Álgebras de Boole

Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y sea S un subconjunto de P. Una *cota superior* de S es un elemento $c \in P$ tal que $s \leq c$ para todo $s \in S$. Una *cota inferior* de S es un elemento $d \in P$ tal que $d \leq s$ para todo $s \in S$. Una cota superior (inferior) c de S se denomina el *supremo* (*ínfimo*) de S si es menor o igual (mayor o igual) que cualquier otra cota superior (cota inferior) de S. Si un subconjunto S de P admite supremo (ínfimo) lo denotaremos por $\sup S$ ($\inf S$). En el caso que S tenga dos elementos, x, y, el supremo (ínfimo) de S será denotado por $x \vee y$ ($x \wedge y$).

Definición 1 *Un álgebra de Boole es un conjunto parcialmente ordenado $(B, \leq)$ que verifica las siguientes condiciones:*

(i) *B tiene un primer elemento denotado con 0 y un último elemento denotado con 1, esto es: si $x \in B$, entonces $0 \leq x$ y $x \leq 1$.*

(ii) *Todo par de elementos x, y de B admite supremo $x \vee y$ e ínfimo $x \wedge y$.*

(iii) *Para todo $x \in B$, existe $y \in B$ tal que $x \vee y = 1$ y $x \wedge y = 0$.*

(iv) *Si $x, y, z \in B$, entonces $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.*

Observaciones 1 1) Un *reticulado* es un conjunto parcialmente ordenado que verifica la condición (ii) de la definición anterior. Si además el reticulado verifica la condición (iv), se dice *reticulado distributivo.* Un reticulado que verifica las condiciones (i) y (iii) de la definición anterior se denomina *reticulado complementado.* Por lo tanto en el lenguaje de los reticulados un conjunto parcialmente ordenado $(B, \leq)$ es un álgebra de Boole si y sólo si es un *reticulado distributivo complementado.*

2) Sea B un álgebra de Boole y sea $x \in B$. De acuerdo a la condición (iii) existe $y \in B$ tal que $x \vee y = 1$ y $x \wedge y = 0$. Más aún, de la propiedad distributiva se deduce que dicho elemento y es único y será denotado por $\neg x$. El elemento $\neg x$ se denomina *el complemento* de x.

Ejemplos 1 *1)* El conjunto $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ con el orden natural $0 < 1$ es un álgebra de Boole llamada *el álgebra de Boole minimal.*

2) Si X es un conjunto, entonces el conjunto de partes de X, notado con $\mathcal{P}(X)$, es un álgebra de Boole donde el orden definido es la relación de inclusión, el primer elemento es el conjunto $\emptyset$, el último elemento es X, y si $A, B \in \mathcal{P}(X)$, entonces $A \vee B = A \cup B$ y $A \wedge B = A \cap B$. Más aún, el complemento de un elemento $A \in \mathcal{P}(X)$ coincide con el habitual complemento conjuntista $X \backslash A$.

3) Consideremos el lenguaje $\mathcal{L}$ de la lógica proposicional cuyo alfabeto consiste de un conjunto infinito numerable de símbolos $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ llamadas *variables proposicionales*, dos paréntesis (,) y el conjunto de conectivos $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow\}$. Los elementos de $\mathcal{L}$ se denominan *fórmulas del cálculo proposicional* y se definen inductivamente de acuerdo a la siguientes reglas: a) Las variables proposicionales son fórmulas, b) si α es una fórmula, entonces $\neg\alpha$ es una fórmula y c) si α, β son fórmulas, entonces $(\alpha \vee \beta), (\alpha \wedge \beta)$ y $(\alpha \rightarrow \beta)$ son fórmulas. Denotemos con F al conjunto de todas las fórmulas. Una *valuación* es una función $v : F \rightarrow \mathbf{2}$ que verifica $v(\neg\alpha) = 1 - v(\alpha)$, $v(\alpha \vee \beta) = max(v(\alpha), v(\beta)), v(\alpha \wedge \beta) = min(v(\alpha), v(\beta))$ y $v(\alpha \rightarrow \beta) = max(1 - v(\alpha), v(\beta))$, donde si $x, y \in \mathbf{2}$, $max(x, y)$ y $min(x, y)$ denotan el máximo y el mínimo de x, y respectivamente. Una fórmula α se dice tautología (contradicción) si $v(\alpha) = 1$ $(v(\alpha) = 0)$ para toda valuación v.

