipo B_n o de tipo D_n.
En la sección 4 se introducen ciertos elementos en el espacio lineal $\mathcal{M}$ generado por las involuciones de $\mathfrak{S}_n$, los cuales se asocian con funciones signo de subgrupos parabólicos de $\mathfrak{S}_n$. Estos elementos son usados en la sección 5 para una conexión entre $\mathfrak{S}_n$-submódulos de $\mathcal{M}$ y módulos de Macdonald, a partir del lema 5.8.
Todos los espacios en este artículo, serán considerados sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales.

2. Módulos de Macdonald

Los *módulos de Macdonald* son módulos asociados a representaciones irreducibles de grupos de reflexiones, construídos a partir de los sistemas de raíces de subgrupos de reflexiones del grupo considerado. Los mismos fueron introducidos por *Macdonald* en *1972* para grupos de Weyl. Estas representaciones extienden, en cierto modo, la de los *módulos de Spech* para el grupo simétrico, introducidos por Spech en [16].
El grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$, o grupo de Weyl de tipo A_{n-1}, tiene asociados los Módulos de Macdonald obtenidos a partir de cada subgrupo parabólico $\mathfrak{S}_\lambda$ donde $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_h)$ es una partición de n y $\mathfrak{S}_\lambda$ es un subgrupo de $\mathfrak{S}_n$ de tipo $\mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\lambda_h}$.

Asociamos con la partición λ una descomposición de $\mathbb{I}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\mathbb{I}_n = \coprod_{j=1}^{h} I_l \tag{1}$$

donde

$$I_1 = \{1, 2, \ldots, \lambda_1\} \quad \text{e} \quad I_l = \left\{1 + \textstyle\sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i, 2 + \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i, \ldots, \sum_{i=1}^{j} \lambda_i \right\}$$

El módulo de Macdonald asociado con la partición λ, es el subespacio M_λ de $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$, generado por los permutados del polinomio:

$$V_\lambda = \prod_{l=1}^{h} \prod_{\substack{i>j \\ i,j \in I_l}} (x_i - x_j) = \prod_{l=1}^{h} V(I_l)$$

donde $V(I_l)$ es el determinante de Vandermonde en las variables x_i con $i \in I_l$.

3. El espacio de involuciones

Cuando las representaciones de un grupo G pueden ser realizadas sobre los números reales, como es el caso de los grupos finitos de Coxeter (ver [8]), haciendo uso del indicador de *Frobenius-Schur*, es posible establecer que la dimensión de un modelo de Gelfand para G coincide con el número de involuciones en G. Esto motiva a considerar el espacio lineal generado por las involuciones de G, como espacio base para la construcción de un modelo de Gelfand

Sea $\mathcal{I}$ el conjunto de involuciones en $\mathfrak{S}_n$. Designamos con $\mathcal{M}$ el subespacio del álgebra de grupo $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ generado por $\mathcal{I}$. Consideramos $\mathcal{M}$ como $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$-módulo vía la acción de $\mathfrak{S}_n$ dada por:

$$\pi \cdot (i_1, i_2) \cdots (i_{2m-1}, i_{2m}) = \zeta_\pi \times (\pi(i_1), \pi(i_2)) \cdots (\pi(i_{2m-1}), \pi(i_{2m}))$$

donde $\pi \in \mathfrak{S}_n$, $(i_1, i_2) \cdots (i_{2m-1}, i_{2m}) \in \mathcal{I}$ y ζ_π es el número de inversiones de π en los pares (i_{2j-1}, i_{2j}).

En [12], Kodiyalam y Verma muestran que $\mathcal{M}$ en un modelo de Gelfand para $\mathfrak{S}_n$, basándose en el análisis del anillo de los $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$-endomorfismos de $\mathcal{M}$.

Sea $\mathcal{I}_m \subset \mathcal{I}$ el conjunto de involuciones de *longitud* m, es decir, de las involuciones que son producto de m transposiciones disjuntas. Es claro que $\mathcal{M}$ puede ser descompuesto, como $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$-módulo, en la forma:

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \mathcal{M}_m \tag{2}$$

donde $\mathcal{M}_m$ es el subespacio de $\mathcal{M}$ generado por las involuciones en $\mathcal{I}_m$.

Definición 3.1. *La representación de una involución $\iota \in \mathfrak{S}_n$, como producto de ciclos disjuntos,*

$$\iota = (i_1, i_2)\,(i_3, i_4) \cdots (i_{2m-1}, i_{2m})$$

es la representación normal de ι, si $i_{2j-1} < i_{2j}$, y además, las transposiciones están ordenadas por el menor índice de cada transposición, es decir

$$i_1 < i_3 < \cdots < i_{2m-1}$$

Notar que en las condiciones de la definición precedente, hay una única expresión asociada con cada involución.

4. La Función Signo

La conexión entre los espacios generados por involuciones y los módulos de Macdonald, se realizará a través de las *funciones signos* de los subgrupos parabólicos de $\mathfrak{S}_n$.

Sea $k \leq n$, $I_k = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq I_n$ con $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ y $\mathfrak{S}\,(I_k)$ el grupo simétrico de I_k. Usaremos $\mathcal{M}\,(I_k)$ para referirnos al espacio generado por las involuciones de longitud máxima en $\mathfrak{S}\,(I_k)$, es decir, de longitud k, si k es un número par, o de longitud $k-1$, si k es un número impar. Es conveniente destacar que, en este artículo, la longitud de una involución es el número de transposiciones disjuntas que intervienen en su descomposicón cíclica.

Notación 4.1. *Para un número natural k, en todo lo que sigue, indicaremos con $\overline{k}$ el mayor número par menor o igual que k, es decir:*

$$\overline{k} = \begin{cases} k & si \quad k \ es \ par \\ k-1 & si \quad k \ es \ impar \end{cases}$$

Llamaremos involución canónica en $\mathfrak{S}(I_k)$ *a la involución* ι *dada por:*

$$\iota = (i_1, i_2)(i_3, i_4) \cdots \left(i_{\overline{k}-1}, i_{\overline{k}}\right)$$

No es difícil ver que el estabilizador de $\{\iota, -\iota\}$ *en* $\mathfrak{S}(I_k)$ *está dado por*

$$\mathcal{E}_\iota = \mathfrak{S}_\iota \rtimes \mathcal{H}_\iota$$

donde $\mathcal{H}_\iota$ *está generado por las involuciones*

$$(i_1, i_3)(i_2, i_4), (i_3, i_5)(i_4, i_6), \ldots, \left(i_{\overline{k}-3}, i_{\overline{k}-1}\right)\left(i_{\overline{k}-2}, i_{\overline{k}}\right)$$

y donde $\mathfrak{S}_\iota$ *está dado por*

$$\mathfrak{S}_\iota = \mathfrak{S}\{i_1, i_2\} \times \mathfrak{S}\{i_3, i_4\} \times \cdots \times \mathfrak{S}\left\{i_{\overline{k}-1}, i_{\overline{k}}\right\}$$

Además, $\mathcal{H}_\iota$ *está contenido en el centralizador* ι *en* $\mathfrak{S}(I_k)$ *y es un subgrupo del grupo alternado* $\mathfrak{A}(I_k)$*. Por otra parte,* $\mathcal{H}_\iota$ *opera permutando los elementos del conjunto*

$$\left\{\{i_1, i_2\}, \{i_3, i_4\}, \ldots, \left\{i_{\overline{k}-1}, i_{\overline{k}}\right\}\right\}$$

de tal modo, que resulta ser isomorfo a $\mathfrak{S}_{\frac{\overline{k}}{2}}$*.*
Usaremos $\mathcal{T}_\iota$ *para denotar un transversal en el cociente* $\mathfrak{S}(I_k)/\mathcal{E}_\iota$*, elegido del siguiente modo: Si*

$$(j_1, j_2) \cdots \left(j_{\overline{k}-1}, j_{\overline{k}}\right)$$

es la representación normal de una involución, elegimos $\tau \in \mathcal{T}_\iota$ *definido por*

$$\tau(i_l) = j_l \qquad 1 \leq l \leq \overline{k}$$

De este modo se tiene

$$\tau(\iota) = (j_1, j_2) \cdots \left(j_{\overline{k}-1}, j_{\overline{k}}\right)$$

Definición 4.2. *Con las notaciones precedentes, definimos la función signo en* $\mathcal{M}(I_k)$ *como*

$$\delta_{I_k} = \sum_{\tau \in \mathcal{T}_\iota} sg(\tau)\, \tau \cdot \iota$$

Ejemplo 4.3. *Si* $I_k = \{1, 2, \ldots, k\}$*, notamos* $\delta_k = \delta_{I_k}$*. Se tiene:*

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= 1 \\
\delta_2 &= (1,2) \\
\delta_3 &= (1,2) - (1,3) + (2,3) \\
\delta_4 &= (1,2)(3,4) - (1,3)(2,4) + (1,4)(2,3)
\end{aligned}$$

Observación 4.4. *Es oportuno notar que en los términos del desarrollo de δ_{I_k}, intervienen todas las involuciones de $\mathfrak{S}(I_k)$ que tienen longitud máxima. La denominación de δ_{I_k}, obedece a que este elemento está asociado precisamente con la función signo en $\mathfrak{S}(I_k)$, como se verá en la siguiente proposición.*

Con el objeto de simplificar la notación, en la siguiente proposición usaremos $I_k = \{1, 2, \ldots, k\}$, $\mathfrak{S}_k = \mathfrak{S}(I_k)$ y $\delta_k = \delta_{I_k}$.