Definimos en F la siguiente relación de equivalencia $\equiv$, donde $\alpha, \beta \in F$: $\alpha \equiv \beta$ si y sólo si $v(\alpha) = v(\beta)$ para toda valuación v (o equivalentemente $(\alpha \rightarrow \beta)$ y $(\beta \rightarrow \alpha)$ son tautologías. Denotemos con $F/\equiv$ al conjunto cociente de F vía la relación de equivalencia $\equiv$ y sea $\pi : F \rightarrow F/\equiv$ la proyección canónica. Si definimos en $F/equiv$ la relación de orden dada por $\pi(\alpha) \leq \pi(\beta)$ si y sólo si $(\alpha \rightarrow \beta)$ es tautología, entonces $\leq$ está bien definida. Más aún $(F/\equiv, \leq)$ *es un álgebra de Boole* denominada el *álgebra de Lindenbaum de la lógica proposicional*; en el que el primer elemento es $\pi((\alpha \wedge \neg\alpha))$, el último elemento es $\pi((\alpha \vee \neg\alpha))$ con α cualquier fórmula, el supremo e ínfimo están dados por $\pi(\alpha) \vee \pi(\beta) = \pi(\alpha \vee \beta), \pi(\alpha) \wedge \pi(\beta) = \pi(\alpha \wedge \beta)$ y el complemento por $\neg\pi(\alpha) = \pi(\neg\alpha)$.

4) Como una generalización del ejemplo 3), consideremos un lenguaje $\mathcal{L}$ de primer orden y sea T una teoría de $\mathcal{L}$, esto es, un conjunto de enunciados. Se define en el conjunto F de todas las fórmulas de $\mathcal{L}$ la relación de equivalencia $\sim$ mediante la regla: $\alpha \sim \beta$ si y sólo si $(\alpha \to \beta)$ y $(\beta \to \alpha)$ *son demostrables* en la teoría T, donde α, β son fórmulas . Si $\pi : F \to F/\sim$ es la proyección canónica, entonces $F/\sim$ con el orden definido por $\pi(\alpha) \leq \pi(\beta)$ si y sólo si $(\alpha \to \beta)$ es demostrable es una relación bien definida y con este orden parcial $(F/\equiv, \leq)$ es un álgebra de Boole conocida como el álgebra de Lindenbaum-Tarski de la teoría Ty que se denota por $B(T)$.

5) Sea n un número natural y sea $Div(n)$ el conjunto de los divisores de n. Es fácil ver que la relación $x \leq y$ si y sólo si x es divisor de y define una relación de orden parcial en $Div(n)$, donde $x, y \in Div(n)$. Además, $Div(n)$ resulta ser un reticulado distributivo con primer elemento 1 y último elemento n; y si $x, y \in Div(n)$, $x \vee y$ coincide con el mínimo común múltiplo y $x \wedge y$ con el máximo común divisor. Más aún, $Div(n)$ *es un álgebra de Boole si y sólo si* n *es libre de cuadrados.*

6) Sea X un conjunto munido de un orden total $\leq$ con primer elemento 0 y último elemento 1. Sea $J(X)$ el conjunto determinado por las uniones finitas de intervalos de la forma $[a, b)$ con $a \leq b$. Notar que $\emptyset \in J(X)$ pues $[0, 0) = \emptyset$. Entonces $J(X)$ con el orden de la inclusión es un álgebra de Boole en el que $\emptyset$ es el primer elemento, $[0, 1)$ es el último elemento de $J(X)$ y en el que el supremo y el ínfimo coinciden con las operaciones usuales conjuntistas de unión e intersección. El álgebra $J(X)$ se denomina el álgebra de intervalos del conjunto X.

7) Sea X un espacio topológico, entonces el conjunto $C(X)$ determinado por los subconjuntos de X que son a la vez abiertos y cerrados es un álgebra de Boole con el orden de la inclusión, el conjunto vacío como primer elemento, X como último elemento y las operaciones de supremo, ínfimo y complemento son la unión, intersección y complemento.

8) Sea X un espacio topológico. Un subconjunto abierto U de X se dice *regular* si $U = (\overline{U})^o$, donde para cada subconjunto A de X, $\overline{A}$ denota la clausura de A y A^o el interior de A. Es decir, U es un abierto regular si coincide con el interior de su clausura. Denotemos con $Reg(X)$ al conjunto formado por los abiertos regulares de X. Entonces $Reg(X)$ con el orden de la inclusión es un álgebra de Boole, con el vacío como primer elemento, X el último elemento y las operaciones definidas de la siguiente manera, donde

U, V son abiertos regulares: $U \wedge V = U \cap V, U \vee V = (\overline{U \cup V})^o$ y $\neg U = X \backslash \overline{U}$. Notar que en este ejemplo las operaciones de álgebra de Boole no coincide con las operaciones habituales conjuntistas.

Observación 1 Sea $(B, \leq)$ un álgebra de Boole. Es fácil ver que si en B consideramos la relación de orden dual $\geq$, entonces $(B, \geq)$ vuelve a ser un álgebra de Boole en el que el primer elemento es el 1, el último elemento es el 0, el supremo de $(B, \geq)$ coincide con el ínfimo de B y el ínfimo de $(B, \geq)$ con el supremo de B. El álgebra $(B, \geq)$ se denomina *álgebra de Boole dual de B.*

La siguiente proposición muestra algunas propiedades elementales que verifican las álgebras de Boole en términos de las operaciones.

Proposición 1 *Sea $(B, \leq)$ un álgebra de Boole. Entonces se verifican las siguientes condiciones:*

(i) *Si $x, y \in B$, entonces $x \leq y$ si y sólo si $\neg y \leq \neg x$.*

(ii) *Si $x, y \in B$, entonces $\neg(x \vee y) = (\neg x \wedge \neg y)$ y $\neg(x \wedge y) = (\neg x \vee \neg y)$.*

(iii) *Si $x \in B$, entonces $\neg\neg x = x$.*

(iv) *Si $x, y \in B$, entonces $x \leq y$ si y sólo si $x \wedge \neg y = 0$ si y sólo si $\neg x \vee y = 1$.*

Definición 2 Sea B un álgebra de Boole, un subconjunto no vacío S de B se dice subálgebra si verifica las siguientes condiciones:

(i) Si $x \in S$, entonces $\neg x \in S$,

(ii) Si $x, y \in S$, entonces $x \vee y \in S$ y $x \wedge y \in S$.

De la definición anterior se deduce inmediatamente que toda subálgebra S de un álgebra de Boole B contiene al 0 y al 1, en particular el álgebra minimal **2** es *subálgebra de toda álgebra de Boole.* En los ejemplos 1, $J(X)$ y $C(X)$ son subálgebras de $\mathcal{P}(X)$, mientras que $Reg(X)$ no es una subálgebra de $\mathcal{P}(X)$. Si B es un álgebra de Boole y $(S_i)_{i \in I}$ es una familia de subálgebras de B, entonces es inmediato ver que la intersección $\bigcap_{i \in I} S_i$ es una subálgebra de B. En particular deducimos de esta propiedad que si X es un subconjunto de B entonces existe la menor subálgebra $\langle X \rangle$ de B que contiene a X y se determina como la intersección de todas las subálgebras de B que contienen a X. Esta intersección está bien definida pues B es subálgebra de B. El álgebra $\langle X \rangle$ se define como la *subálgebra generada* por X.