Proposición 4.5. *Con las notaciones precedentes, se tiene:*
i) Si k es impar, entonces

$$\delta_k = \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} (i, k)\right) \delta_{\overline{k}}$$

ii) Sea $v \neq 0$ en $\mathcal{M}(I_m)$ tal que:

$$\pi v = sg(\pi)\, v \qquad \forall \pi \in \mathfrak{S}_k \tag{3}$$

entonces $\left[\frac{m}{2}\right] \geq \left[\frac{k}{2}\right]$.
iii) $\delta_k \neq 0$, y δ_k satisface las identidades en (3).
iv) Si $v \in \mathcal{M}(I_k)$ es como en ii), entonces $v = \lambda \delta_k$ para algún $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Demostración. i) Sea ι la involución canónica en $\mathfrak{S}(I_k)$. Por su definición, ι es también la involución canónica en $\mathfrak{S}(I_{\overline{k}})$. Para cada τ en el transversal $\mathcal{T}_\iota(I_{\overline{k}})$ de $\mathfrak{S}(I_{\overline{k}})$, y cada $i < k$, la involución $(i, k)\,\tau \cdot \iota$ interviene en la expresión de δ_k con el signo opuesto al signo con que $\tau\iota$ interviene en la expresión de $\delta_{\overline{k}}$. En efecto, sea

$$\tau \cdot \iota = (i_1, i_2)(i_3, i_4) \cdots \left(i_{\overline{k}-1}, i_{\overline{k}}\right)$$

la representación normal de $\tau \cdot \iota$. Si $i = i_j$ con j par, se tiene

$$(i, k)\,\tau \cdot \iota = (i_1, i_2) \cdots (i_{j-1}, k) \cdots \left(i_{\overline{k}-1}, i_{\overline{k}}\right)$$

es la representación normal de $(i, k)\,\tau \cdot \iota$, y esta involución figura acompañada de $sg((i, k)\,\tau)$ en la expresión de δ_k.

En otro caso, si $i = i_j$ con j impar, resulta

$$(i,k)\,\tau\cdot\iota = (-1)\,(i_1,i_2)\cdots(i_{j+1},k)\cdots\left(i_{\overline{k}-1},i_{\overline{k}}\right).$$

Dado que

$$(k,j+1,j)\,\tau\cdot\iota = (i_1,i_2)\cdots(i_{j+1},k)\cdots\left(i_{\overline{k}-1},i_{\overline{k}}\right)$$

el signo con el que interviene $\tau\cdot\iota$ en la expresión de $\delta_{\overline{k}}$ es opuesto al signo con el que interviene $(k,j+1,j)\,\tau\cdot\iota$ en la expresión de δ_k.
Teniendo en cuenta la clasificación del transversal $\mathcal{T}_\iota(I_k)$ en $\mathfrak{S}(I_k)$ según sus elementos fijen un índice i, resulta:

$$\mathcal{T}_\iota(I_k) = \mathcal{T}_\iota(I_{\overline{k}}) \cup \coprod_{i=1}^{k-1}(i,k)\,\mathcal{T}_\iota(I_{\overline{k}})$$

de donde se sigue i).
ii) Ponemos

$$v = \sum_\mu \lambda_\mu\,\mu$$

donde μ recorre las involuciones de longitud máxima en $\mathfrak{S}(I_m)$. Supongamos $\left[\frac{k}{2}\right] > \left[\frac{m}{2}\right]$. Entonces $k \geq \overline{m}+2$ y para cada involución μ de longitud máxima en $\mathfrak{S}(I_m)$, existe una transposición $\tau \in \mathfrak{S}(I_k)$ que no es un factor de μ, por lo tanto $\tau\mu = \mu$. Pero, teniendo en cuenta la identidad $\tau v = -v$, garantizada por (3),se observa que las involuciones en los términos de la expresión de v correspondientes a μ y $\tau\mu$, son intercambiadas entre sí para obtener la expresión de τv. Se concluye que λ_μ debe ser cero, y entonces, $v = 0$.
iii) De la observación 4.4, surge que δ_k es una suma signada involucrando todas las involuciones de longitud máxima en $\mathfrak{S}(I_k)$, y en consecuencia δ_k es distinto de cero.
Escribiendo

$$\begin{aligned}
\delta_k &= \sum_{\tau\in T_\iota} sg(\tau)\,\tau\cdot\iota \\
&= \sum_{\tau\in T_\iota} sg(\tau)\,\tau\frac{1}{|\mathcal{E}_\iota|}\textstyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\iota} sg(\sigma)\,\sigma\cdot\iota \\
&= \frac{1}{|\mathcal{E}_\iota|}\textstyle\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k} sg(\pi)\,\pi\cdot\iota
\end{aligned}$$

de la última expresión, resulta que δ_k verifica las identidades en (3).
iv) Pongamos

$$v = \sum_{\tau \in \mathcal{T}_\iota} \lambda_\tau \tau \iota$$

donde $\iota \in \mathfrak{S}(I_k)$ es la involución canónica. Sea $w = v - \lambda_\iota \delta_k$, se tiene que ι no interviene en las expresión de w y éste satisface las identidades en (3). Sea $\tau \in T_\iota$, resulta

$$\tau^{-1} w = sg(\tau)\, w = \pm w$$

Pero en la expresión de $\tau^{-1} w$ aparece el término $\lambda_\tau \iota$, mientras que en la expresión de $\pm w$ no interviene ι, de modo que λ_τ debe ser igual a 0 y en consecuencia $w = 0$, o bien $v = \lambda_\iota \delta_k$. ■

Observación 4.6. *De la proposición precedente, surge que el carácter de $\mathfrak{S}(I_k)$, dado por la función signo, aparece con multiplicidad 1 en la representación de $\mathfrak{S}(I_k)$ asociada con el espacio $\mathcal{M}(I_k)$. Por otra parte, este carácter no aparece en las representaciones asociadas a espacios generados por involuciones de menor longitud.*

5. Conexión con Módulos de Macdonald

Notación 5.1. *Sea $\overline{k} = 2m$, $I_k = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \mathbb{I}_n$ como antes, y sea*

$$\iota = (i_1, i_2)(i_3, i_4) \cdots \left(i_{\overline{k}-1}, i_{\overline{k}}\right)$$

la involución canónica en $\mathcal{M}_k$.
Para un multiíndice $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ notaremos con Ω_ι^β el permanente dado por:

$$\Omega_\iota^\beta = Per \begin{bmatrix} (x_{i_1} x_{i_2})^{\beta_1} & (x_{i_3} x_{i_4})^{\beta_1} & \cdots & \left(x_{i_{k-1}} x_{i_k}\right)^{\beta_1} \\ (x_{i_1} x_{i_2})^{\beta_2} & (x_{i_3} x_{i_4})^{\beta_2} & \cdots & \left(x_{i_{k-1}} x_{i_k}\right)^{\beta_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_{i_1} x_{i_2})^{\beta_m} & (x_{i_3} x_{i_4})^{\beta_m} & \cdots & \left(x_{i_{k-1}} x_{i_k}\right)^{\beta_m} \end{bmatrix}$$

Para un multiíndice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ con $V_\alpha(I_k)$ denotamos el dertermi-nante;

$$V_\alpha(I_k) = \det \begin{bmatrix} x_{i_1}^{\alpha_1} & x_{i_2}^{\alpha_1} & \cdots & x_{i_k}^{\alpha_1} \\ x_{i_1}^{\alpha_2} & x_{i_2}^{\alpha_2} & \cdots & x_{i_k}^{\alpha_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i_k}^{\alpha_k} & x_{i_k}^{\alpha_k} & \cdots & x_{i_k}^{\alpha_k} \end{bmatrix}$$

Si $\alpha = (0, 1, \ldots, k-1)$, $V_\alpha(I_k)$ es el determinante de Vandermonde que notaremos con $V(I_k)$.
Además, asociados con ι tenemos

$$\begin{aligned} V_\iota &= (x_{i_1} - x_{i_2}) \cdots \left(x_{i_{k-1}} - x_{i_k}\right) \\ \Omega_\iota &= \Omega_\iota^{\beta_\iota} \end{aligned}$$

donde $\beta_\iota = (1, 3, \ldots, 2m-1)$

Observación 5.2. *Es conveniente tener en cuenta que*

$$\Omega_\iota = \sum_{\eta \in \mathcal{H}_\iota} \eta \cdot (x_{i_1} x_{i_2}) (x_{i_3} x_{i_4})^3 \cdots \left(x_{i_{\overline{k}-1}} x_{i_{\overline{k}}}\right)^{\overline{k}-1}$$

y que $\mathcal{H}_\iota$ está contenido en centralizador de ι en $\mathfrak{S}(I_k)$.