Las álgebras de Boole tienen la particularidad que sus operaciones inducen en B dos estructuras algebraicas conocidas: la de anillo y la de espacio vectorial, más precisamente tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1 *Sea B un álgebra de Boole. Entonces B posee una estructura de anillo conmutativo con unidad, en la que la suma de anillos se define como $x + y = (x \wedge y) \vee (y \wedge \neg x)$, el producto xy coincide con el ínfimo, el 0 es el elemento neutro para la suma y el 1 es el elemento neutro para el producto. Más aún, B con la suma es un grupo de exponente 2 (esto es $x + x = 0$ para todo $x \in B$) y en particular resulta que B es un espacio vectorial sobre el cuerpo de dos elementos $Z_2 = \{0, 1\}$.*

Observar que como el producto de la estructura de anillo definida en B coincide con el ínfimo, entonces se tiene que $x^2 = x \wedge x = x$ para todo $x \in B$. Un anillo A con unidad que verifica la ley $x^2 = x$ para todo $x \in A$ se llama *anillo booleano*. La razón de este término es que en todo anillo booleano A se puede probar que el producto es conmutativo, y A con la suma es un grupo de exponente 2. Más aún, definiendo para todo $x, y \in A$ la relación $x \leq y$ si y sólo si $x = xy$, resulta que A es un álgebra de Boole en el que el ínfimo coincide con el producto, el supremo es $x \vee y = x + y + xy$, el 0 es el primer elemento y el 1 el último elemento. Por lo tanto *la clase de las álgebras de Boole coincide con la clase de los anillos booleanos*.

Definición 3 Sean B, C álgebras de Boole. Una aplicación $h : B \to C$ se dice un *homomorfismo* si verifica las siguientes condiciones para todo $x, y \in B$: (a) $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$, (b) $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$ y (c) $h(\neg x) = \neg h(x)$.

Todo homomorfismo preserva automáticamente las constantes 0 y 1; esto es si $h : B \to C$ es un homomorfismo entonces $h(0) = 0$ y $h(1) = 1$. Un homomorfismo que sea además inyectivo y suryectivo, se dice un *isomorfismo*. Dos álgebras de Boole B, C se dicen *isomorfas*, y se escribe $B \cong C$, si es posible construir un isomorfismo $h : B \to C$ entre ellas. Por ejemplo el álgebra de Boole de los divisores de 30 dada en los ejemplos 1 es isomorfa al álgebra de Boole del conjunto de partes $\mathcal{P}(X)$ de un conjunto $X = \{a, b, c\}$

con 3 elementos. En efecto si n es un divisor de 30, entonces n se escribe como $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$, con α, β, γ enteros no negativos. Entonces la aplicación $f : Div(30) \to \mathcal{P}(X)$ que asigna a cada divisor n de 30 el subconjunto S de X definido como sigue: $a \in S$ si y sólo si $\alpha \neq 0$, $b \in S$ si y sólo si $\beta \neq 0$ y $c \in S$ si y sólo si $\gamma \neq 0$, es un isomorfismo de álgebras de Boole.

Sea B un álgebra de Boole. Una pregunta natural es la siguiente: ¿Es posible encontrar un conjunto X tal que B sea isomorfa al conjunto de partes $\mathcal{P}(X)$?. La respuesta es en general negativa. Sin embargo el resultado es cierto si B es un álgebra de Boole finita y como veremos, el resultado también es cierto para una clase particular de álgebras de Boole que caracteriza justamente a las álgebras de Boole que son isomorfas al conjunto de partes de algún conjunto X.

Definición 4 Sea B un álgebra de Boole. Un *átomo* de B es un elemento a de B diferente de 0 y que verifica la siguiente condición: si $x \in B$ y $x \leq a$, entonces $x = 0$ o $x = a$. Diremos que B es un álgebra de Boole *atómica* si para todo $x \in B$, $x \neq 0$ existe un átomo a tal que $a \leq x$.

Si X es un conjunto, entonces los átomos del álgebra de Boole $\mathcal{P}(X)$ son exactamente los conjuntos unitarios $\{x\}$, con $x \in X$ y es inmediato ver que además $\mathcal{P}(X)$ es un álgebra de Boole atómica. En el extremo opuesto, el álgebra de intervalos $J([0,1])$ del intervalo real $[0,1]$ no tiene átomos.

Proposición 2 *Sea B un álgebra de Boole y sea $a \in B$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) a es un átomo.

(ii) $a \neq 0$ y para todo $x \in B$, $a \leq x$ o $a \leq \neg x$.

(iii) $a \neq 0$ y para todo $x, y \in B$, $a \leq x \vee y$ implica $a \leq x$ o $a \leq y$.

Teorema 2 *Sea B un álgebra de Boole finita con más de un elemento. Entonces B es un álgebra de Boole atómica que es isomorfa al álgebra de Boole del conjunto de partes $\mathcal{P}(X)$, donde X es el conjunto de átomos de B.*

Corolario 1 *Toda álgebra de Boole finita B tiene 2^n elementos, donde n es el número de átomos de B.*

Definición 5 Sea B un álgebra de Boole. Diremos que B es *completa* si todo subconjunto S de B tiene supremo

Es interesante notar que si un álgebra de Boole B tiene la propiedad que todo subconjunto del álgebra tiene supremo, entonces todo subconjunto de B tiene ínfimo y viceversa. Con lo cual en la definición anterior basta pedir la condición referida al supremo. Claramente un argumento inductivo muestra que si S es un subconjunto finito de un álgebra de Boole B entonces siempre existe el supremo. Sin embargo hay ejemplos de álgebras de Boole en la que pueden haber subconjuntos sin supremo. Un ejemplo de esto es por ejemplo tomar el álgebra de intervalos del intervalo racional $IR = [0, 1]$ y tomar S el subconjunto de $J(IR)$ determinado por los intervalos de la forma $[0, x)$ con x un número racional cuyo cuadrado sea menor que 2.

El conjunto de partes de un conjunto X es siempre un álgebra de Boole completa. Un ejemplo menos obvio es tomar el álgebra de Boole $Reg(X)$ de un espacio topológico. El siguiente resultado da una caracterización de las álgebras de Boole que son isomorfas al álgebra de Boole del conjunto de partes de un conjunto.

Teorema 3 *Sea B un álgebra de Boole. Entonces B es completa y atómica si y sólo si B es isomorfa al álgebra de Boole $\mathcal{P}(X)$, donde X es el conjunto de átomos de B.*

Si bien no es cierto que toda álgebra de Boole es isomorfa al conjunto de partes de algún conjunto X, un importante resultado probado por M.H.Stone establece que *toda álgebra de Boole es isomorfa a una subálgebra de $\mathcal{P}(X)$ para algún conjunto X.* Para probar este resultado se necesitan introducir nuevos conceptos en la teoría de las álgebras de Boole.

Definición 6 Sea B un álgebra de Boole, un *ideal* de B es un subconjunto I de B que verifica las siguientes condiciones:

(a) $0 \in I$

(b) Si $x \in I$ e $y \leq x$, entonces $y \in I$.

(c) Si $x, y \in I$, entonces $x \vee y \in I$.

Dualmente, un *filtro* de B es un subconjunto F de B que verifica las siguientes condiciones:

(a') $1 \in F$

(b) Si $x \in F$ e $y \geq x$, entonces $y \in F$.

(c) Si $x, y \in F$, entonces $x \wedge y \in F$.

Un ideal (filtro) de un álgebra de Boole B se dice *propio* si es diferente de B

Es sencillo verificar que un subconjunto I de un álgebra de Boole B es un ideal si y sólo si es un *ideal de anillos booleanos.* Si $a \in B$ entonces el *ideal principal* (*filtro principal*) generado por a es el ideal (filtro) definido por $I_a = \{x \in B : x \leq a\}$ ($F_a = \{x \in B : a \leq x\}$). Un ideal I (filtro F) se dice *principal* si existe $a \in B$ tal que $I = I_a$ ($F = F_a$). En el conjunto de partes de un conjunto X, la familia de todos los subconjuntos finitos de X es un ideal en $\mathcal{P}(X)$ que no es principal cuando X es infinito. Notar que $\{0\}$ y $\{1\}$ son siempre un ideal y un filtro de B respectivamente.