Ahora vamos a identificar a $\mathcal{M}$ con un subespacio del anillo de polinomios $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$.
Sea $\phi : \mathcal{M} \to \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ la transformación lineal dada por

$$\phi(\iota) = V_\iota \times \Omega_\iota \qquad (\iota \in \mathcal{I})$$

Ejemplo 5.3.

$$\begin{aligned} \phi(i, j) &= (x_i - x_j)(x_i x_j) \\ \phi((i, j)(k, l)) &= (x_i - x_j)(x_k - x_l)\left((x_i x_j)(x_k x_l)^3 + (x_i x_j)^3 (x_k x_l)\right) \end{aligned}$$

En $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ consideramos la acción de $\mathfrak{S}_n$ inducida por las relaciones $\pi \cdot x_i = x_{\pi(i)}$. Veremos luego que ϕ es un monomorfismo de $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$-módulos.

Observación 5.4. *Es oportuno notar que las acciones de $\mathfrak{S}_n$, tanto sobre $\mathcal{M}$ como sobre $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$, son compatibles con las operaciones de suma y producto en cada caso, es decir:*

$$\begin{aligned} \pi \cdot (P + Q) &= \pi \cdot P + \pi \cdot Q \\ \pi \cdot (PQ) &= \pi \cdot P \; \pi \cdot Q \end{aligned}$$

para $\pi \in \mathfrak{S}_n$, $P, Q \in \mathcal{M}$ ó $P, Q \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$.

Proposición 5.5. *ϕ es un $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$-monomorfismo.*

Demostración. Sea

$$\iota = (i_1, i_2)(i_3, i_4) \cdots (i_{2m-1}, i_{2m})$$

una involución en $\mathfrak{S}_n$. Acorde con la observación 5.4, se tiene:

$$\begin{aligned}
\phi(\pi \cdot \iota) &= \phi\left(\left(\pi(i_1), \pi(i_2)\right) \cdots \left(\pi(i_{2m-1}), \pi(i_{2m})\right)\right) \\
&= \left(x_{\pi(i_1)} - x_{\pi(i_2)}\right) \cdots \left(x_{\pi(i_{2m-1})} - x_{\pi(i_{2m})}\right) \times Per\left(x_{\pi(i_1)}, \ldots, x_{\pi(i_{2m})}\right) \\
&= \pi \cdot (V_\iota \times \Omega_\iota) \\
&= \pi\phi(\iota)
\end{aligned}$$

lo que muestra que π es $\mathfrak{S}_n$-morfismo. Para ver que ϕ es inyectiva, mostraremos que los polinomios

$$V_\iota \times \Omega_\iota \tag{4}$$

son linealmente independientes. Dado que, para $\iota \in \mathcal{M}_k$, estos polinomios son homogéneos de grado

$$\frac{\overline{k}}{2} + 2\left(1 + 3 + 5 + \cdots + \left(\overline{k} - 1\right)\right) = \frac{\overline{k}\left(\overline{k} + 1\right)}{2}$$

bastará analizar aquellos que poseen un mismo grado. Sea $P\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\right)$ el polinomio dado por la expresión en (4). Puede observarse que en el desarrollo de la expresión de P, aparecen exactamente

$$2^{\frac{\overline{k}}{2}}\left(\frac{\overline{k}}{2}\right)!$$

monomios, todos ellos, permutados del monomio

$$M = x_{i_1}^1 x_{i_2}^2 x_{i_3}^3 x_{i_4}^4 \cdots x_{i_{\overline{k}-1}}^{\overline{k}-1} x_{i_{\overline{k}}}^{\overline{k}}$$

Por otra parte, es claro que cualquier permutado de M aparece en algún polinomio P. Luego, el número de monomios en P por el número de polinomios P es mayor o igual que el número de permutados de M. Pero estos números son

$$2^{\frac{\overline{k}}{2}}\left(\tfrac{\overline{k}}{2}\right)!, \quad \frac{n!}{2^{\frac{\overline{k}}{2}}\left(\frac{\overline{k}}{2}\right)!\left(n-\overline{k}\right)!} \quad \text{y} \quad \binom{n}{k}\overline{k}!$$

respectivamente. Como el producto, antes mencionado, coincide con el número de permutados de M, no puede haber monomios comunes en los polinomios P, y así, se tiene la independencia lineal anunciada. ■

Lema 5.6. *Sea* $\overline{k} = 2m$*. Si* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ *y* $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ *son multiíndices tales que*

$$\begin{array}{c} \beta_i = \alpha_{2i-1} \quad y \quad \alpha_{2i} = \alpha_{2i-1} + 1 \\ \alpha_k = 0 \quad si \quad k \text{ es impar} \end{array}$$

entonces:

$$\sum_{\tau \in \mathcal{T}_\iota} sg(\tau)\, \tau \left(V_\iota \Omega_\iota^\beta \right) = V_\alpha (I_k)$$

Demostración. Con el solo objeto de simplificar la notación, suponemos $I_k = \{1, 2, \ldots, k\}$. Si k es par, el lema resulta de aplicar, reiteradamente, el desarrollo de Laplace por bloques de 2×2 en el determinante

$$V_\alpha (I_k) = \det \left[x_i^{\alpha_j} \right]$$

En efecto, ponemos:

$$\begin{aligned} \det \left[x_i^{\alpha_j} \right] &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}_\iota} sg(\tau)\, \tau \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{H}_\iota} \sigma \left(\prod_{i=1}^m (x_{2i} - x_{2i-1}) (x_{2i-1} x_{2i})^{\alpha_{2i-1}} \right) \right) \\ &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}_\iota} sg(\tau)\, \tau \left(\prod_{i=1}^m (x_{2i} - x_{2i-1}) \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{H}_\iota} \sigma \prod_{i=1}^m (x_{2i-1} x_{2i})^{\alpha_{2i-1}} \right) \right) \\ &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}_\iota} sg(\tau)\, \tau \left(V_\iota \Omega_\iota^\alpha \right) \end{aligned}$$

Si k es impar, la identidad resulta de comparar el desarrollo del determinante por su última fila con la expresión

$$\sum_{\tau \in \mathcal{T}_\iota} sg(\tau)\, \tau \left(V_\iota \Omega_\iota^\beta \right)$$

descompuesta según la partición

$$\mathcal{T}_\iota (I_k) = \mathcal{T}_\iota (I_{\overline{k}}) \cup \coprod_{i=1}^{k-1} (i, k)\, \mathcal{T}_\iota (I_{\overline{k}})$$

como en la demostración de la Proposición 4.5, haciendo uso del caso precedente cuando k es par. ■

Notación 5.7. *Sea λ una partición de n y*

$$\mathbb{I}_n = \coprod_{j=1}^{h} I_j$$

la descomposición de $\mathbb{I}_n$ dada en (1). *Denotemos con $\mathfrak{S}_j$ el grupo $\mathfrak{S}(I_j)$, con $\mathfrak{S}_\lambda$ el producto directo $\mathfrak{S}_1 \times \cdots \times \mathfrak{S}_l$ y con δ_j, la función signo δ_{I_j}. Sea δ_λ dada por:*

$$\delta_\lambda = \delta_1 \cdots \delta_l$$

Es claro que δ_λ está sociada con la función signo del subgrupo parabólico

$$\mathfrak{S}_\lambda = \mathfrak{S}(I_1) \times \cdots \times \mathfrak{S}(I_l)$$

Por otra parte, usaremos ι_j, $\mathcal{H}_j$ y $\mathcal{T}_j$ para referirnos a la involución canónica de $\mathfrak{S}_j$, al centralizador de ι_j en $\mathfrak{S}_j$ y al correspondiente transversal del estabilizador $\mathcal{E}_j$ de $\{\iota_j, -\iota_j\}$ en $\mathfrak{S}_j$.
Por último, notaremos con $\mathcal{T}_\lambda$ y $\mathcal{H}_\lambda$ los grupos dados por:

$$\mathcal{T}_\lambda = \mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_l \quad y \quad \mathcal{H}_\lambda = \mathcal{H}_1 \times \cdots \times \mathcal{H}_l$$

Lema 5.8. *Existe un polinomio homogéneo no nulo Σ_λ, con coeficientes enteros no negativos tal que*

$$\phi(\delta_\lambda) = V_\lambda \Sigma_\lambda$$

Demostración. Partiendo de las identidades

$$\begin{aligned} \delta_\lambda &= \delta_1 \cdots \delta_l \\ \delta_j &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}_j} sg(\tau)\, \tau \cdot \iota_j \end{aligned}$$

podemos poner:

$$\begin{aligned} \delta_\lambda &= \prod_{j=1}^{l} \sum_{\tau \in \mathcal{T}_j} sg(\tau)\, \tau \cdot \iota_j \\ &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}_\lambda} sg(\tau)\, \tau \cdot \iota \end{aligned}$$

donde $\iota = \iota_1 \cdots \iota_l$. Se sigue que

$$\begin{aligned} \phi\left(\delta_\lambda\right) &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}_\lambda} sg\left(\tau\right) \tau \cdot \phi\left(\iota\right) \\ &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}_\lambda} sg\left(\tau\right) \tau \cdot \left(V_\iota \Omega_\iota\right) \end{aligned} \tag{5}$$

En virtud de la observación 4.4 podemos poner

$$\Omega_\iota = \sum_{\eta \in \mathcal{H}_\iota} \eta \cdot \left(x_{i_1} x_{i_2}\right) \left(x_{i_3} x_{i_4}\right)^3 \cdots \left(x_{i_{2m-1}} x_{i_{2m}}\right)^{2m-1} \tag{6}$$