Un hecho básico en la teoría de anillos conmutativos es que las *congruencias* se corresponden con los ideales. Recordar que si $h : A \to B$ es un homomorfismo suryectivo de anillos, entonces el núcleo de h es un ideal de A definido por $Nu(h) = \{x \in A : h(x) = 0\}$ y además el anillo cociente $A/Nu(h)$ es isomorfo a B. Recíprocamente, si I es un ideal de un anillo conmutativo A, entonces la relación $a \sim b$ si y sólo si $a - b \in I$ es una congruencia de anillos y la proyección canónoca $\pi : A \to A/I$ es un homomorfismo suryectivo de anillos, donde A/I denota el conjunto cociente por el ideal I. Como las álgebras de Boole son anillos particulares se sigue que estas propiedades se pueden aplicar a las álgebras de Boole. Más precisamente, si B es un álgebra de Boole e I es un ideal de B, entonces la relación definida por $a \sim_I b$ si y sólo si $(a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg a) \in I$ es una relación de equivalencia definida en B que además es *compatible* con las operaciones del álgebra de Boole, esto es si $a \sim b$ y $c \sim d$, entonces $a \vee c \sim b \vee d, a \wedge c \sim b \wedge d$ y $\neg a \sim \neg b$. Notar que en el lenguaje de anillos el término $(a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg a)$ coincide con la diferencia $a - b = a + b$ pues $-b = b$. Esta diferencia se denomina *diferencia simétrica.* Por lo tanto las congruencias de un álgebra de Boole se corresponden con los ideales del álgebra. Más aún, de acuerdo a la Observación 1, se sigue que las congruencias también se corresponden con los filtros. Más precisamente, si F es un filtro de un álgebra de Boole, entonces la relación definida por $a \sim_F b$ si y sólo si $(\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee a) \in F$ es una congruencia en B y toda congruencia es de esta forma. De ahora en más trabajaremos con los filtros en lugar que los ideales, siendo esta convención simplemente por elección. Si F es un filtro de B, notaremos al conjunto cociente de B por la relación $\sim_F$ por B/F. De todas estas consideraciones se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 3 *Sean B, B' álgebras de Boole y sea $h : B \to B'$ un homomorfismo suryectivo. Entonces $h^{-1}(1) = \{x \in B : h(x) = 1\}$ es un filtro de B y B/F es isomorfa a B'.*

Sean B un álgebra de Boole y sea $h : B \to \mathbf{2}$ un homomorfismo. Como $h(0) = 0$ y $h(1) = 1$ resulta que h es automáticamente suryectivo. De acuerdo a la proposición anterior $P = h^{-1}(1)$ es un filtro de B que además verifica la siguiente condición (p) : si $x \in B$, entonces $x \in P$ o $\neg x \in P$. Un filtro propio P de un álgebra de Boole que verifica la condición (p) se denomina *filtro primo* o *ultrafiltro*. Más aún, si P es un filtro primo de B, entonces la función característica de P definida por

$$C_P(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in P \\ 0 & \text{si } x \notin P \end{cases}$$

es un homomorfismo de B en $\mathbf{2}$. Notaremos con $Hom(B, \mathbf{2}$ al conjunto de todos los homomorfismos de B en $\mathbf{2}$ y notaremos con UB al conjunto de los ultrafiltros de B. Por lo visto recién existe una correspondencia biunívoca entre UB y $Hom(B, \mathbf{2}$.

Es importante destacar que si F es un filtro principal generado por un elemento $a \in B$, entonces F *es primo si y sólo si a es un átomo de B*. Más aún el siguente resultado es una natural generalización de la Proposición 2 y muestra que efectivamente la noción de ultrafiltro es una natural generalización del concepto de átomo:

Proposición 4 *Sea B un álgebra de Boole y $F \subseteq B$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) P es un ultrafiltro.

(ii) P es un filtro propio y para todo $x \in B$, $x \in P$ o $\neg x \in P$.

(iii) P es un filtro propio y para todo $x, y \in B$, $x \vee y \in P$ implica $x \in P$ o $y \in P$.