Dado que $\mathcal{H}_\lambda$ es un subgrupo de $\mathcal{H}_\iota$, la suma en (6) puede agruparse según las clases laterales a izquierda $\mathcal{H}_\iota \diagdown \mathcal{H}_\lambda$, es decir, existen multiíndice $\alpha^1, \ldots, \alpha^s$, todos permutados de $(1, 3, \ldots, 2m-1)$ tales que

$$\begin{aligned} \Omega_i &= \sum_{t=1}^{s} \sum_{\eta \in \mathcal{H}_\lambda} \eta \cdot \left(x_{i_1} x_{i_2}\right)^{\alpha_1^t} \left(x_{i_3} x_{i_4}\right)^{\alpha_2^t} \cdots \left(x_{i_{h-1}} x_{i_h}\right)^{\alpha_h^t} \\ &= \sum_{t=1}^{s} \sum_{\eta \in \mathcal{H}_\lambda} \eta \cdot x^{\alpha^t} \end{aligned}$$

donde

$$x^{\alpha^t} = \left(x_{i_1} x_{i_2}\right)^{\alpha_1^t} \left(x_{i_3} x_{i_4}\right)^{\alpha_2^t} \cdots \left(x_{i_{h-1}} x_{i_h}\right)^{\alpha_h^t}$$

Volviendo a la expresión en (5), tenemos:

$$\begin{aligned} \phi\left(\delta_\lambda\right) &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}_\lambda} sg\left(\tau\right) \tau \cdot \left(V_\iota \sum_{t=1}^{s} \sum_{\eta \in \mathcal{H}_\lambda} x^{\alpha^t} \right) \\ &= \sum_{t=1}^{s} \sum_{\tau \in \mathcal{T}_\lambda} sg\left(\tau\right) \tau \cdot \left(V_\iota \sum_{\eta \in \mathcal{H}_\lambda} x^{\alpha^t} \right) \end{aligned}$$

Podemos descomponer

$$V_\iota = V_{\iota_1} \cdots V_{\iota_l} \quad \text{y} \quad \sum_{\eta \in \mathcal{H}_\lambda} x^{\alpha^t} = \prod \Omega_{\iota_j}^{\alpha_j^t}$$

donde α_j^t es la restricción de α^t a I_j, extendida con 0 si λ_j es impar, más precisamente

$$\alpha^t \left(\sum_{i=1}^{j} \lambda_i \right) = 0 \quad \text{si} \quad \lambda_j \text{ es impar}$$

Ahora, usando el Lema 5.6

$$\begin{aligned}\phi\left(\delta_\lambda\right) &= \sum_{t=1}^{s}\left(\prod_{j=1}^{l}\sum_{\tau\in\mathcal{T}_j} sg\left(\tau\right)\tau\cdot\left(V_{\iota_j}\Omega_{\iota_j}^{\alpha_j^t}\right)\right)\\ &= \sum_{t=1}^{s}\prod_{j=1}^{l} V_{\alpha_j^t}\left(I_j\right)\\ &= \prod_{j=1}^{l} V\left(I_j\right)\left(\sum_{t=1}^{s}\prod_{j=1}^{l}\frac{V_{\alpha_j^t}\left(I_j\right)}{V\left(I_j\right)}\right)\end{aligned}$$

Los cocientes

$$\frac{V_{\alpha_j^t}\left(I_j\right)}{V\left(I_j\right)}$$

son polinomios de Schur en las variables x_i con $i \in I_j$, es decir, son polinomios simétricos que pueden ser expresados como suma de monomios x^μ donde los exponentes μ están asociados con las tablas de Young semistandard (ver [14]). Se concluye que

$$\phi\left(\delta_\lambda\right) = V_\lambda \Sigma_\lambda$$

donde

$$\Sigma_\lambda = \sum_{t=1}^{s}\prod_{j=1}^{l}\frac{V_{\alpha_j^t}\left(I_j\right)}{V\left(I_j\right)}$$

satisface las condiciones pedidas. ■

El siguiente teorema, es el resultado principal de este artículo, allí mostramos que la $\mathfrak{S}_n$-órbita de δ_λ, genera un $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$-submódulo simple de $\mathcal{M}_k$, donde

$$k = \left[\frac{\lambda_1}{2}\right] + \left[\frac{\lambda_2}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{\lambda_l}{2}\right] := \left[\frac{\lambda}{2}\right]$$

Además, se establece que todo $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$-submódulo simple de $\mathcal{M}_k$ puede ser obtenido de esa manera.