Un resultado que es escencial en la teoría de álgebras de Boole es el siguiente resultado:

Teorema 4 *Sea B un álgebra de Boole. Si I es un ideal de B y F es un filtro de B tales que $I \cap F = \emptyset$, entonces existe un filtro primo P que contiene a F y $P \cap I = \emptyset$.*

Sea B un álgebra de Boole y sean $x, y \in B$ elementos distintos. Luego $x \not\leq y$ o $y \not\leq x$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x \not\leq y$. Luego si I es el ideal principal generado por y y F es el filtro principal generado por x, resulta que $F \cap I = \emptyset$. Por el teorema anterior, existe un ultrafiltro P que contiene a F y es disjunto de I. Por lo tanto función característica de P, C_P es un homomorfismo de B en $\mathbf{2}$ que verifica $C_P(x) = 1$ y verifica $C_P(y) = 0$, luego obtenemos:

Corolario 2 *Sea B un álgebra de Boole y sean $x, y \in B$. Si $x \neq y$ existe $h \in Hom(B, \mathbf{2}$ tal que $h(x) \neq h(y)$.*

Lo que nos dice este corolario es que los homomorfismos de un álgebra de Boole B en el álgebra con dos elementos separa puntos en B. Más aún, si $X = UB$ entonces la aplicación $\sigma : B \to \mathcal{P}(X)$ definida por $\sigma(a) = \{P \in UB : a \in P\}$ es un homomorfismo inyectivo de B en $\mathcal{P}(X)$. En efecto, este resultado es consecuencia del anterior corolario y de la Proposición 4. Así obtenemos el siguiente teorema que es central en la teoría

Teorema 5 *Toda álgebra de Boole es isomorfa a una subálgebra de $\mathcal{P}(UB)$.*

Un aspecto importante de este resultado es que toda álgebra de Boole B puede ser sumergida en el álgebra de Boole del conjunto de partes de UB. Una pregunta natural es saber si es posible dar una caracterización de la imagen de esta inmersión. La respuesta es afirmativa y como veremos la topología será una herramienta fundamental para poder responder esta pregunta. Comenzamos definiendo una tolología en el conjunto UB de ultrafiltros como sigue. Si consideramos la inmersión σ definida arriba, entonces es fácil verificar que los conjuntos $\{\sigma(a) : a \in B\}$ determinan una base para una topología τ. De la Proposición 4 deducimos además que los conjuntos $\sigma(a)$ son abiertos y cerrados con esta topología. Es más, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 6 *Sea B un álgebra de Boole. Entonces (UB, τ) es un espacio topológico compacto, Hausdorff y los conjuntos $\sigma(a)$, con $a \in B$, determinan* *una base de abiertos cerrados para la topología τ. Más aún, la imagen de la aplicación $\sigma : B \to \mathcal{P}(UB)$ coincide con el álgebra de Boole de los abiertos cerrados de UB.*

Un espacio topológico X que es compacto, Hausdorff y que admite una base de abiertos cerrados para la topología se denomina *espacio Booleano*. La importancia del teorema anterior es que nos dice que toda álgebra de Boole es isomorfa al álgebra de Boole $C(X)$ de los abiertos cerrados de un espacio Booleano. (ver ejemplos 1 (7)). El espacio booleano UB se denomina el espacio de Stone de B. Luego *toda álgebra de Boole es isomorfa al álgebra de Boole de los abiertos cerrados de su espacio de Stone.*

Observaciones 2 (i) Sea B un álgebra de Boole y sea $X = UB$. Supongamos que al conjunto con dos elementos $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ le asociamos la topología discreta. Entonces es inmediato verificar que un subconjunto U de X es abierto cerrado si y sólo su su función característica $C_U : X \to \mathbf{2}$ es una función continua. Por lo tanto *toda álgebra de Boole es isomorfa al álgebra de Boole de las funciones continuas de su espacio de Stone en el conjunto* $\mathbf{2}$.

(ii) Sea B un álgebra de Boole. Entonces B es un álgebra de Boole finita si y sólo si la topología de UB coincide con la topología discreta.En efecto, si B es finita, usando que los puntos de UB son cerrados se deduce que todo subconjunto de UB es cerrado, y por ende todo subconjunto de UB es abierto. Recíprocamente, si la topología de UB es la topología discreta, entonces B es finita ya que el espacio es compacto.

Muchas clases importantes de álgebras de Boole se pueden caracterizar mediante ciertas propiedades topológicas de su espacio de Stone. Por ejemplo vimos en la observación anterior que las álgebras finitas son aquellas en las que la topología de su espacio de Stone es la topología discreta. Otra clase importante en las que se puede dar una caracterización topológica son las álgebras de Boole completas.

Sea X un espacio topológico. Diremos que X es *extremadamente disconexo* si la clausura de todo conjunto abierto de X es abierto.

Teorema 7 *Sea B un álgebra de Boole. Entonces B es completa si y sólo si UB es extremadamente disconexo.*

Sea X un espacio topológico *extremadamente disconexo.* Afirmamos que $U \subseteq X$ es un abierto regular si y sólo si U es abierto cerrado. En efecto, es claro que si $U \in C(X)$ entonces U es abierto regular. Recíprocamente, sea U un abierto regular. Como la clausura de U es un abierto, resulta que la clausura es abierto cerrado. Luego de $U = (\overline{U})^o$ inferimos que $U = \overline{U}$ lo que prueba que U es abierto cerrado. Por lo tanto *toda álgebra de Boole completa es isomorfa al álgebra de Boole de los abiertos regulares de su espacio de Stone.*

El espacio de Stone de ciertas álgebras de Boole tienen caracterizaciones que son bien conocidas en el análisis. Por ejemplo consideremos el álgebra de Lindembaum $(F/\equiv, \leq)$ dada en los Ejemplos 1 (3). En este caso el espacio de Stone es homeomorfo al espacio booleano $\mathbf{2}^{\mathbf{N}}$ determinado por todas las sucesiones de ceros y unos. En efecto, si consideramos la topología discreta en el conjunto $\mathbf{2}$, entonces por el teorema de Tychonoff, $\mathbf{2}^{\mathbf{N}}$ es un espacio compacto con la topología producto. Una base para esta topología consiste de aquellas sucesiones que en un número finito de coordenadas tomas un valor predeterminado que puede ser un 0 o un 1. Estos miembros de la base son claramente abiertos cerrados y además es claro que $\mathbf{2}^{\mathbf{N}}$ es un espacio de Hausdorff lo que implica que es un espacio Booleano. Más aún, si α es una fórmula de la lógica proposicional, entonces induce una función $\overline{\alpha} : \mathbf{2}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{2}$ del siguiente modo. Si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de ceros y unos y $p_{i_1}, \ldots, p_{i_1}$ son las variables que aparecen en α, entonces $\overline{\alpha}((a_n)_{n\geq 1}) = v(\alpha)$, donde v es la valuación que manda la variable p_{i_j} en la coordenada a_{i_j}. Como el valor de verdad de una fórmula solo depende del valor de asignación en las variables que aparecen en dicha fórmula, se sigue que $\overline{\alpha}$ está bien definida. Además por construcción se sigue que $\overline{\alpha}$ es una función continua. Más aún tenemos el siguiente resultado:

Teorema 8 *Sea $B = (F/\equiv, \leq)$ el álgebra de Lindembaum de la lógica proposicional. Entonces se verifican las siguientes condiciones:*

(i) Si alpha, β son fórmulas del cálculo proposicional, entonces $\alpha \equiv \beta$ si y sólo si $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$.

(ii) $\overline{\alpha}$ es una función continua para toda fórmula α.

(iii) Si $f : \mathbf{2}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{2}$ es una función continua, entonces existe una fórmula α tal que $f = \overline{\alpha}$.

En particular el espacio de Stone de B es $\mathbf{2}^{\mathbf{N}}$.

El espacio $\mathbf{2}^{\mathbf{N}}$ se denomina el *espacio de Cantor*. Esta terminología de debe a que el espacio conocido como el ternario de Cantor T es homeomorfo a $\mathbf{2}^{\mathbf{N}}$. En efecto, recordar los elementos de T se pueden pensar como aquellos números reales que en su expansión ternaria en los dígitos $0, 1$ o 2 no aparece ningún 2.

References

[1] Halmos P., *Lectures on Boolean Algebras*, Van Nostrand, New York, 1963.

[2] Balbes R. and Dwinger Ph., *Distributive Lattices*, University of Missouri Press, Missouri (1974).

[3] Monk D. (editor), *Handbook of Boolean Algebras*, North Holland, Volume 1,2 and 3. (1989)