Teorema 5.9.

$$\mathcal{M}_k \simeq \bigoplus_{\left[\frac{\lambda}{2}\right]=n} \mathbb{Q}\mathfrak{S}_n V_\lambda$$

Demostración. El operador diferencial dado por

$$\partial = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial_{x_i}}$$

es $\mathfrak{S}_n$-invariante y se anula en los módulos de Macdonald $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n V_\lambda$ (ver [1]) Por el Lema 5.8 se tiene que $\phi\left(\mathcal{M}_k\right)$ contiene el $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$-módulo generado por

$$\phi\left(\delta_\lambda\right) = V_\lambda \Sigma_\lambda$$

Se verifica

$$\partial\left(\phi\left(\delta_\lambda\right)\right) = V_\lambda \partial\left(\Sigma_\lambda\right)$$

Sea h el grado de Σ_λ, dado que Σ_λ tiene coeficientes enteros no negativos, resulta

$$\partial^h\left(\phi\left(\delta_\lambda\right)\right) = V_\lambda \partial^h\left(\Sigma_\lambda\right) = pV_\lambda$$

donde p es un número entero positivo. Por ser ∂ un operador $\mathfrak{S}_n$-invariante, ∂ es un morfismo de $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$-módulos. Se sigue que $\mathcal{M}_k$ tiene un $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$-submódulo isomorfo a $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n V_\lambda$, y así,

$$\bigoplus_{\left[\frac{\lambda}{2}\right]=k} \mathbb{Q}\mathfrak{S}_n V_\lambda$$

es isomorfo a un $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$-submódulo de $\mathcal{M}_k$. En consecuencia, $\mathcal{M}$ contiene copias de todos los módulos de Macdonald, pero, teniendo en cuenta la dimensión de $\mathcal{M}$, debe ser

$$\mathcal{M}_k \simeq \bigoplus_{\left[\frac{\lambda}{2}\right]=n} \mathbb{Q}\mathfrak{S}_n V_\lambda$$

y el teorema queda demostrado. ■

En virtud de la descomposición en (2), el corolario a continuación, es consecuencia inmediata del teorema precedente.

Corolario 5.10. *$\mathcal{M}$ es un modelo de Gelfand para el grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$.*

Referencias

[1] Aguado, J. L. and Araujo, J. O., *A Gelfand model for the symmetric group*, Communications in Algebra, **29** (4), 1841 - 1851 (2001).

[2] Araujo, J. O., *Descomposición de la acción signada del grupo simétrico sobre sus transposiciones.* Actas del IX Congreso Dr. Antonio A. R. Monteiro, (2007), 69-77.

[3] Araujo, J.O., *A Gelfand model for a Weyl group of type Bn*, Beiträge zur Algebra und Geometrie **44**, no. 2 (2003) 359-373.

[4] Araujo, J. O. and Bigeón, J. J., *A Gelfand Model for the Weyl group of type D_n and the branching rules $D_n \hookrightarrow B_n$.* Journal in Algebra, vol. **294**, (2005), 97-116.

[5] Araujo, J. O. and Bigeón, J. J., *A Gelfand Model for the Symmetric Generalized Group.* Communications in Algebra, **37** (5), 1808-1830. 2009.

[6] Baddeley, R., *Models and Involution Models for Wreath Products and certain Weyl Groups.* Journal of London Mathematical Society no. **44**, serie 2 (1991) 55-74.

[7] Bernstein, I, Gelfand, I. and Gelfand, S. *Models of representations of Lie groups*, Selected. Math. Soviet **1** (2) (1981) 121-142.

[8] Bessis, D., *Sur le corps de definition d'un groupe de réflexions complexe.* Comm. in Algebra, **25** (1997), 2703–2716.

[9] Howlett, R. and Zworestine, C., *On Klyachkos model for the representations of finite linear groups.* China Higher Education Press (Beijing), and Springer-Verlag (Berlin, Heidelberg), (2000), 229-246.

[10] Inglis, N. F. J. and Saxl, J., *An explicit model for the complex representations of the finite general linear groups*, Archiv der Mathematik **57** (1991), 424-431.

[11] Klyachko, A. A., *Models for the complex representations of the groups $GL(n, q)$*, Math. USSR Sbornik **48** (1984), 365379.

[12] Kodiyalam, V. and Verma, D.N., *A natural representation model for symmetric groups.* arXiv:math.RT/0402216 v1, 2006.

[13] MacDonald, I. G., *Some irreducible representations of Weyl groups.* Bulletin of the London Mathematical Society **4** (1972) 148-150.

[14] MacDonald, I. G., *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2nd edition, Oxford University Press, 1995.

[15] Pantoja, J. and Soto-Andrade, J., *Fonctions sphériques et modèles de Gelfand pour le groupe de mouvements rigides d'un espace paraeuclidien sur un corps local.* Comptes Rendus de L'Académie des Sciences **302**, (1986), 463-466.

[16] Specht, W. *Die irreduziblen darstellungen der symmetrischen gruppe*, Math. Z. **39** (1935) 696–711.